

∞ Baccalauréat C international juin 1989 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et tout point M de coordonnées $(x; y)$ est repéré par son affixe $z = x + iy$.

On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $-1; 1; \frac{1}{2}$ et 2.

À tout point m du plan d'affixe z , $z \neq 2$, on associe le point M d'affixe Z tel que :

$$Z = \frac{2z-1}{2-z}.$$

1. Déterminer l'ensemble E des points m d'affixes z tels que $|Z| = 1$.
2. Déterminer l'ensemble F des points m d'affixe z tels que $\arg Z = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
3. Tracer les ensembles E et F dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.
4. Exprimer, en fonction de z , le complexe $U = \frac{Z-1}{Z+1}$.
En déduire que les quatre points A, B, m , M sont cocycliques ou alignés.

EXERCICE 2

4 POINTS

Dans le plan orienté, ABCD et AEFG sont deux carrés tels que $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ et $(\vec{AE}, \vec{AG}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

On désigne par M, N, P et Q les milieux respectifs des segments [BD], [DE], [EG], [GB].

1. Montrer que MNPQ est un parallélogramme.
2. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Déterminer l'image du segment [BE] par cette rotation R .
En déduire que MNPQ est un carré.
3. On désigne par l et m les longueurs respectives des côtés des carrés ABCD et AEFG. On pose $(\vec{AB}, \vec{AE}) = \alpha$, $\alpha \in [0; 2\pi[$.
 - a. Exprimer, en fonction de l , m et α , la longueur des côtés du carré MNPQ.
 - b. Déterminer α pour que l'aire du carré MNPQ soit maximale.

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

L'objet de cette partie est l'étude de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x),$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal

1. On considère la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\varphi(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

- a. Déterminer la dérivée φ' de la fonction φ .
 b. Donner le sens de variation de φ puis le signe de φ .
2. Soit f' la dérivée de la fonction f .

- a. Montrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = e^{-x} \left[\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) \right].$$

- b. En utilisant le 1., étudier le sens de variation de la fonction f .
3. a. Montrer que, pour tout réel x ,

$$f(x) = xe^{-x} + e^{-x} \ln(1+e^{-x}).$$

En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- b. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

(On rappelle que $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$.)

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer la courbe \mathcal{C} .

Partie B

L'objet de cette deuxième partie est l'étude d'une suite définie à partir de f .
 Les calculs seront effectués à la calculatrice.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution notée α . Montrer que $0,5 \leq \alpha \leq 0,6$.
 2. Démontrer que pour tout réel x tel que $0,5 \leq x \leq 0,6$, on a les deux encadrements :

$$0,5 \leq f(x) \leq 0,6 \quad \text{et} \quad -0,25 \leq f'(x) \leq 0$$

3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,5 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$$

- a. Démontrer que, pour tout nombre entier n ,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,25 |u_n - \alpha|$$

puis $|u_n - \alpha| \leq (0,25)^n \times 0,1$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

- b. Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout entier n supérieur à n_0 ,
 $|u_n - \alpha| \leq 5 \cdot 10^{-4}$.

Partie C

L'objet de cette partie est l'étude d'une primitive de f .

1. Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

2. Soit x un réel positif. En utilisant la question précédente calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Interpréter graphiquement $I(x)$. Déterminer la limite de $I(x)$ quand x tend vers $+\infty$.