Baccalauréat blanc TS 29 février 2008
Lycée Pierre Mendès-France Tunis

L'utilisation de la calculatrice est autorisée. Le candidat est invité à faire figurer sur sa copie toute trace de recherche, même incomplète, qu'il aura développée. Il est rappelé que la présentation, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **7 points**

Partie A : restitution organisée de connaissances

Prérequis : on utilisera exclusivement les résultats rappelés ci-dessous

a. la forme algébrique des nombres complexes et les règles de calcul correspondantes,

b. la définition de l'exponentielle complexe : pour tout réel θ, $\quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

c. les formules d'addition suivantes : pour tous réels θ et θ',

$$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \text{ et } \sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$$

1. Démontrer que pour tous réels θ et θ', $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$.

2. En déduire que pour tout réel θ et pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Partie B : construction d'un pentagone régulier

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 4 cm. On. pose

$$w = e^{i\frac{2\pi}{5}}.$$

1. Simplifier w^5 puis calculer $1 + w + w^2 + w^3 + w^4$.

2. Montrer que pour tout nombre complexe z non nul,

$$\frac{1}{z^2}\left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4\right) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1.$$

3. **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$.

b. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

4. On note K, A et B. les points d'affixes respectives $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}i$ et w.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre K passant par A.

a. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.

b. Le cercle $\mathscr{C}$ coupe l'axe $\left(O\ ;\ \vec{u}\right)$ en deux points H et H′ (H étant d'abscisse positive).
Montrer que H a pour abscisse $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

c. En déduire une construction géométrique simple du point B.

d. Achever la construction du pentagone régulier de centre O dont B est un sommet (expliquer et justifier).

Exercice 2 **5 points**

Réservé aux élèves n'ayant pas choisi la spécialité Mathématiques

On considère l'équation différentielle

$$(R) \quad : \quad y - y' = \frac{e^x}{x^2}$$

et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. **a.** Démontrer que la fonction u définie sur $]0~;~+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ est solution de (E).

   b. Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0~;~+\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v-u$, définie sur $]0~;~+\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.

   c. En déduire toutes les solutions définies sur $]0~;~+\infty[[$ de l'équation (E).

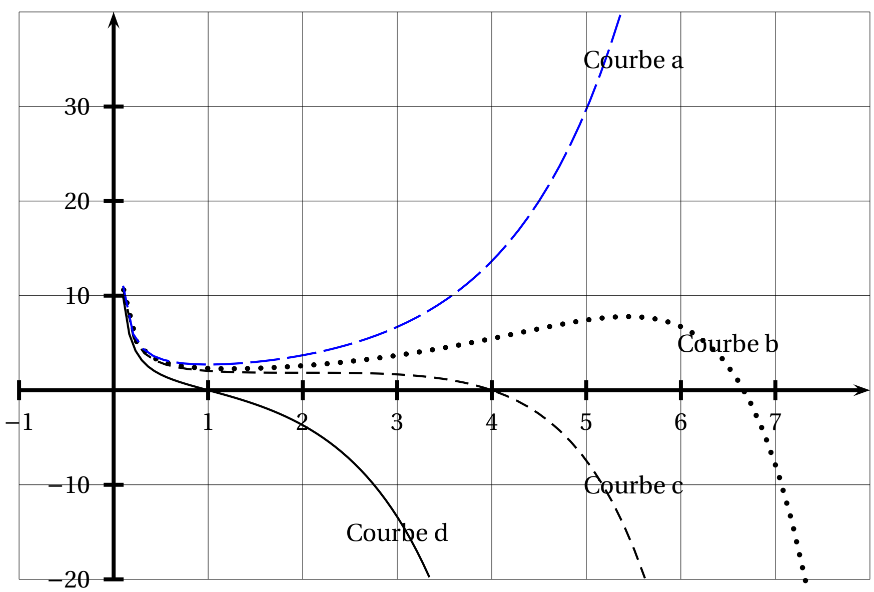
2. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}\mathrm{e}^x.$$

   a. Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

   b. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et déterminer le nombre de solutions sur $]0~;~+\infty[$ de l'équation $f_k(x) = 0$.

3. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   On a tracé sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_{-0,25}$, $\mathscr{C}_{-0,15}$ et $\mathscr{C}_0$.
   En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).



Exercice 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant : étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si $\text{PGCD}(a~;~b) = 1$ alors $\text{PGCD}\left(a^2~;~b^2\right) = 1$.

La suite (S_n) est définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3.$$

On se propose de déterminer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, $S_n = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

2. Étude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.
   a. Démontrer, que $\text{PGCD}(S_{2k}\ ;\ S_{2k+1}) = (2k+1)^2\text{PGCD}\left(k^2\ ;\ (k+1)^2\right)$.
   b. Montrer que k et $k+1$ sont premiers entre eux.
   c. En déduire $\text{PGCD}(S_{2k}\ ;\ S_{2k+1})$.
3. Étude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.
   a. Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.
   b. Déterminer $\text{PGCD}(S_{2k+1}\ ;\ S_{2k+2})$.
4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 3 **2 points**

Pour chacune des deux affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soit f une solution de l'équation différentielle $y' = -2y+2$, f n'étant pas une fonction constante.
   Affirmation 1 : la représentation graphique de f dans un repère du plan, n'admet aucune tangente parallèle à l'axe des abscisses.
2. Soit g la fonction, définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}\ln x$ si $x > 0$ et $g(0) = 0$.
   Affirmation 2 : la fonction g est dérivable en zéro.

Exercice 4 **6 points**

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $\varphi : x \longmapsto \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$.
2. Soit n un entier naturel non nul, n étant fixé pour cette question. On définit la fonction f, sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}$$

   a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
   b. Calculer la dérivée de f_n sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   c. Dresser le tableau de variations de f_n.
   d. En déduire que l'équation d'inconnue x, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $[0\ ;\ +\infty[$.
   e. Justifier que $0 < \alpha_n < 1$.
3. Prouver que pour tout entier naturel n non nul, $\ln\left(\alpha_n^2+1\right) = 2n(1-\alpha_n)$.
   En déduire que $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.
4. Étude de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}*}$
   a. À l'aide de la calculatrice, proposer sans justification, des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de α_1, α_4 et α_{10}.
   b. Démontrer que la suite (α_n) est croissante.
   c. En. déduire qu'elle est convergente..
   d. *Dans cette dernière question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la limite de cette suite.