

∞ Baccalauréat 1995 ∞

L'intégrale d'avril 1995 à mars 1996

Pour un accès direct cliquez sur les liens [bleus](#)

Pondichéry avril 1995	3
Amérique du Nord juin 1995	7
Antilles-Guyane juin 1995	10
Asie juin 1995	13
Centres étrangers juin 1995	16
Japon juin 1995	20
La Réunion juin 1995	22
Métropole juin 1995	25
Polynésie juin 1995	29
La Réunion septembre 1995	32
Métropole septembre 1995	33
Sportifs de haut-niveau septembre 1995	36
Amérique du Sud novembre 1995	38
Nouvelle-Calédonie novembre 1995	41
Nouvelle-Calédonie mars 1996	44

Tapuscrit : Denis Vergès

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Pondichéry ∞
juin 1995

EXERCICE 1

4 points

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 2 cm.

On note f l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z .

On a donc aussi $z' = \frac{z}{|z|^2}$ où $|z|$ désigne le module de z .

1. Montrer que O , M et M' sont alignés.
2. Déterminer l'ensemble Γ des points invariants par f .
Vérifier que l'ensemble Γ contient les points A et B d'affixes respectives -1 et i .
3. Soient $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$, E le milieu de $[AB]$ et $E' = f(E)$.
Déterminer une équation de $\mathcal{C}$.
Montrer que E' appartient à $\mathcal{C}$.
4. Le point M d'affixe z étant un point quelconque de la droite (AB) , on se propose de construire son image M' d'affixe z' par l'application f .
 - a. Déterminer une équation de la droite (AB) .
On pose $k = OM^2$, $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x', y' réels.
Exprimer k en fonction de x .
Montrer que M' appartient à $\mathcal{C}$ (on pourra exprimer x' et y' en fonction de x et k).
 - b. Dédire des questions précédentes une construction géométrique du point M' connaissant le point M .

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

Quatre filles et trois garçons doivent subir l'épreuve orale d'un examen.

L'examineur décide d'établir au hasard la liste fixant l'ordre de passage des candidats. Pour cela, il met les noms (supposés tous différents) des sept candidats dans une enveloppe.

1. Dans cette question, on suppose que l'examineur procède à un tirage des sept noms l'un après l'autre.
On désigne par F_1 l'évènement : « le premier candidat interrogé est une fille », et par F_2 l'évènement : « le deuxième candidat interrogé est une fille ».
 - a. Quelle est la probabilité que les deux premiers candidats interrogés soient des filles?
 - b. Quelle est la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une fille sachant que le premier candidat interrogé est une fille?

- c. Quelle est la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une fille?
- 2. On suppose maintenant que l'examineur, voulant interroger seulement quatre candidats parmi les sept, procède à un tirage simultané de quatre noms. On note X la variable aléatoire égale au nombre de filles ainsi désignées.
 - a. Quelle est la loi de probabilité de X ?
 - b. Calculer l'espérance de X .

EXERCICE 2**5 points****Enseignement de spécialité**

Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC rectangle en B, tel que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

On prendra $AB = 5$ cm pour la figure.

Soient I le milieu de [AB], E le milieu de [AC] et J le milieu de [EC].

1. Montrer qu'il existe une rotation r transformant A en E et transformant B en C.
 Quel est son angle?
 Construire son centre O en justifiant la construction.
 Dans la suite de l'exercice, k désigne un nombre réel, M et M' sont les points définis par $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM'} = k\overrightarrow{EC}$.
2. a. Préciser la position de M et de M' pour $k = 0$, $k = \frac{1}{2}$ et $k = 2$.
 Le réel k est désormais quelconque.
 b. Montrer que $M' = r(M)$.
 En déduire la nature du triangle OMM' .
 c. Montrer que les points O, A, M et M' sont cocycliques.
3. Soit N le centre du cercle circonscrit au triangle OMM' .
 - a. Montrer que N est l'image de M par une similitude directe de centre O dont on précisera l'angle et le rapport.
 - b. Quel est l'ensemble des points N lorsque M décrit la droite (AB)?
 Construire cet ensemble.

PROBLÈME**11 points****Enseignement de spécialité**

La partie A de ce problème a pour objet la résolution d'une équation différentielle du second ordre. Les parties B et C sont consacrées à l'étude de fonctions.
 Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad (1)$$

où y est une fonction numérique deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la solution de l'équation (1) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (0; 1) et admet en ce point une tangente horizontale.

Partie B

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x + 1)e^{-x}$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

1.
 - a. Étudier le sens de variation de f .
 - b. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et donner une interprétation graphique du résultat.
Déterminer la limite de f en $-\infty$.
 - c. Dresser le tableau de variation de f .
 - d. Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet exactement deux solutions réelles.
On notera α et β ces solutions ($\alpha < \beta$).
Montrer que α appartient à l'intervalle $\left] -1; -\frac{1}{2} \right[$.
Déterminer une valeur approchée de β à 10^{-2} près par défaut en justifiant la méthode employée.
2.
 - a. Tracer $\mathcal{C}$ en faisant apparaître graphiquement tous les résultats obtenus dans la question partie B. 1.
 - b. Soit λ un réel positif. À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda f(t) dt.$$

Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Partie C

Pour tout entier relatif k , on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

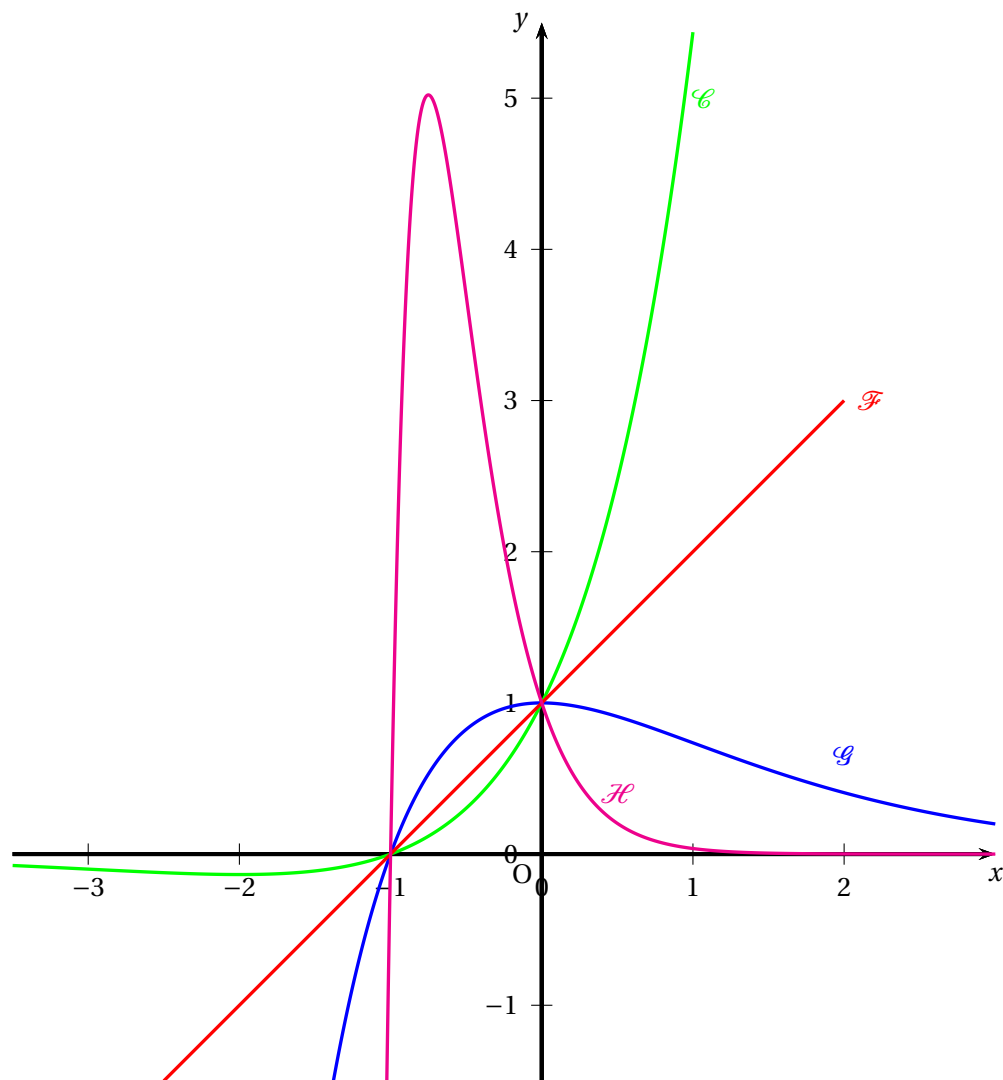
$$f_k(x) = (x + 1)e^{-kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans le repère orthonormal ci-joint.

Lorsque $k = 1$, on retrouve la fonction f étudiée dans la partie B, c'est-à-dire que dans ce cas $f_1 = f$ et $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$.

1.
 - a. Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

- b.** Déterminer par le calcul les points d'intersection de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
Vérifier que, pour tout entier relatif k , la courbe $\mathcal{C}_k$ passe par ces points.
- 2.** Étudier, suivant les valeurs de x , le signe de $(x+1)(e^{-x}-1)$.
En déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_k$ et de $\mathcal{C}_{k+1}$.
- 3.** On suppose que k est non nul.
- Calculer $f'_k(x)$ pour tout x réel.
 - En déduire le sens de variation de la fonction f_k , (distinguer les cas : $k > 0$ et $k < 0$).
 - On a représenté sur le graphique ci-joint quatre courbes $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ correspondant à quatre valeurs différentes de k .
Identifier ces valeurs, en justifiant la réponse.



Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Amérique du Nord juin 1995 ∞

EXERCICE 1

5 POINTS

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct.

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) :

$$z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = 0.$$

1. a. Vérifier que 4 est solution de l'équation (E).
- b. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout z complexe :

$$z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = (z - 4)(az^2 + bz + c).$$

- c. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ et exprimer les solutions sous forme trigonométrique.
2. p étant un réel strictement positif, on note (E_p) l'équation suivante :

$$z(z - 4)(z^2 - 4z + 4 + p^2) = 0.$$

- a. Montrer que les points du plan dont les affixes sont solutions de (E_p) sont les sommets d'un losange dont l'aire vaut $4p$ unités d'aire.
- b. Dessiner ce losange dans le cas où $p = 2$.

EXERCICE 2

4 POINTS

Enseignement obligatoire

Un jeu consiste à extraire, au hasard et simultanément, 3 boules d'une urne contenant 5 boules rouges et 5 boules vertes.

Si le joueur obtient 3 boules rouges, évènement que l'on note R_3 il gagne 100 euros.

S'il obtient 2 boules rouges et 1 boule verte, évènement que l'on note R_2 , il gagne 60 euros.

Enfin, s'il obtient strictement moins de 2 boules rouges, il ne gagne rien et on note cet évènement E .

1. Montrer que les probabilités des évènements R_2 et R_3 sont :

$$p(R_2) = \frac{5}{12} \quad \text{et} \quad p(R_3) = \frac{1}{12}.$$

2. On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
3. Dans cette question, on modifie les règles du jeu de la façon suivante :
 - Si le joueur réalise les évènements R_3 ou R_2 il ne gagne plus d'argent immédiatement, mais il est qualifié pour la suite du jeu que l'on appelle « Banco ».
 - Si l'évènement E est réalisé, le joueur ne gagne rien et n'est pas qualifié pour le « Banco ».

Le « Banco » consiste à extraire une boule parmi les sept restées dans l'urne ; si celle-ci est verte, le joueur empoche les 200 euros du « Banco », et si elle est rouge, le joueur a perdu mais repart avec une prime de consolation de 40 euros.

- Quelle est la probabilité d'empocher les 200 euros du « Banco » sachant que R_3 est réalisé ?
- Quelle est la probabilité d'empocher les 200 euros du « Banco » sachant que R_2 est réalisé ?
- En déduire la probabilité d'empocher les 200 euros du « Banco ».

On note Y la variable aléatoire donnant le gain du joueur dans ce nouveau jeu : Y peut donc prendre les valeurs 0, 40 ou 200.

Établir la loi de probabilité de Y .

Calculer l'espérance mathématique de Y et comparer avec celle de X .

EXERCICE 2

4 POINTS

Enseignement de spécialité

Soient O , A et B trois points distincts du plan orienté. On note θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. On supposera que θ est compris strictement entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On considère les rectangles $(OPQA)$ et $(OBRS)$ tels que :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = -\frac{\pi}{2}; \quad OP = 2OA$$

$$\text{et } (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}) = \frac{\pi}{2}; \quad OS = \frac{OB}{2}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (PB) et (QR) se coupent en un point que l'on note I , et que I appartient au cercle circonscrit au rectangle $(OBRS)$.

- Faire une figure avec les éléments cités ci-dessus.
- Soit f la similitude directe de centre O d'angle $\theta + \frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{OB}{2OA}$.
 - Déterminer les images par f des points O , P , A et en déduire celle du point Q .
 - Grâce à ce qui précède comparer les angles $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OR})$ ainsi que les rapports $\frac{OQ}{OP}$ et $\frac{OR}{OB}$.
- On munit le plan d'un repère orthonormal direct dont l'origine est le point O et on note z_P , z_Q , z_B et z_R les affixes des points P , Q , B et R .
 - Montrer que : $\frac{z_Q}{z_P} = \frac{z_R}{z_B}$.
 - Montrer que l'égalité : $\frac{z_R}{z_B} = \frac{z_R - z_Q}{z_B - z_P}$ équivaut à celle démontrée à la question précédente,
 - En déduire l'existence du point I et la cocyclicité des points O , I , B , R .
Conclure.

PROBLÈME

11 POINTS

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit f l'application définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x - 4 + \frac{\ln x}{4}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer les limites de f aux bornes de $]0; +\infty[$.
Justifier que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote et en donner une équation.
2.
 - a. Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
 - b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $I = [3; 4]$.
 - c. Tracer $\mathcal{C}_f$.
3. Soit g l'application définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 4 - \frac{\ln x}{4}.$$

- a. Montrer que α est solution de l'équation : $g(x) = x$.
 - b. Montrer que l'image de l'intervalle I par g est incluse dans I .
 - c. Montrer que pour tout élément x appartenant à I : $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - a. En utilisant 3., montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n , u_n est élément de I .
 - b. Prouver que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12} |u_n - \alpha|.$$

En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}.$$

Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

- c. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'inéquation : $\frac{1}{12^x} \leq 10^{-3}$.

En déduire que u_3 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

5. Soit $\mathcal{D}$ le domaine limité par $\mathcal{C}_f$ l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 4$.
 - a. Calculer, pour $x > 0$, la dérivée de $x \mapsto x \ln x$.
 - b. En utilisant le résultat du a., exprimer l'aire en cm^2 du domaine $\mathcal{D}$ à l'aide d'un polynôme du second degré en α .

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Antilles–Guyane juin 1995 ∞

EXERCICE 1

4 points

Une épreuve consiste à jeter une fléchette sur une cible partagée en trois cases notées 1, 2, 3. Deux concurrents A et B sont en présence. On admet qu'à chaque lancer, chacun d'eux atteint une case et une seule case et que les lancers sont indépendants.

Pour le concurrent A, les probabilités d'atteindre les cases 1, 2, 3 sont dans cet ordre : $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{12}$.

Pour le concurrent B, les trois éventualités sont équiprobables.

N. B. : Les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Le concurrent A lance la fléchette trois fois. Les résultats des trois lancers sont indépendants.
 - a. Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne chaque fois la case 3?
 - b. Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne les cases 1, 2, 3 dans cet ordre?
 - c. Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne les cases 1, 2, 3?
2. On choisit un des deux concurrents. La probabilité de choisir A est égale à deux fois la probabilité de choisir B.
 - a. Un seul lancer est effectué. Quelle est la probabilité pour que la case 3 soit atteinte?
 - b. Un seul lancer a été effectué, et la case 3 a été atteinte. Quelle est la probabilité pour que ce soit le concurrent A qui ait lancé la fléchette?

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

On se propose de déterminer quels sont les nombres complexes solutions de l'équation :

$$z^2 - 6z + 12 = 0 \quad (E)$$

et de placer, par une construction géométrique, les images de ces nombres dans le plan complexe.

1.
 - a. Résoudre l'équation (E). On note u et $\bar{u}$ ses solutions, u étant celle dont la partie imaginaire est positive.
 - b. Calculer le module et un argument de u . En déduire le module et un argument de $\bar{u}$.
2.
 - a. On considère le nombre complexe $u - 4$. Écrire ce nombre sous forme algébrique (cartésienne), puis sous forme trigonométrique.
 - b. Calculer le module et un argument du nombre : $\frac{u}{u-4}$. En déduire le module et un argument du nombre $\frac{\bar{u}}{\bar{u}-4}$.
3. Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note A le point d'affixe 4, B le point d'affixe 2 et C le point d'affixe 6. M et N sont les points d'affixe u et $\bar{u}$.

- a. En interprétant géométriquement les résultats du 2., démontrer que les points O, A, M, N sont sur un même cercle que l'on précisera.
- b. Démontrer que les points B, C, M, N sont aussi sur un même cercle que l'on précisera.
- c. Construire les deux cercles ainsi obtenus, et les deux points M et N .

EXERCICE 2**5 points****Enseignement de spécialité**

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = a$ et $AC = 2a$. I désigne le milieu de $[AC]$ et G est le barycentre du système $\{(A, 3); (B, -2); (C, 1)\}$.

1. Construire le point G et préciser la nature du quadrilatère $ABIG$.
Exprimer en fonction de a les distances GA, GB et GC .
2. À tout point M du plan, on associe le nombre réel :

$$f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2.$$

- a. Exprimer $f(M)$ en fonction de MG et de a .
- b. Déterminer et construire l'ensemble (T) des points M du plan tels que :

$$f(M) = 2a^2.$$

3. À tout point M du plan, on associe maintenant le nombre réel :

$$h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2.$$

- a. Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{U}$ non nul tel que :
 $h(M) = \vec{MB} \cdot \vec{U} - 2a^2$.
- b. On désigne par P l'ensemble des points M du plan tels que :
 $h(M) = -2a^2$.
Vérifier que les points I et B appartiennent à P , préciser la nature de cet ensemble.
Construire P .
4. P et T sont sécants en deux points E et F . Montrer que les triangles GEC et GFC sont équilatéraux.

PROBLÈME**11 points****Enseignement obligatoire****Partie 1**

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 1.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Unité graphique 1 cm.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. a. Vérifier que $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right)$.
 b. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Calculer $f'(x)$ et établir le tableau des variations de f .
4. a. Montrer que la droite D d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ lorsque x tend vers moins l'infini.
 b. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à D .
5. Déterminer une équation de la tangente D' à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 .
6. Construire $\mathcal{C}$ et D .
7. Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par D , la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 0$.

Partie II

Pour tout entier n appartenant à $\mathbb{N}$, on désigne par E_n le domaine limité par la droite D , la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation : $x = -n - 1$ et $x = -n$.

1. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}_n$ du domaine E_n .
 Montrer que la suite des réels $\mathcal{A}_n$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme $\mathcal{A}_0$ et la raison.
2. Calculer $S_n = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_n$.
 En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \cdot \frac{2}{3}; \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$

Partie III

1. Montrer qu'en tout point M d'abscisse a de la courbe $\mathcal{C}$ il existe une tangente à $\mathcal{C}$ dont on établira une équation en fonction de a .
2. Cette tangente rencontre l'asymptote D en un point N . On désigne par M' et N' les projections orthogonales de M et N sur l'axe des abscisses.
 - a. Montrer que $M'N'$ est un nombre constant.
 - b. En déduire une construction simple de la tangente en M .
 - c. Construire la tangente D' définie dans la partie I. 5.

Durée : 4 heures

♧ Baccalauréat S Asie juin 1995 ♧

EXERCICE 1

4 points

Dans le plan orienté, on considère deux droites orthogonales $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ et quatre points distincts A, B, C et D tels que :

- A et C sont sur $(\mathcal{D})$, B et D sont sur $(\mathcal{D}')$,
- $AC = BD$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$
- $[AC]$ et $[BD]$ n'ont pas même milieu.

1. Faire une figure.

Compléter cette figure au fil des questions et la joindre à la copie.

2. Justifier qu'il existe une rotation $\mathcal{R}_1$ qui transforme A en B et C en D.

Déterminer son angle α_1 et construire sur la figure son centre I. (On expliquera la construction.)

3. Justifier qu'il existe une rotation $\mathcal{R}_2$ qui transforme D en A et B en C.

Déterminer son angle α_2 et construire sur la figure son centre J. (On expliquera la construction.)

4. On désigne par M le milieu de $[AC]$ et N celui de $[BD]$. Déterminer la nature du quadrilatère IMJN.

5. Soit P le point diamétralement opposé à I sur le cercle de diamètre $[AB]$, et Q le point diamétralement opposé à I sur le cercle de diamètre $[CD]$.

a. Déterminer les angles $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP}\right)$, $\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ}\right)$ et calculer les rapports

$$\frac{IP}{IA} \text{ et } \frac{IQ}{IC}.$$

b. Préciser l'angle et le rapport de la similitude de centre I qui transforme A en P et C en Q.

c. En déduire que J est le milieu de $[PQ]$.

EXERCICE 2

4 points

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{2 \ln x}{x}.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1. Étude de la fonction auxiliaire g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x.$$

a. Étudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

2. a. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
 c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ et étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à Δ .
 d. Déterminer les coordonnées du point A de $(\mathcal{C})$ sachant que $(\mathcal{C})$ admet en A une tangente T parallèle à Δ .
 e. Tracer $(\mathcal{C})$, Δ et T dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 .
 Prouver que $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$.

EXERCICE 3**4 points**

On désigne par h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On note I l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

1. Montrer que l'équation $h(x) = x$ possède une solution unique x_0 sur $]0; +\infty[$ et que x_0 appartient à I.
2. Montrer que pour tout x appartenant à I, $h(x)$ appartient aussi à I.
3. a. Calculer la dérivée h' de h et la dérivée seconde h'' de h .
 b. Étudier les variations de h' sur I.
 c. En déduire que pour tout x de I on a $|h'(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}}$.
4. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$.
 a. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
 b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}} |u_n - x_0|.$$

- c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_n - x_0| \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{n}{2}}$.
5. a. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 , on ait : $\frac{1}{2} e^{-\frac{n}{2}} < 10^{-2}$.
 b. Montrer que : $|u_n - x_0| < 10^{-2}$. Que représente u_{n_0} relativement à x_0 ? Calculer u_{n_0} à 10^{-2} près par défaut.

EXERCICE 4**4 points**

Dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$Z_A = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, \quad Z_B = 1 - i, \quad Z_C = \frac{Z_A}{Z_B}.$$

1. a. Écrire Z_C sous forme algébrique.
b. Déterminer le module et un argument de Z_A et de Z_B .
c. Écrire Z_C sous forme trigonométrique; en déduire les valeurs exactes $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$.
2. Soit I le point d'affixe $Z_I = 1$.
a. Quelle est la nature du triangle OIB?
b. Déterminer les images de I et B dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.
En déduire la nature du triangle OAC.

EXERCICE 5**4 points**

Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx.$$

1. Calculer I_0 et J_0 .
2. Soit n un entier naturel non nul.
a. En intégrant par parties I_n puis J_n montrer que I_n et J_n vérifient le système :
$$\begin{cases} I_n + nJ_n &= 1 \\ -nI_n + J_n &= e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$$
b. En déduire, pour n entier naturel non nul, les expressions de I_n et J_n en fonction de n .
3. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

Durée : 4 heures

⌘ Baccalauréat S Centres étrangers groupe 1¹ ⌘
juin 1995

EXERCICE 1

4 points

Une entreprise utilise des machines de type M constituées chacune de deux éléments E_1 et E_2 . La défectuosité d'un seul des deux éléments E_1 et E_2 suffit à mettre la machine hors service et on exclut toute autre éventualité de panne.

Soient A_1 et A_2 les deux évènements :

A_1 : « l'élément E_1 tombe en panne » ;

A_2 : « l'élément E_2 tombe en panne ».

On suppose que A_1 et A_2 sont deux évènements indépendants de probabilités respectives :

$$p_1 = p(A_1) = 0,08 \quad \text{et} \quad p_2 = p(A_2) = 0,05.$$

1. Calculer la probabilité s pour que les deux éléments soient simultanément hors service.
2. Calculer la probabilité p pour que la machine M soit en panne.
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'éléments hors service.
 - a. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - b. Vérifier que l'espérance mathématique de X est égale à 0,13.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique : 2 cm.

Soient A_0 le point d'affixe 2, A'_0 le point d'affixe $2i$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$.

Plus généralement, si A_n est un point d'affixe z_n , on désigne par A'_n le point d'affixe iz_n et par A_{n+1} le milieu du segment $[A_nA'_n]$. On note p_n et θ_n le module et l'argument de z_n .

1.
 - a. Déterminer les affixes des points $A_0, A'_0, A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3$. Placer ces points sur une figure.
 - b. Calculer p_0, p_1, p_2, p_3 , ainsi que $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$.
2.
 - a. Pour tout entier n , exprimer z_{n+1} en fonction de z_n . En déduire z_n en fonction de n .
 - b. Établir les expressions de p_n et θ_n en fonction de n .
 - c. Déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.
Interpréter géométriquement ce résultat.
 - d. Comparer les modules et les arguments de z_n et z_{n+1} .
3. Établir que $A_nA_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}A_{n-1}A_n$. Après avoir exprimé A_nA_{n+1} en fonction de n , déterminer en fonction de n , la longueur ℓ_n de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \dots A_n$.
Déterminer la limite de ℓ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Djibouti, Maroc, Tunisie

EXERCICE 2**5 points****Enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique : 5 cm.

A, B, C désignent les points d'affixes respectives 0, i et -1 .

On note g l'application qui à tout point M du plan, d'affixe z , associe le point $g(M)$ d'affixe

$$z' = \frac{a + z + iz}{3}.$$

1. a. À tout point M d'affixe z , on fait correspondre le point M_1 d'affixe iz . On note M' l'isobarycentre des points A, M et M_1 . Exprimer en fonction de z l'affixe de M' .
- b. Montrer que $g(B) = O$ si et seulement si $a = 1 - i$ et que, dans ces conditions, les points O, A, I sont alignés, I désignant le milieu de [BC]. Placer les points O, A, B, C, I sur une figure.

Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 1 - i$.

2. a. Prouver que g est une similitude directe dont on déterminera le centre Ω , le rapport et l'angle.
- b. Prouver que les points A, B, Ω sont alignés.
3. a. Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OI})$.
Montrer que l'image de la droite (OB) par g est la droite (OI).
- b. Soit O' l'image de O par g . Montrer que la droite (OO') est l'image par g de la droite (BO).
- c. En déduire que les points I, O, O' , A sont alignés.
4. Montrer que les points I et Ω appartiennent au cercle de diamètre $[BO']$.

PROBLÈME**11 points**

L'objet de la partie 1 est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 3 + 3e^{-\frac{1}{3}x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique : 2 cm.

L'objet de la partie 2 est d'étudier une méthode d'approximation de l'unique solution non nulle a de l'équation $f(x) = 0$, à l'aide d'une suite.

Partie 1**Étude de la fonction f**

1. Sens de variation de f
 - a. Calculer la dérivée f' de f .
 - b. Étudier le sens de variation de f' et calculer la limite de f' quand x tend vers $+\infty$.
 - c. Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que $f'(\alpha) = 0$ et montrer que $0,4 \leq \alpha \leq 0,5$.
 - d. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$.
2. Comportement asymptotique de f en $+\infty$

- a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- b. Déterminer le signe de $[f(x) - (x^2 - 3)]$ et sa limite en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat; on note $\mathcal{P}$ la courbe d'équation $y = x^2 - 3$.
3. Signe de f
 - a. Dresser le tableau de variation de f .
 - b. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution non nulle a et une seule appartenant à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et montrer que $0,8 \leq a \leq 0,9$.
 - c. Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$.
4. Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$. On précisera la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
5. a. Calculer l'intégrale $I(\lambda) = \int_0^\lambda [f(x) - (x^2 - 3)] dx$ où λ désigne un nombre réel strictement positif.
- b. Interpréter graphiquement ce résultat.
- c. Déterminer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Partie 2

Approximation de la solution a de l'équation $f(x) = 0$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I = [0,8; 0,9]$ par

$$g(x) = X - f(x) = x + 3 - x^2 - 3e^{-\frac{1}{3}x}.$$

Ainsi, la solution a de l'équation $f(x) = 0$ est aussi l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

1. Étude de la fonction g'
 - a. Calculer $g'(x)$.
Étudier le sens de variation de g' (On pourra utiliser les résultats de I. 1. b.).
 - b. Calculer $g'(0,8)$ et $g'(0,9)$. En déduire qu'il existe un nombre β et un seul de l'intervalle I tel que $g'(\beta) = 0$.
Montrer que pour tout $x \in [\beta; 0,9]$, $|g'(x)| \leq 6 \cdot 10^{-2}$, puis que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{5}$.
2. Étude de la fonction g
 - a. Étudier les variations de g sur I .
 - b. Calculer $g(0,8)$ et $g(0,9)$.
En utilisant l'inégalité des accroissements finis, prouver que
$$|g(0,9) - g(\beta)| \leq 6 \cdot 10^{-3}.$$

En déduire que $g(\beta) \in I$.
 - c. Prouver que pour tout $x \in I$, $g(x)$ appartient aussi à I .
 - d. Montrer que pour tout $x \in I$, $|g(x) - a| \leq \frac{1}{5}|x - a|$.
3. Étude d'une suite d'approximation de a
Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 0,8$.

- a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{5} |u_n - a|$.
- b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leq \frac{1}{10} \times \frac{1}{5^n}$.
- c. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Japon juin 1995 ∞

EXERCICE 1

5 points

Dans un plan orienté $\mathcal{P}$ on considère un triangle direct ABC , isocèle et rectangle en A . On désigne par :

- E un point du segment $[BC]$, distinct de B et distinct de C ;
- B' le projeté orthogonal de E sur la droite (AB) ;
- C' le projeté orthogonal de E sur la droite (AC) .

1. Démontrer que $AB' = CC'$.
2. Dédire de 1. qu'il existe une rotation unique r telle que $r(A) = C$ et $r(B') = C'$, rotation dont on donnera la mesure de l'angle (comprise entre $-\pi$ et π).
3. a. Prouver que $r(B) = A$ et en déduire $(r \circ r)(B)$.
b. Quelle est la nature de l'application $r \circ r$?
c. Déterminer le centre Ω de r .
4. Montrer que les points A, B', C', Ω et E sont cocycliques.

EXERCICE 2

5 points

Une urne contient cinq boules blanches numérotées de 1 à 5, trois bleues numérotées de 6 à 8 et deux vertes numérotées 9 et 10.

On tire deux boules simultanément de l'urne. (On admet que tous les tirages sont équiprobables.)

1. Calculer la probabilité des évènements suivants
 - A : « les deux boules ont des numéros impairs »,
 - B : « les deux boules ont la même couleur »,
 - C : « les deux boules ont des numéros impairs et sont de la même couleur ».Les évènements A et B sont-ils indépendants?
2. Quelle est la probabilité des évènements :
 - D : « les deux boules sont de couleurs différentes »?
 - E : « les deux boules sont de couleurs différentes et portent des numéros impairs »?
3. On vient de tirer deux boules de couleurs différentes, quelle est la probabilité pour qu'elles portent des numéros impairs?

EXERCICE 3

5 points

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{8} \ln x - x \ln x.$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en prenant 2 cm comme unité graphique.

Partie A : Étude du signe de la dérivée de f

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Prouver que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique.
On note α cette solution.
Justifier que $1 \leq \alpha \leq 1,2$.
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Étude et représentation graphique de la fonction f

1. Calculer les limites de f en zéro et en $+\infty$.
Donner le tableau des variations de f .
2. Prouver que :
$$0 \leq f(\alpha) - f(1) \leq f'(1) \cdot (\alpha - 1) \leq 0,2 \cdot f'(1).$$

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Tracer la courbe (C).

EXERCICE 4

5 points

Dans le plan orienté, on considère deux droites orthogonales $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ et quatre points distincts A, B, C et D tels que :

$$\begin{aligned} &A \text{ et } C \text{ sont sur } (\mathcal{D}), \\ &B \text{ et } D \text{ sont sur } (\mathcal{D}'), \\ &AC = BD \text{ et } \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{aligned}$$

$[AC]$ et $[BD]$ n'ont pas même milieu.

1. Faire une figure et la compléter au fil des questions.
2. Justifier qu'il existe une rotation $\mathcal{R}_1$ qui transforme A en B et C en D.
Déterminer son angle α_1 et construire sur la figure son centre I. (On expliquera la construction.)
3. Justifier qu'il existe une rotation $\mathcal{R}_2$ qui transforme D en A et B en C.
Déterminer son angle α_2 et construire sur la figure son centre J. (On expliquera la construction.)
4. On désigne par M le milieu de $[AC]$ et N celui de $[BD]$.
Déterminer la nature du quadrilatère IMJN.
5. Soit P le point diamétralement opposé à I sur le cercle de diamètre $[AB]$, et Q le point diamétralement opposé à I sur le cercle de diamètre $[CD]$.
 - a. Déterminer les angles $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP} \right)$, $\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ} \right)$ et calculer les rapports $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$.
 - b. Préciser l'angle et le rapport de la similitude de centre I qui transforme A en P et C en Q.

Durée : 4 heures

❧ Baccalauréat S La Réunion juin 1995 ❧

EXERCICE 1

5 points

Un code antivol d'un autoradio est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre pouvant prendre l'une des dix valeurs 0, 1, ..., 9.

1.
 - a. Quel est le nombre de codes possibles?
 - b. Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres distincts deux à deux?
2. Après une coupure d'alimentation électrique, le propriétaire doit réintroduire le code pour pouvoir utiliser son autoradio.
Il sait que les quatre chiffres de son code sont 1, 9, 9 et 5, mais il a oublié l'ordre de ces chiffres.
 - a. Combien de codes différents peut-il composer avec ces 4 chiffres?
 - b. Si le premier code introduit n'est pas le bon, le propriétaire doit attendre 2 minutes avant de pouvoir tenter un second essai; le délai d'attente entre le second et le troisième essai est de 4 minutes, entre le troisième et le quatrième essai, il est de 8 minutes... (le délai d'attente double entre deux essais successifs).
Combien de codes le propriétaire peut-il introduire au maximum en 24 heures?

EXERCICE 2

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$; (unité graphique : 4 cm).
On appelle A et B les points d'affixes respectives i et $-i$.
À tout point M du plan d'affixe z différente de $-i$, on associe le point M' dont l'affixe z' est définie par

$$z' = \frac{z-i}{z+i}.$$

1. Calculer l'affixe z' du point M' associé au point M d'affixe $z = 2+i$. Préciser le module et un argument de z' . Placer les points M et M' dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
2. Dans cette question, M est un point quelconque du plan distinct de B.
Montrer que $OM' = \frac{MA}{MB}$. En déduire que, lorsque z est réel, M' appartient à un cercle que l'on précisera.
3. Dans cette question, M est un point quelconque du plan distinct de B.
Aux points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives $z_1 = \bar{z}$, (où $\bar{z}$ désigne le nombre conjugué de z), $z_2 = -z$ et $z_3 = \frac{1}{z}$, on associe les points M'_1, M'_2 et M'_3 d'affixes z'_1, z'_2 et z'_3 .
 - a. Montrer les relations $z'_1 = \frac{1}{\bar{z}'}$, $z'_2 = \frac{1}{z'}$ et $z'_3 = \frac{1}{z}$.
Exprimer les modules et arguments de z'_1, z'_2 et z'_3 en fonction du module et d'un argument de z' .
 - b. En utilisant ce qui précède, placer les points $M_1, M_2, M_3, M'_1, M'_2$ et M'_3 sur la même figure qu'au 1. dans le cas où $z = 2+i$.

EXERCICE 2**5 points****Enseignement de spécialité**

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

On désigne par :

r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$,

r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$,

r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$,

et par D et E les points tels que $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$.

1. Démontrer que $r_C \circ r_B \circ r_A$ est la symétrie centrale de centre B.

Préciser alors la position du point E.

2. On admet qu'il existe une seule similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B.

On nomme $\mathcal{S}$ cette similitude.

Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$, ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD})$.

En déduire que $\mathcal{S}(E) = D$.

3. Soit Ω le centre de la similitude $\mathcal{S}$.

Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE.

Construire Ω .

4. a. Démontrer que $\mathcal{S}$ transforme la droite (AC) en (CB).

b. Démontrer que l'image par $\mathcal{S}$ du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD]. En déduire que l'image de C par la similitude $\mathcal{S}$ est le point I milieu du segment [DE].

PROBLÈME**10 points**

Dans tout ce problème, $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln x$$

1. Étudier les variations de g . Préciser $g(1)$.
2. En déduire le signe de la fonction g sur chacun des intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

Partie B – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$$

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre x^2 en facteur) dans l'expression de $f(x)$.
Déterminer la limite de f en 0.
3. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2x}g(x)$.
En utilisant la partie A, étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. On nomme C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormé; unité graphique 5 cm. Tracer C_f .

Partie C – Résolution approchées d'équations

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0; 1]$ (on pourra étudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0; 1]$ par $h(x) = f(x) - x$).
On nomme α cette solution.
2. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une seule solution sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
On nomme β cette solution.
3. Déterminer un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} . En déduire un encadrement de α .

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Métropole juin 1995 ∞

EXERCICE 1

5 points

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

2. Soit K, L, M les points d'affixes respectives

$$z_K = 1 + i \quad ; \quad z_L = 1 - i \quad ; \quad z_M = -i\sqrt{3}.$$

Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Unité graphique : 4 cm. On complètera la figure dans les questions suivantes.

3. a. On appelle N le symétrique du point M par rapport au point L. Vérifier que l'affixe z_N du point N est : $2 + i(\sqrt{3} - 2)$.
b. La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C. Déterminer les affixes respectives z_A et z_C des points A et C.
c. La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ transforme le point M en le point D et le point N en le point B.
Déterminer les affixes respectives z_D et z_B des points D et B.
4. a. Montrer que le point K est le milieu des segments [DB] et [AC].
b. Montrer que : $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$.
c. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx.$$

1. Calcul de I

Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par

$$f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 2} \right).$$

- a. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$.
b. En déduire la dérivée f' de f .
c. Calculer la valeur de I.

2. Calcul de J et de K

- a. Sans calculer explicitement J et K, vérifier que : $J + 2I = K$.

- b. À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K , montrer que : $K = \sqrt{3} - J$.
- c. En déduire les valeurs de J et de K .

EXERCICE 2**5 points****Enseignement de spécialité**

L'objectif est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{et, pour } n \geq 1, u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

1. a. Soit f la fonction numérique définie sur $[0; 1]$ par

$$f(x) = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$$

Calculer la dérivée f' de f . En déduire u_0 .

- b. Calculer u_1 .

2. a. Prouver que la suite (u_n) est décroissante (on ne cherchera pas à calculer u_n).
En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- b. Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$ on a :

$$1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}.$$

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \quad (1)$$

Déterminer la limite de (u_n) .

3. Pour tout entier $n \geq 3$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$.

- a. Vérifier que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $u_n + u_{n-2} = I_n$.

Par une intégration par parties portant sur I_n , montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}.$$

- b. En déduire que pour tout entier $n \geq 3$ on a :

$$(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}. \quad (2)$$

- c. À l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite (nu_n) est convergente et calculer sa limite.

PROBLÈME**11 points**

L'objectif est de déterminer les droites tangentes à la fois à la courbe représentant la fonction logarithme népérien et à celle de la fonction exponentielle, puis d'étudier la configuration obtenue.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 1 cm.

On note :

Γ et C les courbes d'équations respectives : $y = e^x$ et $y = \ln x$;

T_a la tangente à la courbe Γ au point A d'abscisse a , a étant un nombre réel.

D_λ la tangente à la courbe C au point K d'abscisse λ , λ étant un nombre réel strictement positif.

Partie A

Dans cette partie, on cherche le lien entre des droites, tangentes aux deux courbes Γ et C et qui sont parallèles; puis à quelle condition une droite tangente à la courbe Γ est également tangente à la courbe C .

1. a. Déterminer une équation cartésienne de la droite T_a .
Déterminer de même une équation cartésienne de la droite D_λ .
b. Déterminer λ en fonction de a pour que les droites T_a et D_λ soient parallèles.
On notera b la valeur de λ ainsi obtenue, B le point de la courbe C d'abscisse b et D_b la tangente correspondante.
2. Montrer que les droites T_a et D_b sont confondues si et seulement si :

$$b = e^{-a} \quad \text{et} \quad (a+1)e^{-a} = a-1.$$

Partie B

Dans cette partie, on se propose d'étudier les solutions de l'équation :

$$(1) \quad e^{-x} = \frac{x-1}{x+1}.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie pour tout nombre réel x , $x \neq -1$, par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}e^x$.

1. a. Montrer que $f(x) = 1$ si et seulement si $e^{-x} = \frac{x-1}{x+1}$.
b. Étudier les variations de f sur $I = [0; +\infty[$ et la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
c. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet, dans I , une solution unique μ , et que μ appartient à l'intervalle $[1,5; 1,6]$.
2. a. Pour tout nombre réel x , différent de 1 et de -1 , calculer le produit $f(x) \times f(-x)$.
b. Dédire des questions précédentes que l'équation (1) admet deux solutions opposées.
c. Déterminer les tangentes communes aux courbes Γ et C .
d. Tracer dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes Γ et C . On rappelle que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Tracer également les tangentes communes T_μ et $T_{-\mu}$.
On prendra pour μ la valeur approchée 1,55.

Partie C**Étude géométrique du problème**

On considère l'application S du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$, y non nul, associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ avec

$$x' = -x \quad \text{et} \quad y' = \frac{1}{y}.$$

1. Déterminer $S(M')$. Montrer que, si le point M appartient à la courbe Γ , alors le point M' appartient aussi à la courbe Γ .
2. Soit A le point d'abscisse μ (μ étant le réel défini à la partie B. 1. c.) de la courbe Γ ; T_μ , est donc tangente à la courbe Γ au point A et tangente à la courbe C au point B d'abscisse $e^{-\mu}$.
 - a. Déterminer en fonction de μ les coordonnées de $A' = S(A)$.
 - b. Vérifier que la droite $T_{-\mu}$ est tangente à la courbe Γ au point A' et qu'elle est aussi tangente à la courbe C en un point B_1 , dont on donnera les coordonnées en fonction de μ . Compléter la figure en plaçant les points A, B_1, A' et B .
3. a. Justifier les coordonnées suivantes :

$$A\left(\mu; \frac{\mu+1}{\mu-1}\right) \quad ; \quad B\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}; -\mu\right)$$

$$A'\left(-\mu; \frac{\mu-1}{\mu+1}\right) \quad \text{et} \quad B_1\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}; \mu\right).$$

- b. En déduire que les droites T_μ et $T_{-\mu}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Déterminer la nature du quadrilatère AB_1BA' .
4. Montrer que l'aire du domaine limité par le segment $[AA']$ et l'arc de la courbe Γ d'extrémités A et A' est égale à 2μ . On admettra que cet arc est situé en dessous du segment $[AA']$.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Polynésie juin 1995 ∞

EXERCICE 1

4 points

α étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; \pi]$ et z un nombre complexe, on considère le polynôme $P(z)$ défini par :

$$P(z) = z^3 - (1 - 2 \sin \alpha)z^2 + (1 - 2 \sin \alpha)z - 1.$$

1. a. Calculer $P(1)$.
- b. En déduire l'existence de trois nombres réels a, b, c tels que :

$$P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c).$$

Déterminer a, b, c .

- c. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.
2. On considère trois nombres complexes :

$$z_1 = 1 \quad ; \quad z_2 = -\sin \alpha + i \cos \alpha \quad ; \quad z_3 = -\sin \alpha - i \cos \alpha.$$

Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes z_1, z_2 et z_3 .

EXERCICE 2

4 points

Enseignement obligatoire

Un supermarché commercialise des gaufrettes vendues par paquets pour lesquels :

- dans 5 % des cas l'emballage n'est pas intact;
- dans 70 % des paquets d'emballage non intact, il y a au moins une gaufrette cassée;
- 90 % des paquets d'emballage intact ne contiennent aucune gaufrette cassée.

1. Un client achète au hasard un paquet de ces gaufrettes.

On note I l'évènement : « l'emballage est intact » et C l'évènement : « au moins une gaufrette est cassée ».

- a. Calculer la probabilité de I .

- b. On considère les évènements suivants :

E : « l'emballage n'est pas intact et aucune gaufrette n'est cassée »

F : « l'emballage est intact et aucune gaufrette n'est cassée ».

Exprimer E et F en fonction de $I, \bar{I}$ (évènement contraire de I) et $\bar{C}$ (évènement contraire de C).

Calculer alors les probabilités de E , de F .

En déduire la probabilité de $\bar{C}$ (évènement contraire de C) puis celle de C .

2. Lors d'une vente promotionnelle dans ce supermarché, ces gaufrettes sont vendues par lots de cinq paquets. Un client achète au hasard un tel lot. On suppose que les tirages des paquets formant un lot sont indépendants.

Quelle est la probabilité pour que dans ce lot il y ait au moins quatre paquets d'emballage intact?

Qu'il n'y ait aucune gaufrette cassée? On donnera les résultats à 10^{-4} près.

EXERCICE 2**4 points****Enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par M, N, P trois points distincts de ce plan d'affixes respectives m, n, p .

- Démontrer que le triangle MNP est rectangle en N si et seulement si le nombre complexe $i \frac{p-n}{m-n}$ est un réel non nul.
- Dans cette question M, N, P sont d'affixes respectives z, z^2, z^4 .
 - Quelles conditions doit vérifier z pour que M, N, P soient distincts deux à deux?
 - Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ du plan tels que le triangle MNP soit rectangle en N est une conique Γ d'équation $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}$, privée de deux points que l'on précisera.
- Préciser la nature de Γ et déterminer ses éléments géométriques (sommets, foyers, excentricité, asymptotes).
- Représenter Γ et mettre en place sur la figure les sommets, les foyers et les asymptotes de Γ .

PROBLÈME**12 points**

Le but du problème est d'étudier, dans un premier temps, la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \text{ pour } x > 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

puis de trouver une approximation de la solution de l'équation $f(x) = x$.

Partie A

Dans cette partie le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 2 cm. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans ce repère.

I- Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}.$$

- Étudier le sens de variation de g .
 - Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
 - En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $[0; +\infty[$.
- Montrer que pour tout x de l'intervalle $[2; 3]$, on a $g(x) < \frac{1}{2}$.

II.

1. a. Déterminer la limite, quand x tend vers zéro par valeurs strictement positives, de $x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right)$ (on pourra poser $x = \frac{1}{t}$) et démontrer que f est continue en $x = 0$.
 b. La fonction f est-elle dérivable en $x = 0$? Donner une interprétation graphique de ce résultat.
 c. Étudier le sens de variation de f (on vérifiera que $f(x) = g(x)$).
2. a. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) = 2$
 (on pourra utiliser le résultat : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$).
 b. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
3. Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ , la courbe $\mathcal{C}$ et la droite d'équation $y = x$.

Partie B

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle $[2; 3]$.

1. a. Soit h la fonction définie sur I par $h(x) = f(x) - x$. Montrer que pour tout x de I , $h'(x) < 0$ (on remarquera que $h'(x) = g'(x) - 1$).
 b. En déduire le sens de variation de h et montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans I ; on note α cette solution.
2. a. Montrer que pour tout x de I , $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$.
 b. En déduire que, pour tout x de I , $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.
3. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
 On admet que pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n appartient à l'intervalle I .
 a. Établir les inégalités suivantes :
 pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ (1)
 pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (2)
 b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite?
 c. Déterminer n_0 entier naturel tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
 En déduire alors une approximation de α à 10^{-3} près.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S La Réunion septembre 1995 ∞

EXERCICE 1

5 points

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

On désigne par r_A , r_B et r_C les rotations de centre A, B et C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Et par D et E les points tels que : $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$.

1. Démontrer que $r_C \circ r_B \circ r_A(A)$ est la symétrie centrale de centre B.

Préciser alors la position du point E.

2. On admet qu'il existe une seule similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$ qui transforme A en B.

On nomme $\mathcal{S}$ cette similitude.

Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD})$.

En déduire que $\mathcal{S}(E) = D$.

3. Soit Ω le centre de la similitude $\mathcal{S}$.

Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE. Construire Ω .

4. a. Démontrer que $\mathcal{S}$ transforme la droite (AC) en (CB).

- b. Démontrer que l'image par $\mathcal{S}$ du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD].

En déduire que l'image de C par la similitude $\mathcal{S}$ est le point I, milieu du segment [DE].

♻ Baccalauréat S Métropole septembre 1995 ♻

EXERCICE 1

4 points

Le président d'une association sportive constate que, chaque année, l'association garde 75 % de ces anciens adhérents et qu'il y a 800 nouveaux inscrits.

On suppose que l'évolution du nombre d'adhérents reste le même au fil des années. On se propose d'étudier cette évolution.

On note u_n le nombre d'adhérents au bout de n années. On sait qu'au démarrage de l'association il y avait 1 600 adhérents ($u_0 = 1\,600$).

1. Montrer que pour tout entier n ,

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 800.$$

2. On pose $v_n = 3\,200 - u_n$.

a. Calculer v_0 .

b. Vérifier que $v_{n+1} = 0,75v_n$.

Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

c. En déduire que $u_n = 3\,200 - 1\,600 \times (0,75)^n$.

Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Que peut-on en déduire concernant le nombre d'adhérents de l'association ?

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

2. Soit K, L, M les points d'affixes respectives :

$$z_K = 1 + i \quad ; \quad z_L = 1 - i \quad ; \quad z_M = -i\sqrt{3}.$$

Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Unité graphique : 4 cm. On complètera la figure dans les questions suivantes.

3. a. On appelle N le symétrique du point M par rapport au point L.
Vérifier que l'affixe z_N du point N est : $2 + i(\sqrt{3} - 2)$.
- b. La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C.
Déterminer les affixes respectives z_A et z_C des points A et C.
- c. La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2i$ transforme le point M en le point D et le point N en le point B.
Déterminer les affixes respectives z_D et z_B des points D et B.
4. a. Montrer que le point K est le milieu des segments [DB] et [AC].

- b. Montrer que : $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = 1$.
- c. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 2**5 points****Enseignement de spécialité**

Soit A et B deux points distincts du plan et G le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 2); (B, -1)\}$.

- Démontrer que le point A est le milieu du segment [GB].
- Montrer que l'ensemble Γ des points N tels que $\frac{NB}{NA} = \sqrt{2}$ est un cercle de centre G dont on précisera le rayon en fonction de AB.
- Soit C un point de Γ et $\mathcal{L}$ l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = 0.$$

- Montrer que le point C appartient à $\mathcal{L}$.
- En écrivant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}$, montrer que pour tout point M de $\mathcal{L}$, on a

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CG} = 0.$$

- Déterminer alors l'ensemble $\mathcal{L}$.

PROBLÈME**11 points**

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x+1)\ln|x-3|$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

($\mathcal{C}$) est la courbe représentant f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

Partie A : étude de la fonction f

- Préciser l'ensemble de définition D de f .
- a. Vérifier que si x appartient à D , alors :

$$f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|.$$

- Pour x appartenant à D , calculer $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f . En déduire les variations de f' .
- Calculer les limites de f' en $-\infty$ et en 3 à gauche.
- Montrer que f' s'annule sur $] -\infty; 3[$ pour une seule valeur α .
Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.
Étudier le signe de $f'(x)$ sur $] -\infty; 3[$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]3; +\infty[$.

- f. Dresser le tableau de variation de f .
3. Étudier les limites de f aux bornes de D . Préciser les asymptotes éventuelles à $(\mathcal{C})$.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et de l'axe des abscisses.
5. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie B : calcul d'une aire

$\mathcal{A}$ désigne l'aire en cm^2 de la région comprise entre la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

1. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout réel x différent de 3 :

$$\frac{x^2 + 2x}{3 - x} = ax + b + \frac{c}{3 - x}.$$

2. En déduire la valeur exacte de :

$$I = \int_{-1}^2 \frac{t^2 + 2t}{3 - t} dt.$$

3. Grâce à une intégration par parties, et en utilisant la question précédente, calculer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$.

œ Baccalauréat S Sportifs de haut-niveau œ
septembre 1995

EXERCICE 1

4 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(3; 2; -1)$ et $H(1; -1; 3)$.

1. Calculer la longueur AH.
2. Déterminer une équation du plan (P) passant par H et orthogonal à la droite (AH).
3. On donne les points : $B(-6; 1; 1)$, $C(4; -3; 3)$ et $D(-1; -5; -1)$.
 - a. Démontrer que les points B, C et D appartiennent au plan (P).
 - b. Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\vec{BC} \wedge \vec{BD}$.
 - c. Démontrer que l'aire du triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$.
 - d. Démontrer que le volume du tétraèdre ABCD est égal à $\frac{145}{3}$.
4.
 - a. Calculer l'aire du triangle ABC.
 - b. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

PROBLÈME

points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) &= \frac{3}{2} \\ f(x) &= 2x \ln x - \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2} \text{ pour } x > 0 \end{cases}$$

(ln désigne le logarithme népérien). Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Première partie : Étude d'une fonction auxiliaire et de ses zéros

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 \ln x - x + 1.$$

1. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de g .
Étudier les variations de g .
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]0; +\infty[$ deux solutions 1 et α .
En déduire le signe de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. À l'aide de la calculatrice vérifier que :

$$3,5 \leq \alpha \leq 4.$$

Deuxième partie : Étude de f

1. Soit f' la fonction dérivée de f . Vérifier que $f' = g$. Étudier les variations de f sur $]0; +\infty[$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

- a. Montrer que f est continue en zéro.
- b. Calculer la limite de $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ lorsque x tend vers zéro par valeur strictement positives.
Que peut-on en conclure?
2. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]0; +\infty[$ deux solutions 1 et β .
- b. Justifier les inégalités : $5 \leq \beta \leq 6$.
3. La tangente (D) à la courbe ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse 5 a pour équation $y = h(x)$.
- a. Calculer $h(x)$ et étudier les variations de la fonction Δ définie sur $]5; +\infty[$ par :

$$\Delta(x) = f(x) - h(x).$$

En déduire que pour $x \geq 5$ on a $f(x) \leq h(x)$.

- b. Soit γ l'abscisse du point d'intersection de (D) et de l'axe Ox. Calculer γ et prouver que $\beta \leq \gamma$.
4. Rassembler dans un tableau les résultats obtenus sur f .
Tracer la droite (D) et la courbe ($\mathcal{C}$) représentative de f dans un repère orthonormal d'unité 2 centimètres.

∞ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 1995 ∞

EXERCICE 1

4 points

On tire trois boules simultanément et au hasard d'une urne contenant trois boules blanches, trois noires, trois vertes et trois rouges. On suppose l'équiprobabilité des tirages.

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. X est la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules blanches obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de X .

2. Pour gagner il faut tirer au moins deux boules blanches, mais on estime qu'un joueur sur dix est un tricheur et qu'un tricheur gagne avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$.

On note :

T l'évènement « être un tricheur »,

$\overline{T}$ l'évènement contraire de T ,

G l'évènement « gagner au jeu ».

- a. Calculer la probabilité de l'évènement « gagner pour un non tricheur » c'est-à-dire $p_{\overline{T}}(G)$.

En déduire la probabilité de l'évènement $G \cap \overline{T}$.

- b. Calculer $p(T \cap G)$.

- c. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est $\frac{181}{1100}$.

- d. Calculer la probabilité qu'une personne qui a gagné soit un tricheur.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

On pose pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx,$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien et :

$$I_0 = \int_1^e x^2 dx.$$

1. Calculer I_0 .
2. En utilisant une intégration par parties, calculer I_1 .
3. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3.$$

En déduire I_2 .

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, I_n est positive.

- b. Dédurre de l'égalité (1) que, pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n \leq \frac{e^3}{n+1}.$$

- c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement de spécialité

Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1,5 cm). f est l'application du plan P , privé du point O , dans P qui à tout point M d'affixe z ($z \neq 0$) associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z^2 - 4}{2z}.$$

1. a. Démontrer que, si $z \neq 2i$ on a :

$$\frac{z' + 2i}{z' - 2i} = \left(\frac{z + 2i}{z - 2i} \right)^2.$$

- b. On désigne par A et B les points d'affixes respectives $2i$ et $(-2i)$. Justifier que :

$$(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad (2\pi)$$

puis que

$$\frac{M'B}{M'A} = \left(\frac{MB}{MA} \right)^2.$$

2. Soit I le point d'affixe $z_I = -4 + 2i$.

- a. Déterminer $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ et $\frac{IA}{IB}$.

- b. Déterminer et construire l'ensemble E défini par :

$$E = \left\{ M / M \in P \text{ et } \frac{MAB}{MA} = 2 \right\}.$$

- c. En utilisant les questions précédentes, construire le point l'image de I par f .

PROBLÈME

11 points

Objectif du problème : Résolution d'une équation différentielle et étude d'une de ses solutions.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}. \quad (E)$$

1. Déterminer le réel λ tel que la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = \lambda x^2 e^{-x}$ soit solution de l'équation (E).

2. Démontrer que y , fonction numérique deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si et seulement si la fonction z définie par $z = y - y_0$ est solution de l'équation différentielle (E) :

$$z'' + 2z' + z = 0.$$

3. Résoudre l'équation différentielle (E_1) .
 4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
 5. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par le point de coordonnées $(-1; 0)$ et admet en ce point une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.
 - a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
 - b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
 - c. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations,
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
3. On se propose dans cette question d'étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à (T).
 - a. On pose $k(x) = x + 1 - e^x$.
Calculer $k'(x)$; en déduire le sens de variation de k et son signe.
 - b. En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à (T).
4. Après avoir reproduit et complété le tableau de valeurs ci-dessous, tracer (T) et $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

x	-2	-0,5	-0,25	0,5	1	2	3	4	6
$f(x)$									

Les valeurs de $f(x)$ seront données à 10^{-2} près.

5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 4 \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

- a. Représenter u_3 sur le graphique précédent.
- b. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$4f(n+1) \leq u_n \leq 4f(n).$$

En déduire le sens de variation de (u_n) .

- c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

⌘ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ⌘
novembre 1995

EXERCICE 1

4 points

Soit ABCD un quadrilatère, I le milieu de [AC], J le milieu de [BD]. Soit K le point tel que $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$, L le point tel que $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$, et M le milieu de [LK].

Le but du problème est de montrer que M, I, J sont alignés et de donner la position de M sur la droite (IJ).

1. Justifier l'existence du barycentre G du système :

$$\{(A, 1), (B, 2), (C, 1), (D, 2)\}.$$

En regroupant les points de différentes façons, montrer que G appartient aux deux droites (KL) et (IJ).

2. Montrer que G est en M, que M, I, J sont alignés et donner la position de M sur (IJ).
3. Faire une figure soignée où tous les points considérés seront reportés.

EXERCICE 2

4 points

Enseignement obligatoire

On note $\mathcal{P}$ le plan complexe et $\mathcal{P}^*$ ce plan privé du point A d'affixe $3 - i$. On note f l'application de $\mathcal{P}^*$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{2iz - 4 + 2i}{z - 3 + i}.$$

1. Calculer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $1 + i$.
2. Calculer l'affixe du point Q dont l'image est le point Q' d'affixe $1 + i$.
3. Déterminer et représenter les ensembles de points M d'affixe z tels que :
 - a. z' soit réel
 - b. z' soit imaginaire pur
 - c. z' soit de module 2.

EXERCICE 2

4 points

Enseignement de spécialité

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et représente l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. Montrer que les images des solutions sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O.
2. On considère la transformation s de $\mathcal{P}$ dont l'expression complexe est $z' = i\sqrt{2}(2z + 1)$.
 - a. Déterminer la nature géométrique de s et préciser ses éléments.

- b. On pose $A = s(\alpha)$, $B = s(\beta)$, $C = s(\gamma)$, où α, β, γ sont les trois points d'affixes respectives $1, e^{-\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Montrer que ABC est un triangle équilatéral et déterminer l'affixe de son centre Ω .
3. Soit F le point d'affixe 2 et D la droite d'équation $x = 3$. Pour tout point M de $\mathcal{P}$, on appelle H son projeté orthogonal sur la droite D.
- a. Montrer que l'ensemble (E) des points M de $\mathcal{P}$ vérifiant $3MF^2 = 2MH^2$ est une conique passant par B, C et Ω , dont on précisera la nature.
- b. En déduire sans calculs le centre et les sommets de (E).
- c. Tracer sur une même figure le triangle ABC et la conique (E) (unités : 2 cm).

PROBLÈME**4 points****Les trois parties du problème peuvent être traitées séparément****Partie A**

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - 4y' + 4y = 0.$$

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer les solutions de (E) dont la dérivée s'annule en 0.
3. Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative (C) dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ admet une tangente horizontale en A, point de coordonnées (0 ; 1).

Partie BOn considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (1 - 2x)e^{2x}.$$

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$, étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variations de f .
3. Tracer la courbe représentative ($\mathcal{C}$) de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 2 cm).
4. Calculer, en cm^2 , l'aire de la partie du plan comprise entre les droites d'équations $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ et la courbe ($\mathcal{C}$). On utilisera une intégration par parties.

Partie CLa fonction f est toujours celle définie dans la partie B.On note $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$, ..., $f^{(n)}$ les dérivées successives de f .

1. Calculer $f^{(2)}(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
2. Montrer par récurrence sur l'entier non nul n , que

$$f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}.$$

3. Pour tout entier n non nul, la courbe représentative de $f^{(n)}$ admet une tangente horizontale en un point M_n .
- a. Calculer les coordonnées x_n et y_n de M_n . Vérifier que les points M_n appartiennent à la courbe (Γ) d'équation

$$y = \frac{e^{2x}}{4^x}.$$

- b. Vérifier que la suite (x_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison. Étudier la limite de la suite (x_n) .
- c. Vérifier que la suite (y_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. Étudier la limite de la suite (y_n) .

🌀 Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 1996 🌀

EXERCICE 1

points

On note $\mathcal{P}$ le plan complexe et $\mathcal{P}^*$ ce plan privé du point A d'affixe $3 - i$.

On note f l'application de $\mathcal{P}^*$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{2iz - 4 + 2i}{z - 3 + i}.$$

1. Calculer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $1 + i$.
2. Calculer l'affixe du point Q dont l'image est le point Q' d'affixe $1 + i$.
3. Déterminer et représenter les ensembles de points M d'affixe z tels que :
 - a. z' soit réel
 - b. z' soit imaginaire pur
 - c. z' soit de module 2.

EXERCICE 2

points

Enseignement obligatoire

Soit ABCD un quadrilatère, I le milieu de $[AC]$, J le milieu de $[BD]$. Soit K le point tel que $\vec{KA} = -2\vec{KB}$, L le point tel que $\vec{LC} = -2\vec{LD}$, et M le milieu de $[LK]$.

Le but du problème est de montrer que M, I, J sont alignés et de donner la position de M sur la droite (IJ).

1. Justifier l'existence du barycentre G du système :

$$(A, 1), (B, 2), (C, 1), (D, 2).$$

En regroupant les points de différentes façons, montrer que G appartient aux deux droites (KL) et (IJ).

2. Montrer que G est en M, que M, I, J sont alignés et donner la position de M sur (IJ).
3. Faire une figure soignée où tous les points considérés seront reportés.

EXERCICE 2

points

Enseignement de spécialité

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et représente l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.
Montrer que les images des solutions sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O.
2. On considère la transformation s de $\mathcal{P}$ dont l'expression complexe est

$$z' = i\sqrt{2}(2z + 1).$$

- a. Déterminer la nature géométrique de s et préciser ses éléments.
- b. On pose $A = s(\alpha)$, $B = s(\beta)$, $C = s(\gamma)$, où α, β, γ sont les trois points d'affixes respectives $1, e^{-\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Montrer que ABC est un triangle équilatéral et déterminer l'affixe de son centre Ω .
3. Soit F le point d'affixe 2 et D la droite d'équation $x = 3$.
Pour tout point M de $\mathcal{P}$ on appelle H son projeté orthogonal sur la droite D.
 - a. Montrer que l'ensemble (E) des points M de $\mathcal{P}$ vérifiant $3MF^2 = 2MH^2$ est une conique passant par B, C et Ω , dont on précisera la nature.
 - b. En déduire sans calculs le centre et les sommets de (E).
 - c. Tracer sur une même figure le triangle ABC et la conique (E) (unités : 2 cm).

PROBLÈME**points****Partie A.**

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x$$

et on appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations de f .
Préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x .
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

Partie B.

Dans cette partie on se propose d'étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par

$$g(x) = \ln \left| e^{\frac{x}{2}} - e^x \right|.$$

On note Γ la courbe représentative de g dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Préciser les limites de g en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0.
2. Calculer $g'(x)$ et déterminer le signe de $g'(x)$ en utilisant le signe de $f'(x)$ et le signe de $f(x)$.
Dresser le tableau de variations de g .
3. Démontrer que pour tout x réel strictement positif :

$$g(x) - x = \ln \left(1 - e^{-\frac{x}{2}} \right).$$

Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe Γ .

Étudier la position de la courbe Γ par rapport à D pour tout x réel strictement positif.

4. Démontrer que pour tout x réel strictement négatif :

$$g(x) - \frac{x}{2} = \ln \left(1 - e^{\frac{x}{2}} \right).$$

Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe Γ .

Étudier la position de Γ par rapport à Δ pour tout x réel strictement négatif.

5. Construire Γ , D et Δ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (On utilisera un graphique différent de celui de la partie A.)