TES Baccalauréat blanc janvier 2009

Ce sujet comporte cinq exercices.
L'usage des calculatrices graphiques est autorisé.

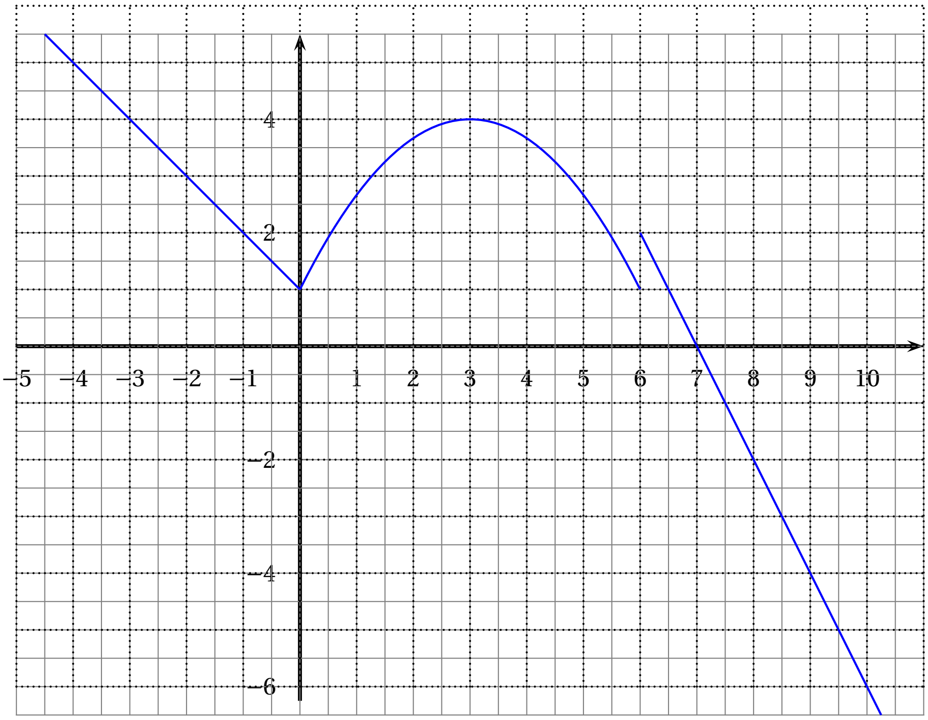
EXERCICE 1 **5 POINTS**

Sujet destiné aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité en mathématique

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x+1 & \text{si } x \in]-\infty\,;\,0[; \\ f(x) = -\dfrac{1}{3}x^2+2x+1 & \text{si } x \in]0\,;\,6[; \\ f(x) = -2x+14 & \text{si } x \in]6\,;\,+\infty[; \end{cases}$$

et représentée par :

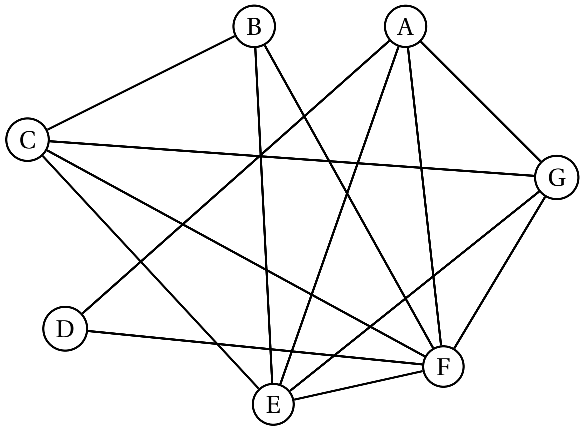


1. D'après le graphique, la fonction est-elle continue en 0 et en 6 ? Justifiez graphiquement vos conjectures.
2. Calculez $f(3)$ et $f'(3)$. Donnez l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.
3. Donnez graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 4$ sur l'intervalle $[-4\,;\,10]$.
   (Justifiez)
4. Donnez graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$. (Justifiez)
5. Soit la fonction g définie par $g(x) = \ln\left[f(x)\right]$.
   Précisez l'ensemble de définition de g.
6. Donnez le tableau de variations de g.

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Sujet destiné aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité en mathématique

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. À ce concert sont conviés sept artistes de renommé internationale :
Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G).
Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties du spectacle. Les arêtes du graphe Γ ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



1. a. Déterminez la matrice M associée au graphe Γ (les sommets de Γ étant classés dans l'ordre alphabétique).
   b. A l'aide de cette matrice M, déduisez le nombre de chaînes de longueur trois reliant les sommets B et D. Écrire toutes ces chaînes.
2. a. Quelle est la nature du sous-graphe de Γ constitué des sommets A, E, F et G ?
   b. Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique $\gamma(\Gamma)$?
3. a. Quel est le sommet de plus haut degré de Γ ?
   b. Déduisez-en un encadrement de $\gamma(\Gamma)$.
4. Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ par ordre de degrés décroissants, coloriez le graphe Γ en utilisant l'algorithme de Welch-Powell.
5. a. Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?
   b. Proposez une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.
6. a. Le graphe Γ admet-t-il un cycle eulérien (expliquez) ?
   b. Sinon admet-il une chaîne eulérienne (expliquez) ?
   c. Déterminez, s'il existe, ce cycle eulérien ou cette chaîne eulérienne.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du SMIC (salaire minimum interprofessionnel de croissance) horaire de 2000 à 2006.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année (x_i)	0	1	2	3	4	5	6
SMIC horaire en euros (y_i)	5,64	5,78	6,01	6,13	6,21	6,41	6,67

1. Calculez le pourcentage d'évolution du SMIC horaire entre les années 2000 et 2006 (le résultat sera arrondi au centième).

2. Représentez le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal sur du papier millimétré.

   (unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 € sur l'axe des ordonnées, les graduations commençant à 0 sur l'axe des abscisses et à 5 sur l'axe des ordonnées).

3. (Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés et les résultats seront donnés au millième)

   Le nuage de points montre qu'un ajustement affine est justifié. Donnez une équation de la droite d'ajustement affine D de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

   Représentez la droite D dans le repère précédent.

4. Calculez avec cet ajustement affine le montant du SMIC horaire en euros que l'on peut prévoir en 2010 (résultat arrondi au centième).

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2(1+\ln x)}{x}.$$

Partie A

1. **a.** Résolvez dans I l'équation $f(x) = 0$ en calculant la valeur exacte de la solution.

   b. Donnez une valeur décimale arrondie à 10^{-3} près de la solution de cette équation ci-dessus.

2. Calculez $f'(x)$.

3. Justifiez soigneusement les éléments du tableau de variations de f donné ci-dessous :

   a. Signe de $f'(x)$.

   b. Variations de f.

   c. Limite en zéro de f.

   d. Maximum de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	2	↘	0

   On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Partie B

Dans une entreprise, on a modélisé par la fonction f sur l'intervalle $]0,2\ ;\ +\infty[$ le bénéfice mensuel (qui peut être négatif !) réalisé en vendant x milliers d'objets fabriqués. Ce bénéfice est exprimé en milliers d'euros.

En utilisant les résultats et informations précédents, répondre aux questions suivantes :

1. Quel nombre minimal d'objets l'entreprise doit-elle vendre mensuellement pour que le bénéfice soit positif ?

2. Combien faut-il vendre d'objets pour réaliser un bénéfice maximal ?
3. Quel est alors le montant de ce bénéfice maximal ?

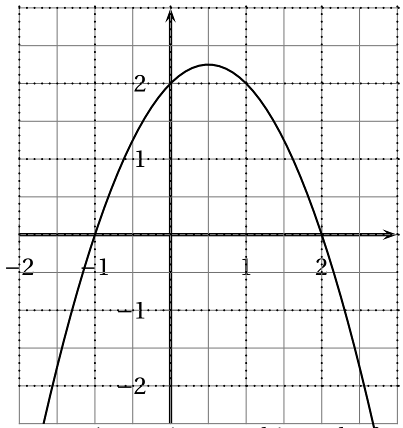
EXERCICE 4 **2 POINTS**

Commun à tous les candidats

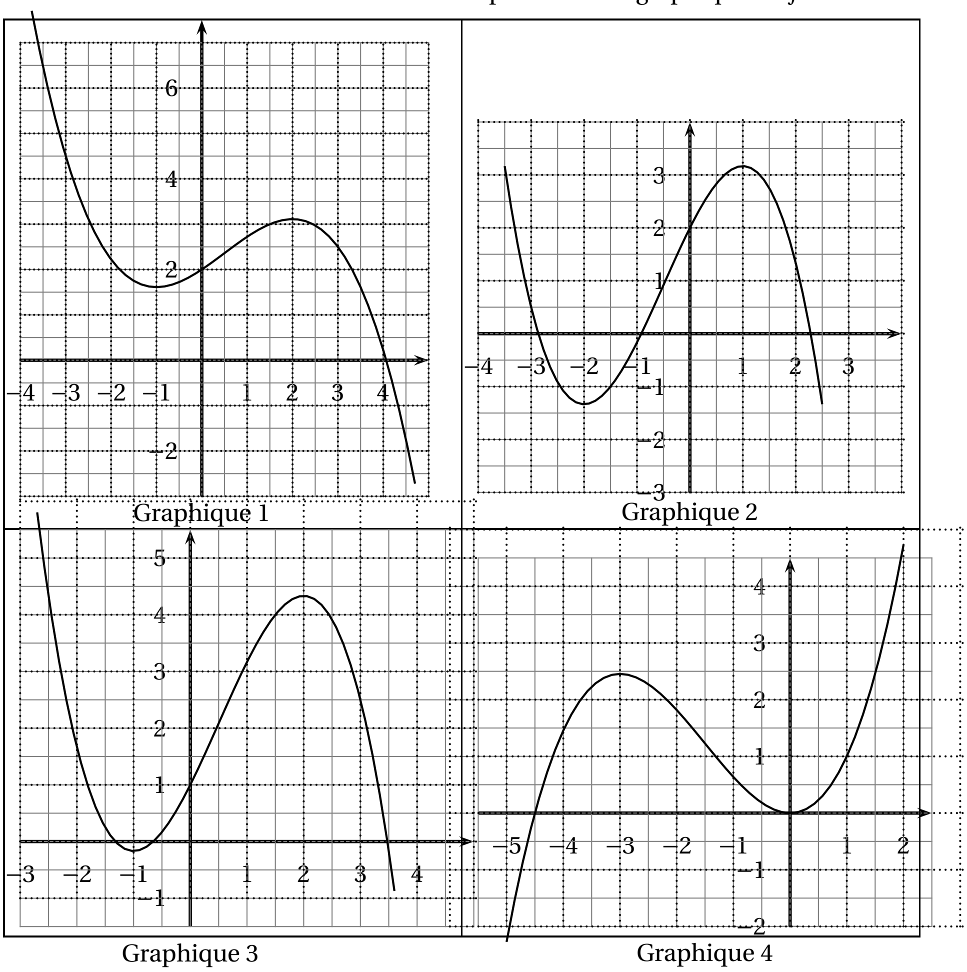
Les deux questions sont indépendantes

1. Soit $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{5}{(x+1)^2}$.
   Déterminez la primitive F de f prenant la valeur 2 pour $x = 1$.

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par la représentation graphique ci-contre. Un des quatre graphiques ci-dessous représente une primitive F de f. Indiquer quel est ce graphique en justifiant votre choix.



Représentation graphique de f



Graphique 1 Graphique 2

Graphique 3 Graphique 4

EXERCICE 5 **4 POINTS**

Commun à tous les candidats

À remettre avec la copie

Pour chacune des huit affirmations suivantes, une seule réponse proposée est exacte.
On demande de cocher la réponse exacte dans la case prévue à cet effet.
Une bonne réponse rapporte 0,5 point, une mauvaise réponse enlève 0,25 point, l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

1. Le réel $\ln\left(\mathrm{e}^2\right) - 2\mathrm{e} + \ln 1$ est égal à
   ☐ $2 - 2\mathrm{e}$ ☐ $\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}$ ☐ 0
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $1 - x\ln 2 \geqslant 0$ est
   ☐ $\left]-\infty\,;\, \dfrac{1}{\ln 2}\right]$ ☐ $\left]\dfrac{1}{\ln 2}\,;\,+\infty\right]$ ☐ $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\ln 2}\right]$
3. La courbe représentative de la fonction $\ln x$ admet une tangente de coefficient directeur 3 au point A de coordonnées :
   ☐ $\left(3\,;\,\ln \mathrm{e}^3\right)$ ☐ $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,-\ln 3\right)$ ☐ $(3\,;\,\ln 3)$
4. Si $f(x) = \ln\left(x^2\right)$, alors $f'(x)$ s'écrit :
   ☐ $\dfrac{2}{x}$ ☐ $2\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$ ☐ $\dfrac{2\ln x}{x}$
5. Si $f(x) = \dfrac{1}{3x-1}$, alors une primitive F de f sur $\left]\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ est définie par :
   ☐ $F(x) = \ln(3x-1)$ ☐ $F(x) = 3\ln(3x-1)$ ☐ $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln(3x-1)$
6. Si $f(x) = x \times \ln x$, alors :
   ☐ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ☐ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ☐ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
7. La courbe représentative de la fonction $\ln x$ admet :
   ☐ Une tangente horizontale ☐ Une asymptote horizontale ☐ Une asymptote verticale
8. L'équation $\ln\left(x^2 - x\right) = 0$ a pour solutions :
   ☐ 0 et 1 ☐ 1 et e^{-1} ☐ $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$