☙ BACCALAURÉAT BLANC DE MATHÉMATIQUES S ❧
janvier 2008

EXERCICE 1
Commun à tous les candidats
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On note (C) la courbe représentative de f.

1. Étudier les variations de f. Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

2. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = f(x) - x$.

  a. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2 = 0$ (on pourra poser $X = \mathrm{e}^x$)

  b. En déduire que $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2 = \left(\mathrm{e}^x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(\mathrm{e}^x - 1 + \sqrt{2}\right)$.

  c. Étudier les variations de h.

  d. Montrer que h admet un minimum m, qui est strictement positif.
  Calculer m et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On définit une suite (U_n) de la façon suivante :

$$U_0 = 1 \text{ et } U_{n+1} = f\left(U_n\right) \text{ pour } n \text{ entier naturel.}$$

  a. Montrer que la différence $U_{n+1} - U_n$ peut être minorée par m (calculé en 2. c.).

  b. Démontrer par récurrence que $U_n - U_0 \geqslant n \cdot m$.

  c. En déduire la limite de (U_n).

EXERCICE 2
Commun à tous les candidats
On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique : 5 cm.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
Déterminer les asymptotes de $\mathcal{C}$.

2. Étudier le sens de variation de f.
Dresser le tableau de variation de f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,1\right]$ une solution unique, notée α.
Déterminer un encadrement de α, d'amplitude 10^{-2}.
Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique réelle de premier terme r_0 strictement positif et de raison $\dfrac{2}{3}$.
Exprimer r_n en fonction de r_0 et n.
   b. Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique réelle de premier terme θ_0 appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et de raison $\dfrac{2\pi}{3}$.
Exprimer θ_n en fonction de θ_0 et de n.
   c. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = r_n(\cos\theta_n + \mathrm{i}\sin\theta_n)$.
Sachant que $z_0,\ z_1$ et z_2 sont liés par la relation $z_0 z_1 z_2 = 8$, déterminer le module et un argument de $z_0,\ z_1$ et z_2.
2. Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm), on appelle M_n le point d'affixe z_n.
   a. Placer les points M_0, M_1, M_2 et M_3 dans le plan $\mathscr{P}$.
   b. Pour tout entier n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.
   c. Calculer alors M_nM_{n+1} en fonction de n.
   d. On pose $l_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1} = M_0M_1 + \cdots + M_nM_{n+1}$.
Calculer l_n en fonction de n et déterminer la limite de l_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 **4 points**

À chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté (ou la moitié s'il y a deux réponses exactes ...) ; une réponse inexacte enlève le quart du nombre de points affecté.
Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions : la question ne rapporte alors aucun point et n'en coûte aucun.
Les réponses devront être ***justifiées*** *: en l'absence de justification la réponse ne sera pas prise en compte.*
Pour chaque question, une ou plusieurs réponses sont exactes.
Si le total de points est négatif, la note est ramenée à zéro.

1. Une solution de $z^2 + 2z + 4 = 0$ est dans $\mathbb{C}$:
☐ $1+\mathrm{i}$ ☐ $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$ ☐ $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ ☐ $-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.
2. Soit z_1 et z_2 les nombres complexes définis par $z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z_2 = 2\mathrm{i} - z_1$.
Alors $\dfrac{z_2}{z_1} =$:
☐ $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ ☐ $-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ ☐ $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ☐ $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.
3. Soit deux points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = \sqrt{3}$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. L'affixe de C, image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ est :
☐ $-\mathrm{i}$ ☐ $2\mathrm{i}$ ☐ $3+\mathrm{i}$ ☐ $3+2\mathrm{i}$
4. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ vérifiant la relation $\arg\left(\dfrac{z+2}{z-2\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ est inclus dans :
☐ La droite d'équation $y = -x$
☐ Le cercle de centre $\mathrm{I}(-1+\mathrm{i})$ et de rayon $\mathrm{R} = 2$
☐ La droite d'équation y = x
☐ Le cercle de diamètre [AB], A et B étant les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = -2$ et $z_{\mathrm{B}} = 2\mathrm{i}$.

5. Soit $A(-i)$, $B(3)$ et $C(2+3i)$. Le triangle ABC est : ☐ quelconque
☐ isocèle
☐ rectangle
☐équilatéral