∾ Baccalauréat blanc S n° 2 – 4 heures ∾
Frédéric Laroche - Montpellier 5 mars 2007

L'utilisation de la calculatrice est autorisée

Exercice 1 : Nombres complexes (non spécialistes) **5 points**

Vrai ou Faux ? Justifiez votre réponse brièvement ... Les deux parties sont indépendantes.

Partie A Soit T la transformation du plan complexe de repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

1. Si $z' = z + \text{i} - 2$ alors T est une translation de vecteur $2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$;
2. Si $z' = 2z - \text{i}$ alors T est une homothétie de centre le point A d'affixe i et de rapport 2 ;
3. Si $z' = \Im m(\overline{z})$ alors T est la projection orthogonale sur l'axe $\left(\text{O} ; \overrightarrow{v}\right)$;
4. Si $z' = -\text{i}z + 2$ alors T est la rotation de centre B d'affixe $1 - \text{i}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Partie B

Dans le plan complexe de repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, soit A, B et C les points d'affixes respectives $2 - \text{i}$, $2 + 2\text{i}$ et 2. Soit E l'équation : $z - 2 - 2\text{i} = 2\text{i}(z - 2 + \text{i})$.

1. Si l'affixe z du point M vérifie l'équation E alors M est sur la perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point C.
2. Si l'affixe z du point M vérifie l'équation E alors : $\arg(z - 2 - 2\text{i}) = \arg(z - 2 + \text{i})$.
3. Si l'affixe z du point M vérifie l'équation E alors : $\overrightarrow{\text{A}M} \cdot \overrightarrow{<BA} = 0$.
4. Si l'affixe z du point M vérifie l'équation E alors M est sur le cercle de diamètre le segment [AB].

Exercice 2 : Équation différentielle **5 points**

1. Restitution organisée des connaissances
   Prérequis : on sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions de la forme $f(x) = C\text{e}^{ax}$ où C est une constante réelle.
   a. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$.
   b. En faisant un changement de variable de la forme $y = \varphi(Y)$ dans l'équation précédente on obtient l'équation $Y' = 2aY + 2b\sqrt{Y}$. Quelle est la fonction φ à votre avis ?
2. **Résolution d'une équation différentielle**
   On considère l'équation différentielle (1) : $y' + y = 2\hat{\text{e}}^{-x}$, dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
   a. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' + y = 0$.
   On considère l'équation différentielle (1) : $y' + y = 2\hat{\text{e}}^{-x}$, dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
   b. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (\alpha x + \beta)\text{e}^{-x}$. Trouver les valeurs de α et β telles que h soit solution de l'équation (1).
   c. On admet que toute solution de (1) s'écrit sous la forme $g + h$, où g désigne une solution de l'équation (2).

i. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

ii. Déterminer la solution f de l'équation (1) vérifiant la condition initiale $f(0) = -1$.

iii. Quelle est la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$? Vers $-\infty$? Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 3 : Centre de gravité **4 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : Calcul d'une primitive

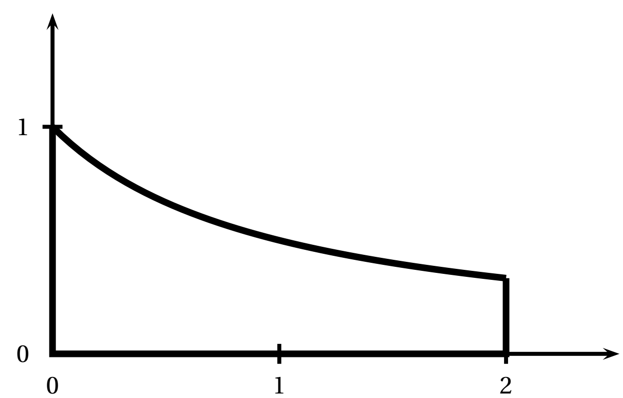
On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2]$, $g(x) = a + \dfrac{b}{x+1}$.
2. En déduire une primitive de g sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

Partie B : Détermination du centre de gravité d'une plaque homogène

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

On considère une plaque homogène formée par l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan dont les coordonnées vérifient les relations : $0 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. (Voir schéma ci-dessous).



1. Soit S l'aire de la plaque exprimée en unité d'aire. Calculer S.
2. Soit G le centre de gravité de la plaque. On admettra que les coordonnées $(X\,;\,Y)$ de G sont données par les formules suivantes :

$$X = \frac{1}{2S}\int_0^2 xf(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } Y = \frac{1}{2S}\int_0^2 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

   a. Calculer la valeur exacte de X, puis une valeur approchée arrondie au centième.

   b. Calculer la valeur exacte de Y, puis une valeur approchée arrondie au centième.

Exercice 4 : Calcul de la racine carrée **6 points**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et les relations : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_n = \dfrac{7}{u_n}$.

1. Calculer $v_0,\ u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2,\ u_3$ et v_3. Donner l'approximation de u_3 et v_3 lue sur la calculatrice.

2. Justifier par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

3. **a.** Démontrer que quel que soit n de $\mathbb{N}$, $(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$.

b. En déduire que $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.

c. Conclure que quel que soit n, on a $u_n - v_n \geqslant 0$.

4. En s'aidant de la question 3. c., prouver que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

5. **a.** Démontrer que quel que soit n de $\mathbb{N}*$, $u_n \geqslant \dfrac{21}{8}$.

b. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.

c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que $u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{10^{2^n-1}}$.

d. Déterminer la limite de $u_n - v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

7. Justifier que u_3 est une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-7} près.

8. Proposez une méthode générale pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{a}$ où a est un réel quelconque positif.
Cette méthode est celle utilisée par le mathématicien grec Héron (1$^{\text{er}}$ siècle) pour déterminer une approximation des racines carrées.