∾ Baccalauréat blanc S – 4 heures ∾
Lycée Corneille - Rouen 2007

L'utilisation de la calculatrice est autorisée

Exercice 1 : **6 points**

Démonstration de cours

1. Démontrer que : pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 1$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 2.$$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variations.
3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
   a. Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
   b. L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie B : Étude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

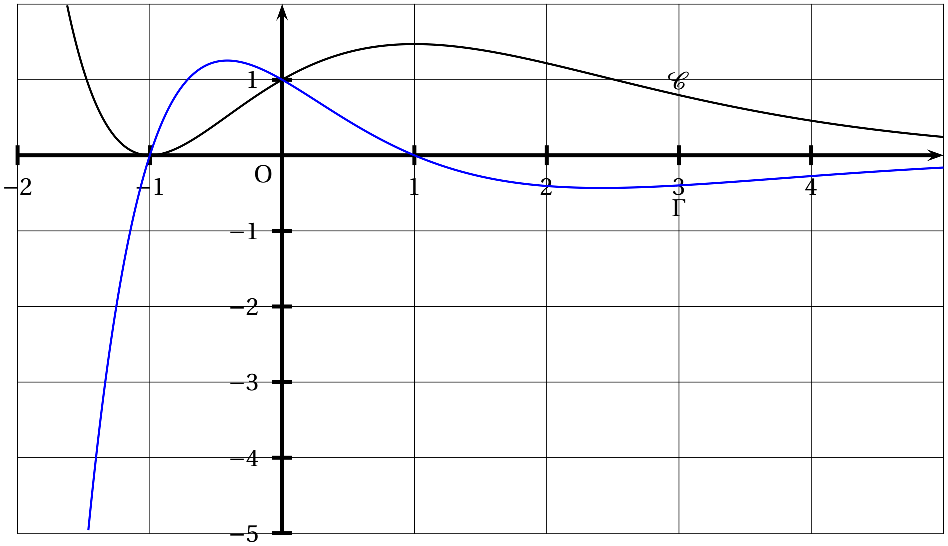
$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
   Étudier le sens de variation de f.
3. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la partie B.
   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.)
4. Établir le tableau de variations de f.
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Exercice 2 : **5 points**

À traiter par les élèves n'ayant pas choisi l'option mathématiques

Partie A : Lectures graphiques



On donne dans un repère orthogonal les courbes $\mathscr{C}$ et Γ représentatives de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On sait que l'une de ces fonctions est la fonction dérivée de l'autre, on peut donc les noter g et g'.

1. Associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique. On justifiera le résultat en donnant un tableau où figurera sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\ ;\ 5\right]$ le signe de $g'(x)$ et les variations de g.
2. Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 ?

Partie B

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E′) : $y' + y = 0$.
3. Soit u une solution de (E′). Montrer que la fonction $f_0 + u$ est une solution de (E).
   On admettra que, réciproquement, toute solution f de (E) est de la forme $f = f_0 + u$ où u est une solution de (E′).
   En déduire, pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f(x)$ lorsque f est solution de (E).
4. Sachant que la fonction g de la partie A est solution de (E), déterminer $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer la solution h de l'équation (E) dont la représentation graphique admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 0.

Exercice 2 : **5 points**

À traiter par les élèves ayant choisi l'option mathématiques

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.

On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1. **a.** Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.
   b. En déduire que $S = x + y$ et $P = xy$ sont premiers entre eux.
   c. Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).
2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.
3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : $SP = 84$.

4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l c l} a+b & = & 84 \\ ab & = & d^3 \end{array}\right. \text{ avec } d = \text{PGCD}(a\ ;\ b)$$

Exercice 3 : **4,5 points**

Commun à tous les élèves

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.
Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Donner la valeur exacte de $\left(z'\right)^{2007}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; (unité graphique : 2 cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1+\text{i}\sqrt{3}$ et B d'affixe $1-\text{i}\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
Tracer ce cercle puis construire les points A et B.
2. On note O$'$ l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et B$'$ l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.
Calculer les affixes des points O$'$ et B$'$ et construire ces points.
3. Soit I le milieu du segment [OB].
   a. Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle AO$'$B$'$?
   b. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{AI}}$.
   Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{O}'\text{B}'}$ est égale à $3\sqrt{3}-\text{i}$.
   c. La conjecture émise à la question a est-elle vraie ?

Exercice 4 : **4,5 points**

Commun à tous les élèves

Un joueur achète 10 euros un billet permettant de participer à un jeu constitué d'un grattage suivi d'une loterie. Il gratte une case sur le billet. Il peut alors gagner 100 euros avec une probabilité de $\dfrac{1}{50}$ ou bien ne rien gagner.
G désigne l'évènement : « Le joueur gagne au grattage ».
Il participe ensuite à une loterie avec le même billet. À cette loterie, il peut gagner 100 euros, ou 200 euros, ou bien ne rien gagner.
L_1 désigne l'évènement « Le joueur gagne 100 euros à la loterie ».
L_2 désigne l'évènement « Le joueur gagne 200 euros à la loterie ».
P désigne l'évènement « Le joueur ne gagne rien à la loterie ».
Si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 100 euros à la loterie est $\dfrac{1}{70}$, et la probabilité qu'il gagne 200 euros à la loterie est $\dfrac{1}{490}$.

1. **a.** Faire un arbre sur lequel on indiquera les renseignements qui précèdent.
   b. Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il n'a rien gagné au grattage. Compléter l'arbre obtenu avec cette valeur.

c. Au bout de chaque branche, indiquer le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

2. En supposant le nombre de billets suffisamment grand pour que deux résultats soient considérés comme indépendants.

a. Calculer la probabilité de ne rien gagner à ce jeu.

b. Le joueur achète 10 billets, calculer la probabilité pour qu'un ticket au moins soit gagnant à ce jeu.

c. En utilisant votre calculatrice, combien doit-il acheter de billets pour avoir une probabilité strictement supérieure à 0,5 de gagner ?

3. On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

La probabilité de l'évènement « $X = 90$ » est $\dfrac{2}{125}$.

La probabilité de l'évènement « $X = 190$ » est $\dfrac{2}{250}$.

a. Montrer que la probabilité que le joueur gagne 100 euros à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage, est égale à $\dfrac{1}{10}$.

b. Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage.

c. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance de X.