Baccalauréat blanc 15 janvier 2008

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct . L'unité graphique est 2 cm.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$\frac{z-4}{z} = \mathrm{i}.$$

   Ecrire la solution sous forme algébrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Ecrire les solutions sous forme exponentielle.

3. Soient A, B, A′ et D les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$a = 2,\ b = 4,\ a' = 2\mathrm{i} \text{ et } d = 2 + 2\mathrm{i}.$$

   Quelle est la nature du triangle ODB ?

4. Soient E et F les points d'affixes respectives : $e = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $f = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ?

5. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 2. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre A′ et de rayon 2.
   Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
   - **a.** On désigne par E′ l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E′.
   - **b.** Démontrer que le point E′ est un point du cercle $\mathscr{C}'$.
   - **c.** Vérifier que : $e - d = (\sqrt{3}+2)\left(e' - d\right)$. En déduire que les points E, E′ et D sont alignés.

6. Soit D′ l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle EE′D′ est rectangle.

Exercice 2

Partie A

On dispose d'une boite de 13 craies. Parmi ces craies, 4 sont rouges, 3 sont jaunes et 6 sont blanches.
On tire au hasard et simultanément 3 craies.

1. Quelle est la probabilité de tirer 3 craies blanches ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 craies de la meme couleur ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une craie jaune ?

Partie B

On suppose maintenant que la boite contient 4 craies rouges, 3 craies jaunes et n craies blanches, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 6.
On tire 2 craies successivement sans remise. On note p_n la probabilité de tirer deux craies blanches.

1. Calculer p_n.
2. Déterminer n pour que : $p_n > 0,9$.

Exercice 3

Partie A
Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = x\mathrm{e}^x$.

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = (ax+b)e^x.$$

   a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

   b. Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u+v$ est solution de l'équation (1).

   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B
Étude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur par

$$g(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 2.$$

1. Déterminer la limite de g en -1 et la limite de g en $+1$.
2. Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variations.
3. On admet que léquation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

   a. Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

   b. L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie C
Étude de la fonction principale
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x$$

1. Déterminer la limite de f en -1 et la limite de f en $+1$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur.)
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le meme signe.
   Étudier le sens de variations de f.
3. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ où α est défini dans la **partie B**.
   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.)
4. Établir le tableau de variations de f.
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, reprde f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).