Baccalauréat STL Métropole septembre 2000
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

L'usage des calculatrices et des instruments de calcul est autorisé.

EXERCICE 1 **5 points**

Une roue de loterie munie d'un index fixe est divisée en secteurs de mêmes dimensions et de différentes couleurs. Le jeu consiste à miser 20 francs, à faire tourner la roue et à noter la couleur du secteur désigné par l'index à l'arrêt de la roue.
On admet que chaque secteur a la même probabilité d'apparaître. La roue comporte :

— n secteurs rouges qui font perdre la mise (gain du joueur : -20 F) ;
— 6 bleus où l'on reçoit 20 F (gain du joueur nul) ;
— 3 verts où l'on reçoit 80 F ;
— 1 jaune où l'on reçoit 120 F.

Soit X la variable aléatoire qui représente le gain du joueur.

1. **Dans cette question, la roue comporte 14 secteurs rouges($n = 14$)**
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.
   c. Calculer l'écart-type de X au franc près.
2. Dans cette question, la roue comporte n secteurs rouges et son propriétaire désire gagner en moyenne au moins 15 % des sommes misées.
   a. Montrer que l'espérance mathématique de X doit être inférieure ou égale à -3.
   b. Montrer que l'espérance mathématique de X est : $\dfrac{-20n+280}{n+10}$
   c. Déterminer le nombre minimum n de secteurs rouges que doit comporter la roue.

EXERCICE 2 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z + 16 = 0.$$

2. Soit P le polynôme défini par :

$$P(z) = z^3 + \left(5 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)z + 4\left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right).$$

   a. Calculer $P(-4)$.
   b. En déduire une factorisation de $P(z)$ sous la forme $(z+4)(z+a)$ où a est un nombre complexe à déterminer.
   c. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$P(z) = 0.$$

3. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   Soit les nombres complexes :
   $z_{\mathrm{A}} = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ d'image le point A,
   $z_{\mathrm{B}} = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ d'image le point B,
   $z_{\mathrm{C}} = -4$ d'image le point C.

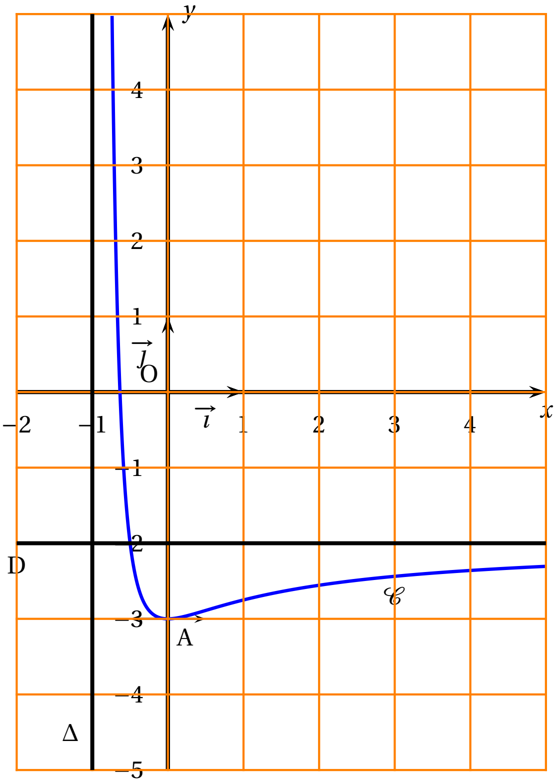
a. Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres.

b. Placer les trois points A, B et C.

c. Démontrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.

d. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

PROBLÈME **10 points**



Ci-dessus est tracée dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ dont la valeur minimale n'est atteinte que pour $x = 0$.

On sait notamment que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes D et Δ qui sont représentées sur le graphique, qu'elle passe par le point A de coordonnées $(0\ ;\ -3)$ et qu'elle admet en A une tangente horizontale.

Partie I

1. En utilisant l'énoncé et le graphique, donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

2. La fonction f est de la forme :

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2},$$

où a, b, et c sont trois constantes réelles.

Montrer que $f'(x) = \dfrac{-bx - b - 2c}{(x+1)^3}$.

3. En utilisant les questions précédentes :

a. Démontrer que $a = -2$.

b. Déterminer b et c.

On admet que f est définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = -2 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Partie II

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de f.
2. Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
3. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D d'équation $y = -2$.
4. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de la région du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D et les droites d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 3$.