T$^{\text{ALES}}$S - Bac Blanc (4 H) - Le 27/02/2008 - Énoncé

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées.

- Si vous **n'avez pas choisi** l'enseignement de spécialité, vous devez traiter les exercices 1, 2, 3 et 4.
- Si vous **avez choisi** l'enseignement de spécialité, vous devez traiter les exercices 1, 2, 3 et 5.

La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

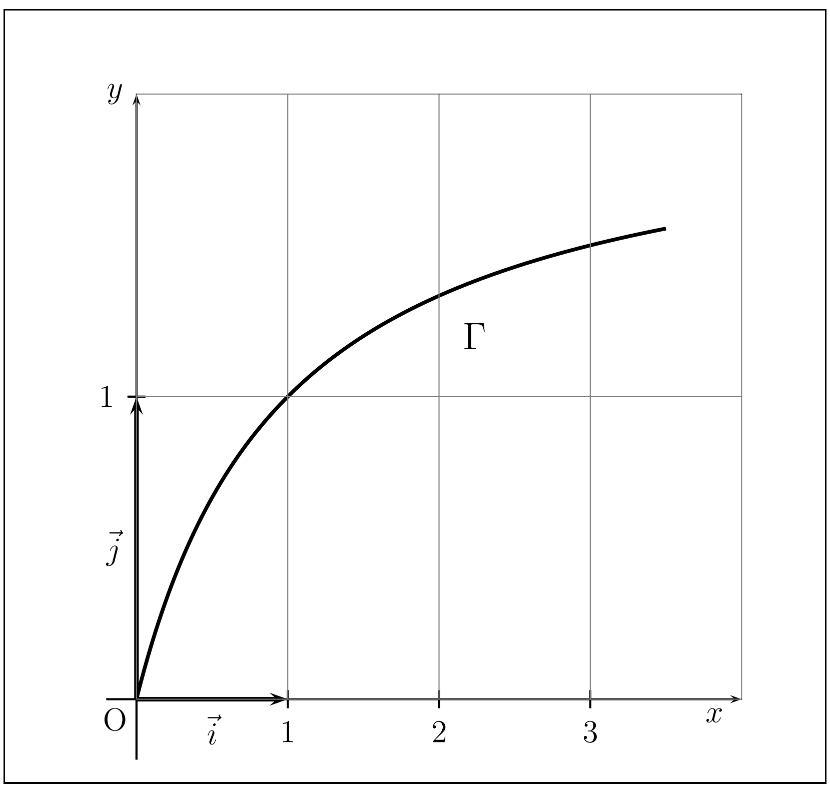
Cet énoncé est à remettre avec la copie.

Exercice 1. (3 points) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{4}{4 - u_n} \end{cases}$$

1/ a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Le graphique ci-dessous représente sur $[0\,;+\infty[$ et dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{2x}{x+1}$.



Placer sur le graphique les points de coordonnées (k, u_k) pour $k = 0$, 1, 2 et 3.

2/ Déduire de la question précédente une conjecture de l'expression de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture.

Exercice 2. (7 points) Soit l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$$

où y est une fonction de la variable x, dérivable sur $\mathbb{R}$.

1/ f est la solution de (E) vérifiant $f(0) = -1$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

a) Calculer $f'(0)$.

b) En déduire une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

2/ Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.

a) Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.

b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$g'(x) = (2-x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

puis que g est solution de (E).

c) Dresser le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}$.

d) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

3/ Soit l'équation différentielle :

$$(F) : y'' + 2\,y' + y = 0$$

où y est une fonction de la variable x, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Vérifier que g est solution de (F).

b) Montrer que si φ est solution de (E) alors φ est solution de (F).

c) Pour quelle valeur du réel a, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$ est-elle solution de (F) ?

d) Peut-on dire que si φ est solution de (F) alors φ est solution de (E) ? Justifier la réponse.

Exercice 3. (4 points) *Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Les quatre questions sont indépendantes. Pour chaque question, il y a deux conclusions correctes. Vous devez indiquer sur votre feuille de copie* ***les deux réponses*** *que vous jugez correctes. Aucune justification n'est demandée.*

Chaque réponse exacte rapporte $0,5$ *point. Chaque réponse fausse enlève* $0,25$ *point. Une abstention ne rapporte aucun point tout comme si plus de deux réponses sont proposées. Un total des points négatif sera ramené à zéro.*

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) qui vérifient la propriété suivante :

$$\text{Pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif : } u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

1/ Si la suite (v_n) tend vers $-\infty$ alors :

a) la suite (w_n) tend vers $-\infty$

b) la suite (u_n) est majorée

c) la suite (u_n) tend vers $-\infty$

d) la suite (w_n) n'a pas de limite

2/ Si $u_n \geqslant 1$, $w_n = 2\,u_n$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$) alors :

a) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \ell$

b) la suite (w_n) tend vers $+\infty$

c) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (w_n - u_n) = \ell$

d) on ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non

3/ Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = -2$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} w_n = 2$, alors :

a) la suite (v_n) est majorée

b) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = 0$

c) la suite (v_n) n'a pas de limite

d) on ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non

4/ Si $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2 + 3}{n^2}$, alors :

a) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} w_n = 0$

b) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = 2$

c) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 2$

d) la suite (v_n) n'a pas de limite

Exercice 4. (6 points) ***Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.***

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique. On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :

$$a = \frac{3}{2} + 6\mathrm{i} \qquad b = \frac{3}{2} - 6\mathrm{i} \qquad c = -3 - \frac{1}{4}\mathrm{i} \qquad p = 3 + 2\mathrm{i}$$

1/ *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*

Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M$'$ par l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport $k \in \mathbb{R}$ sont liées par la relation :

$$z' - \omega = k\,(z - \omega)$$

2/ a) Déterminer l'affixe q du point Q, image du point B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $-1+\frac{5}{2}\mathrm{i}$.

b) Déterminer l'affixe r du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

c) Déterminer l'affixe s du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

d) Placer les points A, B, C, P, Q, R et S.

3/ a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

b) Calculer le rapport $\dfrac{r-q}{p-q}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.

c) En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.

4/ Démontrer que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathscr{C}$ dont on précisera l'affixe du centre et le rayon.

5/ La droite (AP) est-elle tangente à $\mathscr{C}$? Justifier la réponse.

Exercice 5. (4 points)

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématiques

On rappelle le (petit) théorème de Fermat :

si p est un nombre premier qui ne divise pas l'entier naturel a, alors on a la congruence

$$a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$$

Partie A

1/ a) Prouver que 29 est un nombre premier.

b) Soit $x \in \mathbb{N}$ et n un entier naturel tel que $n \equiv 1 \mod 28$.

En utilisant le théorème de Fermat, prouver que $x^n \equiv x \quad [\,]\, 29$.

2/ On considère l'équation (E) : $17x - 28y = 1$ où $(x,\ y) \in \mathbb{Z}^2$. a) Quel théorème permet d'affirmer que l'équation (E) admet au moins un couple solution d'entiers relatifs ? b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver un tel couple solution.

Partie B

Soit $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{N},\ x < 29\} = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ ...\ ;\ 28\}$

Pour $x \in \mathrm{A}$, on note $f(x)$ le reste de la division euclidienne de x^{17} par 29 et $g(x)$ le reste de la division euclidienne de x^5 par 29.

3/ a) Prouver que $f(x) \in \mathrm{A}$ et $x^{17} \equiv f(x) \mod 29$.

On admettra (la démonstration est analogue) que $g(x) \in \mathrm{A}$ et $x^5 \equiv g(x) \mod 29$.

b) Pour $x \in \mathrm{A}$, prouver que $g[f(x)] = x$.

4/ Applications :

On attribue à chaque lettre de l'aphabet et aux deux signes « + » et « − », l'entier donné par le tableau ci-dessous :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	+	−
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

a) Bob code le mot « GAUSS » à l'aide de la fonction f et envoie le message codé à Alice.

Voici le codage des deux premières lettres « G » et « A » :

Message initial	G	A
Entier associé	7	1
Utilisation de f	$7^{17} \equiv 24 \mod 29$	$1^{17} \equiv 1 \mod 29$
Message codé	X	A

Compléter son message.

b) Alice reçoit le message suivant, codé par Bob, à l'aide de la fonction f :

J	I	L	L	R

Décrypter ce message à la place d'Alice.