Baccalauréat STL Polynésie 14 mars 2023

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Physique-Chimie et Mathématiques

EXERCICE 1 4 points

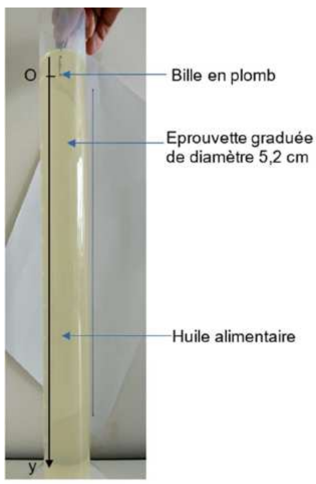
Chute verticale dans un fluide visqueux

Cet exercice propose de modéliser la chute verticale d'une bille de plomb dans une huile alimentaire.

Données :

- Les actions exercées par le fluide sur la bille sont modélisées par une force de frottement fluide : $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta r\overrightarrow{v}$ dans laquelle η est la viscosité du fluide, r est le rayon de la bille et $\overrightarrow{v}$ le vecteur vitesse de la bille;
- intensité de la pesanteur : $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$;
- intervalle des valeurs courantes de la viscosité η d'une huile alimentaire : entre 60 et 100 mPa · s.

Une bille de plomb de rayon $r = 1{,}03$ mm et de masse $m = 0{,}056$ g est lâchée à $t = 0$ s sans vitesse initiale dans une huile alimentaire (photo ci-dessous).
On nomme $v(t)$ la valeur de la vitesse de la bille, exprimée en $m \cdot s^{-1}$, à l'instant exprimé en seconde.
L'axe Oy est orienté suivant la verticale descendante.



Le pointage des positions successives de la bille permet de tracer l'évolution de sa vitesse en fonction du temps :

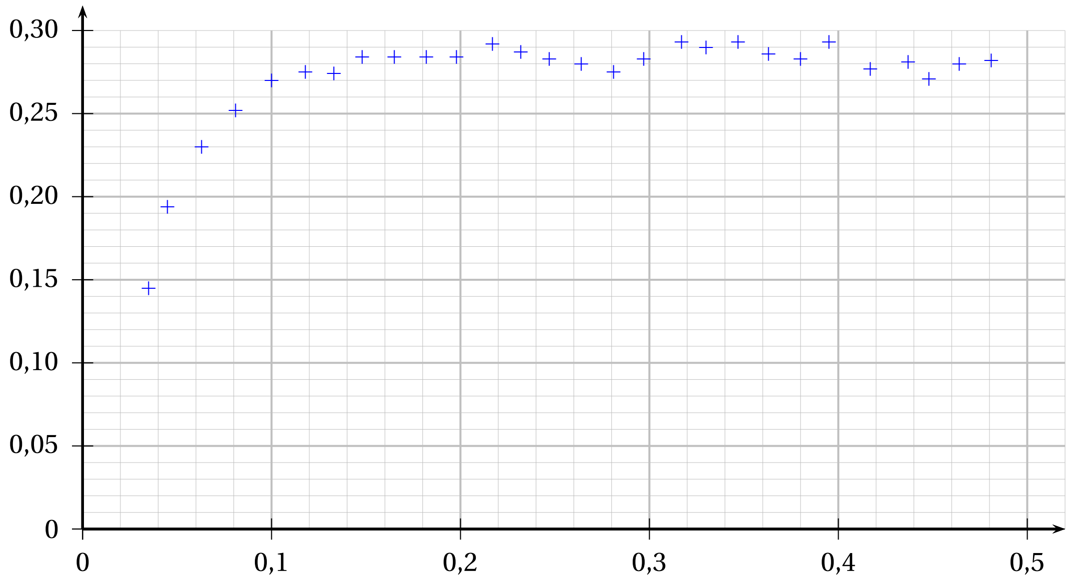


Figure 1

1. Justifier, à partir des résultats de la figure 1, que la chute de la bille n'est pas une chute libre.

2. Estimer graphiquement la valeur de la vitesse de chute de la bille en régime permanent.

Pour la suite de l'exercice, on prendra comme valeur de la viscosité de l'huile alimentaire $\eta = 80 \times 10^{-3}$ Pa $\cdot$ s.

3. En considérant le système bille dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, écrire l'expression vectorielle de la seconde loi de Newton.

4. En déduire, par projection de la deuxième loi de Newton sur l'axe (Oy), que la vitesse de chute de la bille doit vérifier l'égalité :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{6\pi\eta r}{m} v + g$$

Étude mathématique de la vitesse

On souhaite déterminer une expression de la vitesse de la chute de la bille. Les données physiques de l'expérience conduisent à résoudre l'équation différentielle (E) :

$$y' = -27{,}7\,y + 9{,}81.$$

5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

6. Montrer que l'unique solution v de l'équation différentielle (E) qui vérifie $v(0) = 0$ est définie par l'expression : $v(t) = \dfrac{9{,}81}{27{,}7} \times \left(1 - \mathrm{e}^{-27{,}7t}\right)$.

7. Calculer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} v(t)$.

Analyse du modèle obtenu

Dans cette expérience, la valeur de la vitesse de la bille, exprimée en $m \cdot s^{-1}$, en fonction du temps t exprimé en s, est donnée par la fonction v définie sur $[0\,;\,0{,}5]$ dont l'expression est :

$$v(t) = 0{,}35 \times \left(1 - \mathrm{e}^{-27{,}7t}\right).$$

8. Vérifier la cohérence de l'ordre de grandeur de la limite obtenue à la question 7 avec celui de la vitesse en régime permanent estimée à la question 2. Proposer une justification à l'écart observé.

EXERCICE 3 4 points

(MATHÉMATIQUES)

La fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{0,02x} - 10\,000$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2. On note f' la fonction dérivée de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Justifier que pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = (1 + 0,02x)\,\mathrm{e}^{0,02x}$.

3. En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

« Tout nombre réel x, compris entre 0 et 1 000, a une image négative par f. »

5. Quatre fonctions A, B, C et D sont écrites dans le même programme Python ci-dessous.

Laquelle de ces quatre fonctions permet de déterminer la plus petite valeur entière dont l'image par f est positive ?

```
from math import exp
def A( ) :
    n = 0
    return n * exp(0.02 * n) – 10000

def B( ) :
    n = 0
    f = – 10000
    while f < 0 :
        n = n + 1
        f = n * exp(0.02 * n) – 10000
    return n

def C( ) :
    f = – 10000
    for n in range(0,1000) :
        f = n * exp(0.02 * n) – 10000
return f

def D( ) :
    n = 0
    f = – 10000
    if f < 0 :
        n = n + 1
        f = n * exp(0.02 * n) – 10000
return n
```