꧁ Baccalauréat STL Métropole juin 2001 ꧂
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

L'usage des calculatrices et des instruments de calcul est autorisé.

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne contient trois boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 3.
Un jeu consiste à extraire successivement deux boules de l'urne, la première boule étant remise avant d'extraire la seconde.
On appelle tirage, tout couple $(a,\ b)$ où a est le numéro de la première boule extraite et b celui de la seconde.
On admet que tous les tirages sont équiprobables.

1. Préciser l'ensemble des neuf tirages possibles (on pourra s'aider d'un tableau).

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage $(a,\ b)$, associe le produit ab.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Établir la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique E(X).

EXERCICE 2 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 ayant pour argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes $z_1 = -\sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{3} + \text{i}$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1 puis de z_2.

2. On considère le nombre complexe $Z = z_1 z_2^2$.

a. Écrire Z sous forme trigonométrique.

b. Vérifier que $Z = \left(-2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}\right) + \text{i}\left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}\right)$.

c. Déduire des deux résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\dfrac{13\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{13\pi}{12}$.

PROBLÈME **11 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \text{e}^{2x} - 3\text{e}^{x} + x + 2.$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

1. a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

b. Démontrer que la droite D d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

c. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite D.

2. Vérifier que pour tout réel x :

$$f(x) = \text{e}^{x}\left(\text{e}^{x} - 3 + \frac{x}{\text{e}^{x}} + \frac{2}{\text{e}^{x}}\right);$$

en déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. a. Calculer $f'(x)$.

b. Vérifier que $f'(x) = (2\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 1)$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$ puis déterminer le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de f.

4. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$. Que peut-on dire des droites T et D ?

b. Tracer, dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les droites D, T et la courbe $\mathscr{C}$.

c. Calculer l'aire, en cm^2, de la partie du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 3$.