Bacalauréat blanc - TS Lycée La Merci – Montpellier

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Exercice 1 **5 points**

Non spécialistes uniquement

On considère la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} - \ln x$$

et sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique ; 2 cm).

1. **a.** Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{x} - 1$.

   b. En déduire qu'il existe un réel positif unique α tel que : $\alpha\mathrm{e}^{\alpha} = 1$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

   c. Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2. **a.** Déterminer les limites de f aux bornes de $]0\,;\,+\infty[$.

   b. Calculer la fonction dérivée f' de f et étudier son signe sur $]0\,;\,+\infty[$ en utilisant la question 1. Dresser le tableau des variations de f.

   c. Montrer que f admet un minimum m égal à $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$.
   Justifier que : $2,32 \leqslant m \leqslant 2,34$.

3. Donner une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1. Déterminer le point d'intersection de T et de l'axe des ordonnées.

4. Tracer $\mathscr{C}$ et T.

Exercice 2 **6 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$(unité graphique 1 cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8+\mathrm{i})z^2 + (17-8\mathrm{i})z + 17\mathrm{i} = 0.$$

I. Résolution de l'équation (E)

1. Montrer que $-\mathrm{i}$ est solution de (E).
2. Déterminer les nombres réels $a,\ b,\ c$ tels que :

$$z^3 + (-8+\mathrm{i})z^2 + (17-8\mathrm{i})z + 17\mathrm{i} = (z+\mathrm{i})\left(az^2 + bz + c\right).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+\mathrm{i},\ 4-\mathrm{i},\ -\mathrm{i}$.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $2\,\dfrac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S.
3. Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle ($\mathscr{C}$) dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer ($\mathscr{C}$).
4. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\mathrm{i}z + 10 - 2\mathrm{i}}{z-2}$.

a. Déterminer les affixes des points A′, B′, C′ associés respectivement aux points A, B et C.

b. Vérifier que A′, B′, C′ appartiennent à un cercle $(\mathscr{C}')$ de centre P, d'affixe i.
Déterminer son rayon et tracer $(\mathscr{C}')$.

c. Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, montrer que $\left|z' - \mathrm{i}\right| = \dfrac{10}{|z-2|}$. Donner une interprétation géométrique de cette relation.

d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $(\mathscr{C})$. Démontrer que $\left|z' - \mathrm{i}\right| = 2\sqrt{5}$.

e. En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle $(\mathscr{C})$.

Exercice 3 **4,5 points**

Une étude sur le comportement de bactéries placées dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence a conduit à proposer une loi d'évolution de la forme

$$N'(t) = 2N(t) - 0,0045[N(t)]^2 \quad (1)$$

où t est le temps exprimé en heures. $N(t)$ représente le nombre d'individus présents dans l'enceinte à l'instant t ; à $t = 0$ on a $N(0) = 1$ (en milliers).

1. On pose $y(t) = \dfrac{1}{N(t)}$; montrer que y est solution d'une équation différentielle (E) du type $y' = ay + b$.
2. Résoudre (E).
3. En déduire que la solution de (1) est $N(t) = \dfrac{1}{0,99775\mathrm{e}^{-2t} + 0,00225}$.
4. Étudier les variations de N.
5. Montrer que $N(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{0,99775 + 0,00225\mathrm{e}^{2t}}$. Déduisez-en une primitive de $N(t)$.
6. On appelle nombre moyen de bactéries la limite quand T tend vers $+\infty$ de $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T N(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer cette intégrale et en déduire le nombre moyen de bactéries dans l'enceinte.

Exercice 4 **5,5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (x-1)\left(2 - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1. **a.** Étudier la limite de f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
   c. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.
2. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
   b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.
   c. Préciser la valeur de $f'(0)$ puis établir le tableau de variations de f.
3. **a.** Rappeler la démonstration de la formule d'intégration par parties.
   b. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
   En donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a. Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ.

b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.