Baccalauréat STT C.G. – I.G. Métropole juin 2001

Exercice 1 **4 points**

Dans un magasin on a relevé le mode de paiement et le montant M (en euros) mentionnés sur 250 tickets de caisse.
On a constaté que :

- Tous les achats strictement inférieurs à 10 euros sont payés en espèces ;
- La moitié des achats dont le montant M est tel que $10 \leqslant M \leqslant 20$ est payé en espèces ;
- 16 % des achats sont payés par carte de crédit.
- 36 % des achats ne sont pas payés en espèces.

1. Recopier le tableau ci-dessous et finir de le remplir à l'aide des informations données.

Montant / Mode de paiement	$M < 10$	$10 \leqslant M \leqslant 20$	$M \geqslant 20$	Total
Espèces		38		
Chèque				
Carte de crédit		15		
Total	106			250

2. On choisit au hasard un ticket de caisse et on considère les évènements :
A : « Le ticket indique un montant supérieur à 20 euros. »
B : « Le ticket correspond à un paiement par chèque ».
Calculer la probabilité des évènements : A, B, A $\cap$ B, A $\cup$ B.

3. On choisit un ticket de caisse correspondant à un paiement par chèque. Quelle est la probabilité qu'il indique un montant supérieur à 20 euros ?

Exercice 2 **6 points**

Le mobilier d'une bibliothèque municipale doit être changé pour contenir au moins 4 400 livres de petit format et 2 600 livres de grand format.
Un premier fournisseur propose des meubles de type A pouvant contenir 110 livres de petit format et 100 livres de grand format pour un prix de 400 euros.
Un deuxième fournisseur propose des meubles de type B pouvant contenir 220 livres de petit format et 100 livres de grand format pour un prix de 9 600 euros.
Par ailleurs le responsable de la bibliothèque a pour consigne de ne passer aucune commande supérieure à 9 600 euros chez un même fournisseur.

1. Soit x le nombre de meubles de type A et y le nombre de meubles de type B.
Traduire les contraintes que doit respecter le bibliothécaire sous forme d'un système d'inéquations portant sur x et y.

2. À tout couple $(x,\ y)$ de nombres réels, en associe le point M de coordonnées $(x,\ y)$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
(On choisira un centimètre pour deux unités).

a. Montrer que le système obtenu au **1)** est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{lllll} 0 & \leqslant & x & \leqslant & 24 \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & 16 \\ x+2y & & \geqslant & & 40 \\ x+y & & \geqslant & & 26 \\ x \in \mathbb{N} & & , & & y \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

b. Déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient le système précédent. (On hachurera la zone qui ne convient pas).

3. **a.** Exprimer en fonction de x et y la dépense d occasionnée par l'achat de x meubles du type A et y meubles du type B.

b. Tracer dans le repère précédent la droite correspondant à une dépense de 15 600 euros.

c. Déterminer graphiquement le nombre de meubles à commander chez chacun des fournisseurs pour que la dépense soit minimale, en précisant la méthode utilisée.

d. Quelle eu alors la dépense en euros ?

Problème **10 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln x.$$

1. **a.** Montrer que la dérivée g' de g est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g'(x) = \frac{2x^2+1}{x}.$$

b. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $]0;\,+\infty[$.

2. **a.** Calculer $g(1)$.

b. En déduire que $g(x) > 0$ pour $x > 1$ et que $g(x) < 0$ pour $0 < x < 1$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{\ln x}{x} + x - 1.$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

2. **a.** Montrer que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$ $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire, en utilisant le résultat de la dernière question de la **partie A**, le sens de variation de f.

b. Dresser le tableau de variation de f.

3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - x + 1\right]$ et en déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote D dont on donnera une équation.

4. Montrer que $\mathscr{C}$ est en dessous de D pour $x > 1$.

Partie C

On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe tracée sur la feuille annexe.

1. Hachurer sur le graphique de la feuille annexe la partie du plu comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

2. Montrer que la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = -\frac{(\ln x)^2}{2} + \frac{x^2}{2} - x$$

est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie hachurée sur le graphique, puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

ANNEXE
CE DOCUMENT EST À RENDRE AVEC VOTRE COPIE