Baccalauréat blanc TS spécialité
Lycée Maupassant Rouen

Le sujet comporte 4 pages et une annexe , à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 : Q. C. M. **4 points**

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes (bien que les deux dernières fassent référence au même nombre) et sont notées sur un point chacune. Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point.
Donner trois propositions ou plus d'une question, ou bien n'en donner aucune ne rapporte aucun point.
Si, par l'application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :
$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.
Alors

   a. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$;

   b. La suite (u_n) est minorée ;

   c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $-1 \leqslant v_n \leqslant 1$.

   d. On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

2. Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

   a. Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes deux croissantes.

   b. $x_3 = \dfrac{19}{20}$ et $y_3 = \dfrac{37}{60}$.

   c. Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.

   d. Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

3. Si $z = -5\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)$, alors l'argument de z est :

   a. $-5 \times \arg\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)$

   b. $\pi + \arg(1+\mathrm{i}) - \arg\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)$

   c. $\dfrac{4\pi}{3}$

   d. $-\dfrac{7\pi}{12}$

4. Si $z = -5\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)$, alors le module de z est :

   a. $\dfrac{|1+\mathrm{i}|}{|\sqrt{3}-\mathrm{i}|}$

   b. $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

   c. $-5 \times \dfrac{|1+\mathrm{i}|}{|\sqrt{3}-\mathrm{i}|}$

d. $5\left|\dfrac{5-\text{i}}{\sqrt{3}+\text{i}}\right|$

EXERCICE 2 **7 points**

Le but de l'exercice est démontrer que l'équation (E) :

$$\text{e}^x = \frac{1}{x},$$

admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \text{e}^{-x}.$$

1. Démontrer que x est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.
2. Étude du signe de la fonction f.
   - **a.** Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   - **b.** En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.
   - **c.** Démontrer que appartient α à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}~;~1\right]$.
   - **d.** Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0~;~\alpha]$.

II. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$g(x) = \frac{1+x}{1+\text{e}^x}.$$

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0~;~\alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite

On considérera la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n : 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

EXERCICE 3 (SPÉCIALITÉ) **4 points**

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.

On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.

3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.
On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$ vérifiant la relation :

$$\text{(E)}\quad a^2 - 250\,507 = b^2.$$

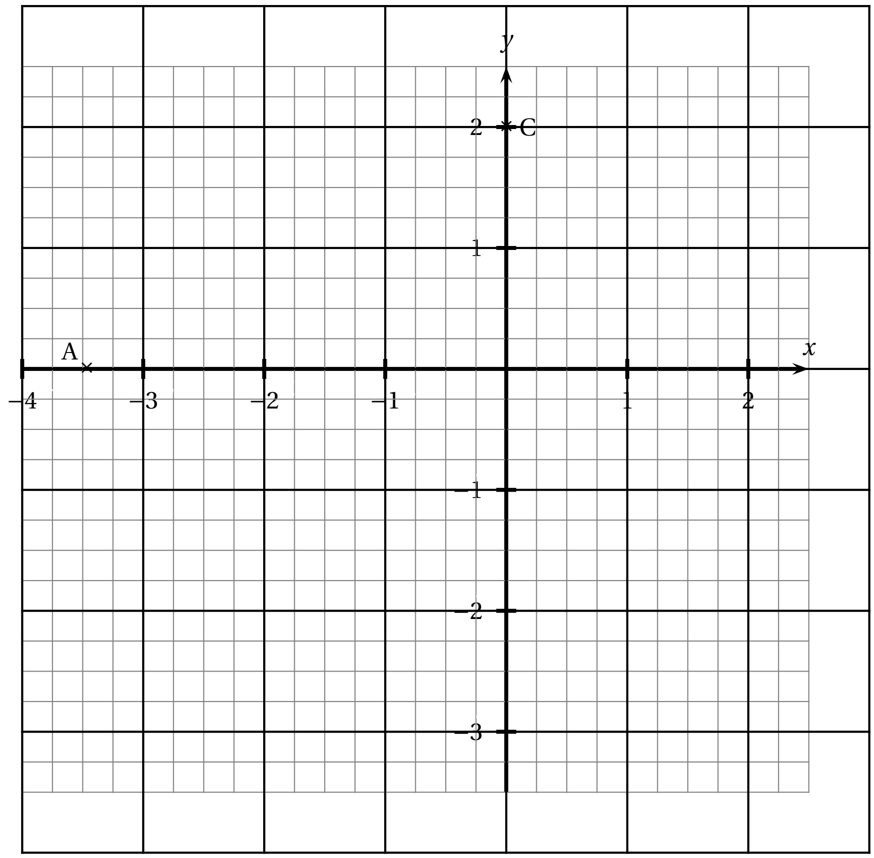
1. Soit X un entier naturel.
   - **a.** Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.
   - **b.** Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2.
   - **c.** Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
2. Justifier que si le couple $(a\,;\,b)$ vérifie la relation (E), alors $a > 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501\,;\,b)$.
3. On suppose que le couple $(a\,;\,b)$ vérifie la relation (E).
   - **a.** Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
   - **b.** Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505+9k\,;\,b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.
4. Déduire des questions précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.

EXERCICE 4 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. A, B, C désignent les points d'affixes respectives

$$a = -2\sqrt{3},\ b = \sqrt{3} - 3\text{i et } c = 2\text{i}.$$

1.
   - **a.** Écrire b sous forme exponentielle.
   - **b.** Les points A et C sont représentés sur la figure jointe en annexe 1.
     Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (laisser les traces de construction apparentes).
2. On désigne par E le barycentre du système $\{(A\,;\,1);(C\,;\,3)\}$ et par F le barycentre du système $\{(A\,;\,2);(B\,;\,1)\}$.
   - **a.** Établir que l'affixe e du point E est égale à $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i}$.
   - **b.** Déterminer l'affixe f du point F.
3.
   - **a.** Démontrer que le quotient $\dfrac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire ki où k est un nombre réel à déterminer.
     En déduire que, dans le triangle ABC, le point E est le pied de la hauteur issue de B. Placer le point E sur le dessin.
   - **b.** Démontrer que le point F possède une propriété analogue. Placer F sur le dessin.
4. On désigne par H le barycentre du système $\{(A;2);(B;1);(C;6)\}$. Démontrer que le point H est le point d'intersection des droites (BE) et (CF).
   Qu'en déduit-on pour le point H ?


y
x
C
A
2
1
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
1
2