Baccalauréat STL Métropole juin 2001
Physique de laboratoire et de procédés industriels

L'usage des calculatrices et des instruments de calcul est autorisé.

EXERCICE 1 **5 points**

À l'instant $t = 0$, un corps dont la température est de 100° est placé dans une salle à 20°. On désigne par $\theta(t)$ la température du corps à l'instant t, l'unité de temps étant l'heure et l'unité de température le degré Celsius.
On suppose que la vitesse de refroidissement $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence de température entre la température du corps et la température de la salle (loi de Newton) (on négligera l'élévation de température de la salle) et on admettra donc qu'il existe un nombre réel k tel que

$$\theta'(t) = k[\theta(t) - 20].$$

1. On pose $y(t) = \theta(t) - 20$.

   a. Montrer que la fonction y est solution de l'équation différentielle $y' = ky$ où k est défini ci-dessus.

   b. Résoudre cette équation différentielle.

   c. En déduire que $\theta(t) = C\mathrm{e}^{kt} + 20$ où C est un nombre réel que l'on calculera.

2. a. Sachant qu'au bout de 20 minutes le corps s'est refroidi de 100° à 60°, montrer que

$$\theta(t) = 80\mathrm{e}^{(-3\ln 2)t} + 20.$$

   b. Quelle est la température du corps, arrondie au degré, au bout de 30 minutes ?

   c. En combien de temps la température tombera-t-elle à de 100° à 30° ?

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. a. Vérifier que le nombre complexe $\left(2 + \sqrt{3}\right) - \mathrm{i}$ est solution de l'équation :

$$Z^2 - 2\left(2 + \sqrt{3}\right)Z + 4\left(2 + \sqrt{3}\right) = 0.$$

   b. Donner l'autre solution de cette équation.

2. On considère les nombres complexes :

$$Z_1 = \left(2 + \sqrt{3}\right) + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad Z_2 = \left(2 + \sqrt{3}\right) - \mathrm{i}.$$

   a. Placer dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ le point A d'affixe Z_1 et le point B d'affixe Z_2.

   b. Vérifier que $\dfrac{Z_2}{Z_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

   c. Déterminer le module et un argument du complexe $\dfrac{Z_2}{Z_1}$.

   d. Déduire du résultat précédent l'angle de la rotation de centre O qui transforme A en B.

3. **a.** Déterminer l'affixe Z_3 du point C milieu du segment [AB].
   b. Quelle est la nature du triangle OCA ?
4. **a.** Calculer $|Z_1|$ et $|Z_3|$.
   b. Déduire des résultats précédents que :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

PROBLÈME **10 points**

Le but du problème est l'étude de la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 - \frac{\ln x}{x},$$

où $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique : 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de la fonction g. Les limites aux bornes ne sont pas demandées.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0~;~+\infty[$. En déduire l'existence d'une droite asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ que l'on précisera.
2. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{x^2}{2} + 1.$$

   Sa courbe représentative $\mathscr{P}$ dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est donnée ci-après.
   a. Déterminer la limite de $[f(x) - h(x)]$ en $+\infty$.
   b. Déterminer le signe de $[f(x) - h(x)]$. Que peut-on en déduire pour la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$?
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille ci-après (à rendre avec la copie).

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{x}\ln x.$$

   sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. On appelle S l'aire en cm^2, de la partie du plan limitée par les deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.
Donner la valeur exacte de S puis la valeur arrondie au mm^2.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE