Baccalauréat STL Chimie de laboratoire
Métropole juin 2002

EXERCICE 1 — 5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 3 cm.
On appelle i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On appelle notation exponentielle du nombre complexe z l'écriture de z sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où r est le module de z et θ un argument de z.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - z + 1 = 0.$$

2. On pose $z_{\text{A}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ et $z_{\text{E}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
   - **a.** Écrire z_{A} et z_{E} en notation exponentielle.
   - **b.** Construire les points A et E d'affixes respectives z_{A} et z_{E}.
3. On définit les quatre nombres complexes suivants :

$$z_{\text{B}} = z_{\text{A}}^2 \quad ; \quad z_{\text{C}} = z_{\text{A}}^3 \quad ; \quad z_{\text{D}} = z_{\text{A}}^4 \quad ; \quad z_{\text{F}} = z_{\text{A}}^6.$$

   - **a.** Écrire ces quatre nombres complexes en notation exponentielle.
   - **b.** Démontrer que les points A, B, C, D, E et F sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   - **c.** Construire les points B, C, D et F. On justifiera la construction.

EXERCICE 2 — 4 points

Au cours d'une réaction chimique, on appelle $C(t)$ la concentration du réactif (en moles par litre) à l'instant t (en minutes). On admet que la fonction $C : t \longmapsto C(t)$ définie sur l'intervalle I = [0 ; +∞[est solution de l'équation différentielle (E) :

$$C'(t) = -aC(t).$$

où a est une constante donnée liée à la réaction.

1. **a.** Résoudre l'équation (E).
   - **b.** Déterminer la solution de (E) vérifiant : $C(0) = 0,1$ mol.L^{-1} ($C(0)$ est la concentration initiale à l'instant $t = 0$).
2. On donne $a = 9,9 \times 10^{-3}$ min^{-1} et on suppose désormais que la fonction C est définie sur par :

$$C(t) = 0,1 \times \mathrm{e}^{-9,9\times 10^{-1}t}.$$

   - **a.** Déterminer le temps de demi-réaction noté $t_{1/2}$, c'est à dire la valeur de t pour laquelle la concentration est égale à la moitié de la concentration initiale $C(0)$. On donnera d'abord la valeur exacte de t puis celle arrondie à la minute.
   - **b.** La courbe représentative de la fonction C est donnée en annexe. L'axe des abscisses est graduée en minutes. Déterminer graphiquement la valeur de t pour laquelle la concentration est égale à 10 % de la concentration initiale.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 - 2\ln x.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

   b. En écrivant $f(x)$ sous la forme $f(x) = x\left(1 - \dfrac{1}{x} - 2\dfrac{\ln x}{x}\right)$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle I.
   Calculer $f'(x)$, étudier son signe puis construire le tableau de variations de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse 1.
4. Calculer $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ puis en donner les valeurs approchées à 10^{-1} près.
   En utilisant les résultats précédents et le tableau de variations de la fonction f.

   a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution autre que 1.

   b. Donner un encadrement de cette solution par deux entiers consécutifs.
5. Construire dans le repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathscr{C}$, et la tangente T.
6. Soit F la fonction définie sur l'intervalle I par

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2x\ln x.$$

   a. Démontrer que F est une primitive de f sur l'intervalle I.

   b. On appelle S l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 4$ et $x = 6$.
   Calculer la valeur exacte en cm^2 de S, puis une valeur approchée au mm^2 près.

Courbe représentative de la fonction C