Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat E Limoges juin 1969 ∾

PARTIE I.

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, xyz) on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées A(+1 ; −2 ; +1), B(0 ; +1 ; +2), C(+1 ; +3 ; +4), D(+5 ; +1 ; +3).

1. Écrire l'équation cartésienne du plan ABC.
2. Écrire des équations paramétriques de la hauteur du tétraèdre issue de D et déterminer les coordonnées du pied, H, de cette hauteur.

PARTIE II.

Soit le plan rapporté au repère orthonormé xOy.
Soit T_1 la transformation qui associe au point m d'affixe z le point M_1 d'affixe $z_1 = \left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z$.
Soit T_2 la transformation qui associe au point M_1 d'affixe z_1 le point M d'affixe $Z = \dfrac{1}{2}\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z_1$.

1. Préciser la nature des transformations T_1 et T_2 ; quels sont les éléments de T_1 et T_2 ?
2. Calculer Z en fonction de z ; en déduire la nature et les éléments de la transformation $T = T_2 \circ T_1$ produit de T_1 par T_2.

PARTIE III.

Le plan est rapporté au repère orthonormé (Ox, Oy)
On considère le cercle (O), de centre O et de rayon unité, et la droite (D) d'équation $x = \lambda$ (λ positif).
Soit m un point de (O) ; Om coupe la droite (D) en P et l'on désigne par M le conjugué harmonique de m par rapport à O et P.

1. On pose $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\ \overrightarrow{\mathrm{O}m}\right) = \theta$ (modulo 2π)
   Calculer en fonction de θ les coordonnées des points m et P, puis celles, x et y, du point M.
   En déduire que, lorsque m décrit le cercle (O), l'ensemble des points M a pour équation
   $$\left(\lambda^2-4\right)x^2+\lambda^2y^2+4\lambda x-\lambda^2=0. \qquad (1)$$
2. λ, positif, étant un paramètre réel, l'équation (1) représente une famille de courbes (C_λ).
   a. Montrer que les courbes (C_λ) passent, quel que soit λ, par deux points fixes, que l'on précisera.
   Peut-on expliquer géométriquement ce résultat ?
   b. Discuter, suivant les valeurs de λ, la nature ùes courbes (C_λ).
   Étudier de façon détaillée les cas $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 4$ et construire sur un même graphique les courbes (C_1), (C_2) et (C_4) correspondantes (unité de longueur : 3 cm).
   Préciser, dans chaque cas, les éléments remarquables et étudier, lorsqu'elles existent, les branches infinies.
3. Les coordonnées d'un point M mobile sont données en fonction du temps par :
   $$x = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{2t}\right) \quad \text{et} \quad y = \mathrm{e}^{t}.$$

a. Montrer que la trajectoire du point M appartient à une courbe de la famille (C_λ) et préciser comment se déplace M sur sa trajectoire lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$.

b. Déterminer les composantes scalaires du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ et du vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma}$ du point M.

Le mouvement de M est-il accéléré ou retardé ?

Calculer les coordonnées de M, les composantes du vecteur $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$, pour $t = 0$.

Placer, dans ce cas, point M et construire les vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$ correspondants.

À quel instant le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ a-t-il pour module $\sqrt{6}$?