Baccalauréat S 1999
L'intégrale de mars à décembre 1999

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Tapuscrit : Denis Vergès

Baccalauréat S Pondichéry mai 1999

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les questions 2 *et* 3 *sont indépendantes.*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$.
   On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.
2. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.
   b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité : 1 cm), on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+\text{i})$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-\text{i})$ et le point A d'affixe $z_{\text{A}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   a. Déterminer l'affixe du point M_3 image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport -3.
   b. Déterminer l'affixe du point M_4 image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   c. Placer dans le même repère les points A, M_1, M_2, M_3 et M_4.
   d. Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.
   e. Soient I le milieu du segment $[\text{M}_3\text{M}_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que les points M_1, M_3, M_5 et M_4 forment un carré.

Exercice 2 **4 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On admet que 1 999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1 999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$(E) : n^2 - Sn + 11\,994 = 0 \text{ où } S \text{ est un entier naturel.}$$

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ?
   Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11 994.
   En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C

Comment montrerait-on que 1 999 est un nombre premier ?
Préciser le raisonnement employé.
La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41
43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

Exercice 2 **4 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère un triangle ABC du plan.

1. a. Déterminer et construire le point G, barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ 1)\ ;\ (\mathrm{B}\ ;\ -1)\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ 1)].$$

   b. Déterminer et construire le point G$'$, barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ 1)\ ;\ (\mathrm{B}\ ;\ 5)\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ -2)].$$

2. a. Soit J le milieu de [AB].
   Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{GG}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JG}'}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et en déduire l'intersection des droites (GG$'$) et (AB).

   b. Montrer que le barycentre I de [(B ; 2) ; (C ; - 1)] appartient à (GG$'$).

   c. Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de [CD] et K le milieu de [GA].

3. Déterminer trois réels a, d et c tels que K soit barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ a)\ ;\ (\mathrm{D}\ ;\ d)\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ c)].$$

4. Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).
   Déterminer les réels a' et c' tels que X soit barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ a')\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ c')].$$

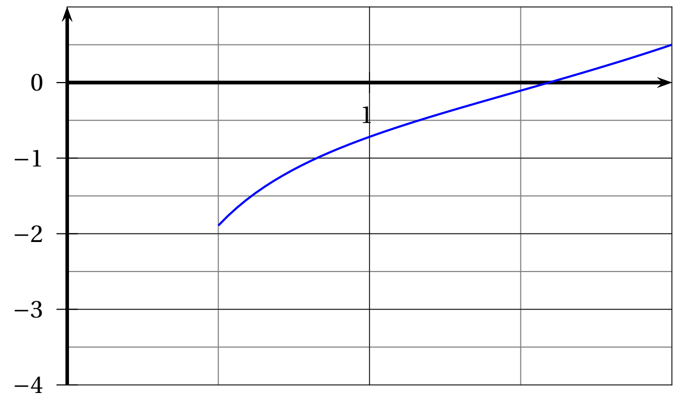
Problème **11 points**
Commun à tous les candidats

Soit la fonction numérique f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2}.$$

Partie A
Recherche graphique d'un extremum

L'observation de la courbe représentative de la fonction f sur l'écran graphique d'une calculatrice donne à penser que f admet un minimum sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 2]$.
On se propose d'en donner une valeur approchée.
Observer ci-dessous la représentation graphique de la fonction f', dérivée de f sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 2]$.



Quels sont les éléments graphiques concernant f' qui vont dans le sens de l'existence d'un minimum de f sur $[0,5 ; 2]$?
À l'aide de ce graphique, donner un encadrement d'amplitude $0,2$ de l'abscisse de ce minimum.

Partie B
Étude de la fonction F

On considère la fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2$.

1. Déterminer les variations de h (on précisera $h(0)$ mais la limite en $+\infty$ n'est pas demandée).
2. Déterminer le signe de $h\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

   En déduire qu'il existe un unique réel a appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2} ; 2\right]$ tel que $h(a) = 0$.
   En déduire le signe de h sur $[0 ; +\infty[$.
3. Étude de la fonction f
   a. Calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
   b. Montrer que, pour tout nombre x strictement positif,
   $$f'(x) = \frac{x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2}{x^3}.$$
   En déduire le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
   c. Montrer que $f(a) = \dfrac{-1}{a(a-2)}$ et en déduire le signe de $f(a)$.

Partie C
Recherche d'un encadrement du nombre a

1. Démontrer que, sur $[0 ; +\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ équivaut à
   $$2\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) = x.$$
2. Soit la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par
   $$g(x) = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right).$$
   On pose $\mathrm{I} = \left[\dfrac{3}{2} ; 2\right]$. Montrer que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

3. Soit la suite $(x_n)_{n>1}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \dfrac{3}{2} \\ x_{n+1} & = & g(x_n) \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 1.$$

On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, x_n appartient à I.

4. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$|x_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}|x_n - a|$$

$$\text{et} \quad |x_n - a| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

En déduire que la suite (x_n) converge vers a.

5. Déterminer un entier p tel que x_p soit une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel a. Donner une valeur approchée de x_p avec trois décimales.

Partie D
Quelques propriétés d'une primitive de f

On appelle F la primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$ qui s'annule en 1. Ainsi l'on a, pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier le sens de variation de F sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Démontrer que, pour tout x supérieur ou égal à 2,

$$\int_2^x f(2)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par comparaison de limites, et en utilisant la relation de Chasles, en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

∽ Baccalauréat S Amérique du Nord juin 1999 ∾

Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Partie I

Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons.
On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers.
On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

1. Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets ?

2. Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?

3. Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul de ces sujets ?

4. Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?

Partie II

On considère maintenant que l'élève a étudié n des 100 leçons (n étant un entier naturel inférieur ou égal à 100).

1. Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?

2. Déterminer les entiers n tels que p_n soit supérieur ou égal à $0,95$.

Exercice 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, l'unité graphique étant 4 cm. On considère les points A_0, A_1 d'affixes respectives : $a_0 = 1$;
$a_1 = \text{e}^{\frac{i\pi}{12}}$.
Le point A_2 est l'image du point A_1 par la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$.

1. **a.** Calculer l'affixe a_2 du point A_2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

b. Soit I le milieu du segment $[\text{A}_0\text{A}_2]$. Calculer l' affixe du point I.

c. Faire une figure.

2. **a.** Prouver que les droites (OI) et (OA_1) sont confondues.

b. Écrire sous forme trigonométrique l'affixe de I.

c. Déterminer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ (les valeurs exactes sont exigées), sachant que $\sqrt{4\sqrt{3}+8} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$.

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soit $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$.
Déterminer les paires $\{a ; b\}$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.

Partie II

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

   a. L'entier $(n-1)!+1$ est-il pair ?

   b. L'entier $(n-1)!+1$ est-il divisible par un entier naturel pair ?

2. Prouver que l'entier $(15-1)!+1$ n'est pas divisible par 15.

3. L'entier $(11-1)!+1$ est-il divisible par 11 ?

Partie III

Soit p un entier naturel non premier ($p \geqslant 2$).

1. Prouver que p admet un diviseur q $(1 < q < p)$ qui divise $(p-1)$.

2. L'entier q divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?

3. L'entier p divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?

Problème **11 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty\,;\,1[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique étant 2 cm.

Partie I

1. **a.** Soit $X = \dfrac{2}{x-1}$.

Prouver l'égalité : $\dfrac{2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}X^2\mathrm{e}^X$.

En déduire la limite de f quand x tend vers 1.

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   c. En déduire une asymptote à la courbe Γ.

2. **a.** Soit v la fonction numérique définie sur $]-\infty\,;\,1[$ par :

$$v(x) = \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Calculer $v'(x)$.

   b. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x-1)^4}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}$.

3. Étudier les variations de f.

4. Tracer la courbe (Γ).

Partie II

1. Déterminer une primitive de f sur $]-\infty\,;\,1[$.

2. Soit α réel tel que $0 < \alpha < 1$, déterminer :

$$g(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Quelle est la limite de $g(\alpha)$ quand α tend vers 1 ?

4. Quelle est l'aire en cm^2 du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = -\alpha$ et $x = \alpha$?

Partie III

1. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ a deux solutions dont l'une est -1.
   On notera β l'autre solution.
   b. Donner un encadrement de largeur 10^{-2} de β.
2. Soit a un élément de $]-\infty~;~1[$.
   Déterminer graphiquement, en fonction de a, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = f(a)$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles–Guyane juin 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiple (Q. C. M.) est utilisé.
On s'intéresse à cinq questions de ce Q. C. M. supposées indépendantes. À chaque question sont associées quatre affirmations, numérotées 1, 2, 3 et 4, dont une seule est exacte.
Un candidat doit répondre à chaque question en donnant seulement le numéro de l'affirmation qu'il juge exacte; sa réponse est correcte si l'affirmation qu'il a retenue est vraie, sinon sa réponse est incorrecte.
Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme fractionnaire.

1. Un candidat répond à chaque question au hasard, c'est-à-dire qu'il considère que les quatre affirmations correspondantes sont équiprobables.

a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Le candidat répond correctement à la première des cinq questions » ;

B : « Le candidat répond correctement à deux questions au moins sur les cinq ».

b. On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note - 1 à toute réponse incorrecte.

Calculer la probabilité de l'évènement C : « Le candidat obtient une note au moins égale à 10 pour l'ensemble des cinq questions ».

2. On suppose maintenant qu'un candidat connaît la réponse correcte à deux questions et qu'il répond au hasard aux trois autres questions. Quelle est alors la probabilité de l'évènement C décrit au **1 b** ?

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe 1 et, pour tout θ appartenant à $[0\,;\,2\pi[$, le point M d'affixe $z = \text{e}^{\text{i}\theta}$. On désigne par P le point d'affixe $1 + z$ et par Q le point d'affixe z^2.

1. À partir du point M, donner une construction géométrique du point P et une construction géométrique du point Q. Les points O, A, M, P et Q seront placés sur une même figure.

2. Déterminer l'ensemble des points P pour θ appartenant à $[0\,;\,2\pi[$.

Tracer cet ensemble sur la figure précédente.

3. Soit S le point d'affixe $1 + z + z^2$ où z désigne toujours l'affixe du point M. Construire S, en justifiant la construction.

4. Dans le cas où S est différent de O, tracer la droite (OS). Quelle conjecture apparaît, relativement au point M ?

Démontrer que le nombre $\dfrac{1 + z + z^2}{z}$ est réel, quel que soit θ appartenant à $[0\,;\,2\pi[$.

Conclure sur la conjecture précédente.

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on donne le point A(12 ; 18).
On désigne par B un point de l'axe $\left(O ; \vec{\imath}\right)$ et par C un point de l'axe $\left(O ; \vec{\jmath}\right)$ tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.
On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1. Démontrer que le couple $(x ; y)$ est solution de l'équation :

$$\text{(E)} \quad 2x + 3y = 78.$$

2. On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.
   a. Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.
   b. À partir de la définition de B et C, trouver une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E) avec x_0 et y_0 appartenant à $\mathbb{Z}$.
   c. Démontrer qu'un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il est de la forme $(12+3k ; 18-2k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.
   d. Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que :

$$-6 \leqslant x \leqslant 21 \text{ et } -5 \leqslant y \leqslant 14 \ ?$$

Problème **11 points**
Commun à tous les candidats

L'objet de ce problème est d'étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire et de calculer l'aire d'un domaine plan.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1).$$

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de la fonction f.
2. Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α, appartient à $[-0,72 ; -0,71]$.
3. Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $]-1 ; +\infty[$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}.$$

1. Étude de g aux bornes de son ensemble de définition
   a. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.
   b. Calculer $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2. Sens de variation de g

a. Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.

b. Montrer que $g(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha = -0,715$.

3. Tableau de variations et représentation graphique de g

a. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

b. Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

4. Calcul d'aire

Soit a un réel strictement supérieur à 0. On pose :

$$I(a) = \int_1^a g(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Donner, suivant les valeurs de a, une interprétation géométrique du réel $I(a)$.

b. En remarquant que, pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$:

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

calculer $I(a)$ à l'aide d'une intégration par parties.

c. Calculer $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a)$ et $\lim\limits_{a\to 0} I(a)$.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Asie juin 1999 ∾

Exercice 1 **4 points**

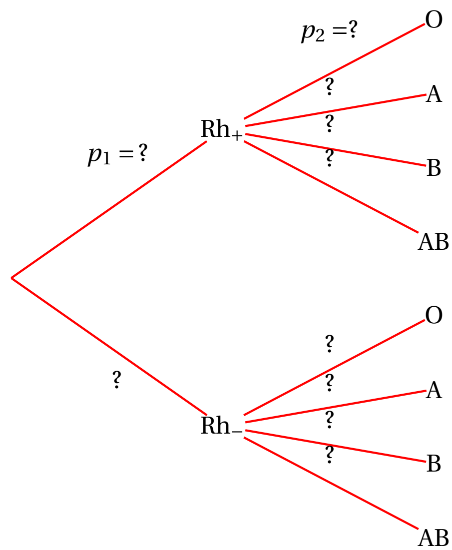
Commun à tous les candidats

Voici le tableau de répartition des principaux groupes sanguins des habitants de France :

	O	A	B	AB
Rhésus +	35,0 %	38,1 %	6,2 %	2,8 %
Rhésus −	9,0 %	7,2 %	1,2 %	0,5 %

Dans cet exercice, les résultats numériques demandés seront, s'il y a lieu, arrondis à trois décimales.

1. L'objectif de cette question est de compléter à l'aide de données de ce tableau l'arbre suivant, à recopier sur la copie.



L'expérience consiste à choisir une personne au hasard dans la population donnée (les habitants de la France).

On note Rh+ l'évènement « La personne a le facteur Rh+ ».

On note O l'évènement « La personne appartient au groupe O ».

a. Déterminer la probabilité p_1 c'est-à-dire p(Rh+).

On détaillera le calcul effectué puis on reportera ce résultat dans l'arbre.

Déterminer de même la probabilité p_2 (en détaillant les calculs).

b. Compléter le reste de l'arbre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante (il est inutile de détailler les nouveaux calculs).

2. **a.** Comment peut-on, à partir de l'arbre complété, déterminer la probabilité de O ?

Vérifier ce résultat à partir du tableau.

b. Quelle est la probabilité pour qu'une personne appartenant au groupe O ait le facteur Rh+ ?

3. **a.** On considère n personnes choisies au hasard dans la population donnée (les habitants de la France).

Calculer, en fonction de n, la probabilité p pour qu'il y ait, parmi elles, au moins une personne du groupe O.

b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle on a $p \geqslant 0,999$.

Exercice 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Pour tout nombre Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.

a. Factoriser $P(Z)$.

b. En déduire les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation $P(Z) = 0$, d'inconnue Z.

c. Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

2. a. Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (l'unité graphique est 5 cm).
Placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2,\ b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\text{i et } c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\text{i}$$

b. Démontrer que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.

3. Placer le point D d'affixe $d = -\dfrac{1}{2}$.
Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{a-c}{d-c}.$$

En déduire le rapport $\dfrac{\text{CA}}{\text{CD}}$.
Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) : $8x+5y = 1$, où $(x\ ;\ y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a\ ;\ b)$ de nombres entiers vérifiant : $\left\{\begin{array}{lcl} N & = & 8a+1 \\ N & = & 5b+2. \end{array}\right.$

a. Montrer que le couple $(a\ ;\ b)$ est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3. a. Résoudre l'équation $8x+5y = 100$, où $(x\ ;\ y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b. Au VIII$^{\text{e}}$ siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Problème **11 points**
Commun à tous les candidats

L'objet de ce problème est de résoudre une équation différentielle, d'en étudier une fonction solution et de calculer des aires.

Partie A
Résolution de l' équation différentielle (E) : $y' + y = x - 1$

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^t(t-1)\,\mathrm{d}t$.
2. Soit z une fonction dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On pose $f(x) = z(x)\mathrm{e}^{-x}$.
   a. Montrer que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si, pour tout x de $\mathbb{R}$, $z'(x) = \mathrm{e}^x(x-1)$.
   b. À l'aide de la première question, déterminer toutes les fonctions z vérifiant, pour tout x de $\mathbb{R}$, $z'(x) = \mathrm{e}^x(x-1)$.

Partie B
Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 2 + \mathrm{e}^{1-x}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).
On désigne par $\left(C_f\right)$ la courbe représentative de f.

1. **a.** Étudier le sens de variations de f
   b. Préciser $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. **a.** Montrer que la droite (D), d'équation $y = x - 2$, est asymptote à la courbe $\left(C_f\right)$.
   b. Préciser la position de $\left(C_f\right)$ par rapport à (D).
3. Tracer (D) et $\left(C_f\right)$.

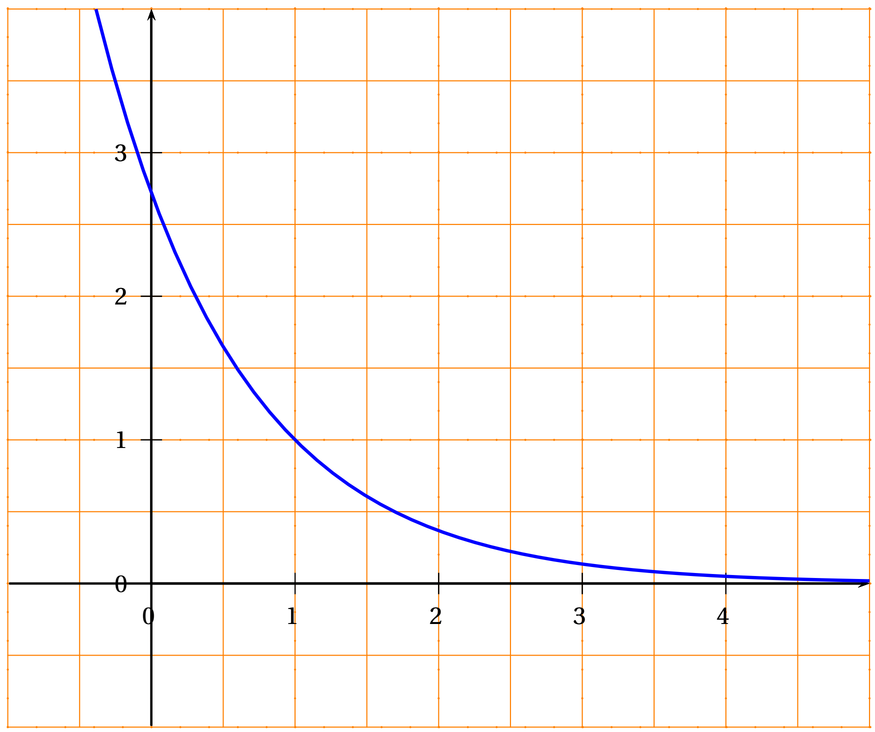
Partie C
Calcul d'aires

Soit x_0 un nombre réel strictement positif.

1. On considère le domaine limité par la courbe (C_f) , son asymptote (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_0$.
   Exprimer, à l'aide de x_0 l'aire S_1 de ce domaine.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$, dont on trouvera la courbe représentative (C_g) en annexe. Donner une interprétation, en terme d'aire, de l'intégrale ayant servi au calcul de S_1 à l'aide de la courbe (C_g).
3. A est le point de coordonnées $(x_0\,;\,0)$.
   B est le point de la courbe (C_g) d'abscisse x_0.
   Soit (T) la tangente à la courbe (C_g) au point d'abscisse x_0. C est le point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de C.
4. Calculer (en unités d'aire) l'aire S_2 du triangle ABC.
   Vérifier que $\mathrm{S}_1 + 2\mathrm{S}_2 = 0$.

Annexe 1

Courbe représentative (C_g) *de la fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = \text{e}^{1-x}$



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers juin 1999

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Une urne U_1 contient deux jetons numérotés 1 et 2.

   Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.

   On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne. (Les choix sont supposés équiprobables).

   a. Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?

   b. On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ?

2. On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.

   a. Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.

   b. Soit S la variable aléatoire, qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés. Déterminer la loi de probabilité de S.

   c. Deux joueurs, Claude et Dominique, décident que si la somme des numéros tirés est impaire, Claude donne 10 euros à Dominique et que, dans le cas contraire, Claude reçoit λ euros de Dominique.

   On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Claude.

   Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de λ, puis déterminer λ pour que le jeu soit équitable (c'est-à-dire pour que $E(X)$ soit égale à 0).

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace.

1. **a.** Déterminer un couple $(x_0\ ;\ y_0)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation :

   $$48x+35y=1.$$

   (On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres).

   b. Déduire de **a.** tous les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de cette équation.

2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(48 ; 35 ; 24)$ et le point A de coordonnées $(-11\ ;\ 35\ ;\ -13)$.

   a. Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble (Π) des points M de l'espace, de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\text{AM}}=0$.

   b. Soit (D) la droite intersection de (Π) avec le plan d'équation $z=16$.

   Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle $[-100\ ;\ 100]$.

   En déduire les coordonnées du point de (D), à coordonnées entières, situé le plus près de l'origine.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe rapporté à à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, A, A′, B, B′ sont les points d'affixes respectives $1,\ -1,\ \mathrm{i},\ -\mathrm{i}$.

À tout point M d'affixe z, distinct des points O, A, A′, B et B′, on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2, tels que les triangles $\mathrm{B}MM_1$ et $\mathrm{A}MM_2$ soient rectangles et isocèles, avec

$$\left(\overrightarrow{M_1\mathrm{B}}, \overrightarrow{M_1M}\right) = \left(\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2\mathrm{A}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Voir la figure sur l'annexe 1, *qui sera complétée et rendue avec la copie*

1. **a.** Justifier les égalités $z - z_1 = \mathrm{i}(\mathrm{i} - z_1)$ et $1 - z_2 = \mathrm{i}(z - z_2)$.

   b. Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire :

$$z_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{2}(z+1) \text{ et } z_2 = \frac{1-\mathrm{i}}{2}(z+i).$$

2. On se propose dans cette question de déterminer les points M pour lesquels le triangle $\mathrm{O}M_1M_2$ est équilatéral.

   a. Montrer que : $\mathrm{O}M_1 = \mathrm{O}M_2$ équivaut à $|z+1| = |z+\mathrm{i}|$.

   En déduire l'ensemble (Δ) des points M tels que $\mathrm{O}M_1 = \mathrm{O}M_2$ et tracer (Δ) sur la figure.

   b. Montrer que : $\mathrm{O}M_1 = M_1M_2$ équivaut à $|z+1|^2 = 2|z|^2$.

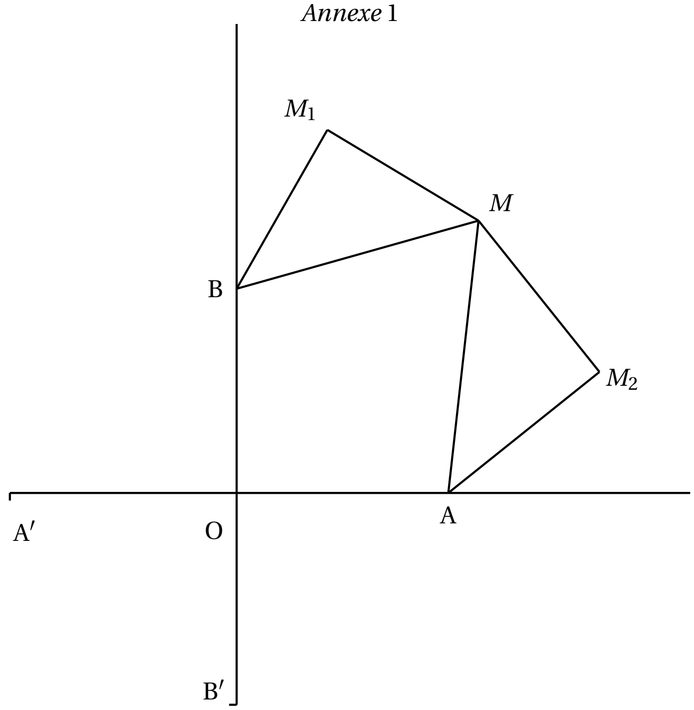
   c. En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels $\mathrm{O}M_1 = M_1M_2$.

   On pourra montrer que $|z+1|^2 = 2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2 = 2$.

   Tracer (Γ) sur la figure.

   d. En déduire les deux points M pour lesquels $\mathrm{O}M_1M_2$ est un triangle équilatéral et les placer sur la figure.

Annexe 1



Problème **10 points**
Commun à tous les candidats

Le but du problème est l'étude d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et d'une primitive de f.

Première partie
Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1).$$

1. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et en détaillant les calculs effectués, montrer que
$$g'(x) = 2x - 2x\ln\left(x^2+1\right).$$
2. Faire l'étude du sens de variation de g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera α, dans l'intervalle $\left[\sqrt{\mathrm{e}-1} ; \sqrt{\mathrm{e}^2-1}\right]$, tel que $g(\alpha) = 0$; donner l'approximation décimale à 10^{-2} près par défaut de α.
4. En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Deuxième partie
Étude de la fonction f

La fonction f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} \quad \text{lorsque} \quad x \neq 0.$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$, dans le plan rapporté à à un repère d'origine O, est donnée en *annexe* 2, qui sera complétée et rendue avec la copie.

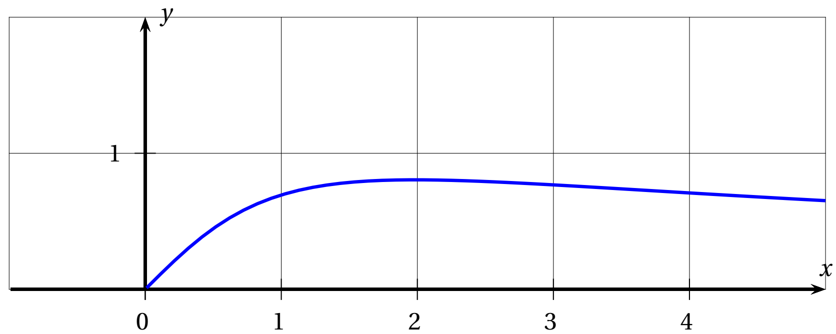
1. **a.** Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.
   En déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

   b. Vérifier que, pour x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2\left(1+x^2\right)}$
   Faire l'étude du sens de variation de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

2. **a.** Montrer que, pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln\left(2x^2\right)}{x}$.

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Annexe 1



Troisième partie
Étude d'une primitive de f

On note F la primitive de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, qui s'annule pour $x = 1$.
On rappelle que $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$: (on ne cherchera pas à calculer $F(x)$).

1. **a.** Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) \geqslant \dfrac{2\ln x}{x}$.

   b. Calculer $\displaystyle\int_1^x \dfrac{2\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 1$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.

2. Dresser le tableau des variations de F.

3. Montrer que $f(1) < F(2) < f(\alpha)$ et en déduire un encadrement de $F(2)$. (On prendra $f(\alpha) \approx 0,8$.)

4. On note I le point de coordonnées $(1~;~0)$, A le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(1~;~\ln 2)$ et B le point de coordonnées $(\ln 2~;~\ln 2)$.

   a. Vérifier que B appartient à la tangente à $(\mathscr{C})$ en O.

   b. Placer les points I, A et B sur la figure de l'*annexe* 1 et tracer les segments [OA], [OB], [BA] et [AI].

   c. On admet que, pour les abscisses appartenant à l'intervalle $[0~;~1]$, la courbe $(\mathscr{C})$ est située au-dessus de [OA] et au-dessous de [OB] et de [BA].
   Déterminer un encadrement de $F(0)$, d'amplitude inférieure à 2×10^{-1}.

5. Tracer la représentation graphique (Γ) de F en exploitant au maximum les résultats précédents ; on précisera notamment la tangente à (Γ) au point d'abscisse 1 en la traçant et en donnant son coefficient directeur. (Unité graphique : 2 cm)

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole juin 1999

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes.

On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe $\frac{1}{2}z^2 - z$.

L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (Γ) décrite par M lorsque m décrit le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1.

Soit t un réel de $[-\pi\,;\,\pi]$ et m le point de $(\mathscr{C})$ d'affixe $z = \text{e}^{\text{i}t}$.

1. Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) & = & \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{array}\right. ,\ t \in [-\pi\,;\,\pi].$$

Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe (Γ).

2. Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part.
   En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.
3. Montrer que $x'(t) = \sin t(1 - 2\cos t)$. Étudier les variations de x sur $[0\,;\,\pi]$.
4. Montrer que $y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$. Étudier les variations de y sur $[0\,;\,\pi]$.
5. Dans un même tableau faire figurer les variations de x et y sur $[0\,;\,\pi]$.
6. Placer les points de (Γ) correspondant aux valeurs 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour $t = 0$ la tangente à (Γ) est horizontale). Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t décrit $[0\,;\,\pi]$ puis tracer (Γ) complètement.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, n est un entier naturel *non nul*.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\text{e}^{\frac{t}{n}}\,\text{d}t.$$

1. **a.** Soit φ la fonction définie sur $[0\,;\,2]$ par $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.
   Étudier les variations de φ sur $[0\,;\,2]$. En déduire que, pour tout réel t dans $[0\,;\,2]$,

$$\frac{3}{2} \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{7}{4}.$$

   b. Montrer que, pour tout réel t dans $[0\,;\,2]$, on a

$$\frac{3}{2}\text{e}^{\frac{t}{n}} \leqslant \varphi(t)\text{e}^{\frac{t}{n}} \leqslant \frac{7}{4}\text{e}^{\frac{t}{n}}.$$

c. Par intégration en déduire que :

$$\frac{3}{2}\,n\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}-1\right)\leqslant u_n\leqslant\frac{7}{4}\,n\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}-1\right).$$

d. On rappelle que $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{h}-1}{h}\right)=1$.

Montrer que, si (u_n) possède une limite ℓ, alors $3\leqslant\ell\leqslant\dfrac{7}{2}$.

2. a. Vérifier que, pour tout t dans [0 †; 2], on a : $\dfrac{2t+3}{t+2}=2-\dfrac{1}{t+2}$.

En déduire l'intégrale $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}\,\mathrm{d}t$.

b. Montrer que, pour tout t dans $[0\,;2]$, on a $1\leqslant\mathrm{e}^{\frac{t}{n}}\leqslant\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}$.

En déduire que $\mathrm{I}\leqslant u_n\leqslant\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}\mathrm{I}$.

c. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

Exercice 2 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres

$$a_n=4\times 10^n-1,\ b_n=2\times 10^n-1 \text{ et } c_n=2\times 10^n+1.$$

1. a. Calculer $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ a_3,\ b_3$ et c_3.

b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n\times c_n=a_{2n}$. En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.

e. Montrer que PGCD $(b_n,\ c_n)$ = PGCD $(c_n,\ 2)$.

En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation :

$$(1)\qquad b_3x+c_3y=1$$

d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a. Justifier le fait que (1) possède au moins une solution.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1).

c. Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2 ; 3 ; 5; 7 ; 11 ; 13 ; 17; 19; 23 ; 29 ; 31; 37; 41; 43; 47; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83; 89 ; 97.

Problème **10 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$: on prendra 2 cm comme unité sur les deux axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée.

Partie A

⋆ Étude d'une fonction f et de sa courbe représentative $\mathscr{C}$
On considère la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative relativement au repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.

2. Montrer que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

3. Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = \ln x + x - 3$.

a. Étudier les variations de u.

b. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[2\,;3]$. Montrer que $2,20 < \alpha < 2,21$.

c. Étudier le signe de $u(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. a. Étudier les variations de f.

b. Exprimer $\ln\alpha$ comme polynôme en α.
Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.
En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}.

5. a. Étudier le signe de $f(x)$.

b. Tracer $\mathscr{C}$.

Partie B
⋆ Étude d'une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

Soit F la primitive de f sur $[0\,;+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.
On appelle (Γ) la courbe représentative de F relativement au repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. a. Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0\,;+\infty[$.

b. Que peut-on dire des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?

2. Calcul de $F(x)$.

a. x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$ (on pourra faire une intégration par parties).

b. Montrer que, pour tout x strictement positif :

$$f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2.$$

c. En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

3. a. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x\ln x) = 0$. En déduire la limite de F en 0.

b. Montrer que, pour x strictement supérieur à 1,

$$F(x) = x\ln x\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x}\right) + 3.$$

En déduire la limite de F en $+\infty$.

c. Dresser le tableau de variation de F.

d. Tracer (Γ) sur le même graphique que $(\mathscr{C})$.

4. Calcul d'une aire
Calculer, en cm^2 l'aire du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^2$.

Baccalauréat S Liban juin 1999

Exercice 1 **4 points**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, l'unité de longueur étant le centimètre, les points A, B, C, D ont pour affixe $3+\text{i}$, $7-i$, $-1-7\text{i}$, $8-4\text{i}$ respectivement.

1. **a.** Placer les points A, B, C, D.

   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. Démontrer que A, B, C, D sont sur un même cercle.
   On précisera le rayon de ce cercle et l'affixe de son centre I.

3. À tout point M d'affixe z, avec z non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{10}{z}$.

   a. Écrire, sous forme algébrique les affixes a', b', c' des points A′, B′, C′ (respectivement associés à A, B, C). Placer les points A′, B′, C′.

   b. Vérifier que : $\dfrac{c'-a'}{b'-a'} = 2$.

   c. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{A}'\text{B}'}, \overrightarrow{\text{A}'\text{C}'}\right)$.

   d. Que peut-on en déduire pour les points A′, B′, C′ ?

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Sur une droite (D) muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, A_0 et B_0 sont les points d'abscisses respectives -4 et 3. Pour tout entier naturel n, on note

$$A_{n+1} \quad \text{le barycentre de} \quad \{(A_n\,;\,1),\ (B_n\,;\,4)\}$$

$$B_{n+1} \quad \text{le barycentre de} \quad \{(A_n\,;\,3),\ (B_n\,;\,2)\}$$

1. Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1.

2. Les points A_n et B_n ont pour abscisses a_n et b_n respectivement.
   Ainsi, $a_0 = -4$ et $b_0 = 3$.
   Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{5}(a_n + 4b_n)$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$.

3. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $3a_n + 4b_n = 0$.

   b. En déduire que : $a_{n+1} = -\dfrac{2}{5}a_n$ et $b_{n+1} = -\dfrac{2}{5}b_n$.

4. **a.** Exprimer a_n et b_n à l'aide de n.

   b. Déterminer les limites de a_n et b_n quand n tend vers $+\infty$.

   c. Interpréter ce résultat à l'aide des points A_n et B_n.

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose : $a = 4n+3$, $b = 5n+2$ et on note d le PGCD de a et b.

1. Donner la valeur de d dans les trois cas suivants : $n = 1$, $n = 11$, $n = 15$.

2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.

3. **a.** Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n + 3 = 7k$.

   b. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $5n + 2 = 7k$.

4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.
Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.
Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

Problème **11 points**

Partie I

Soit a et b deux nombres réels. La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.

b. Vérifier que, pour tout réel x : $\varphi(x) = -\varphi''(x) - 2\varphi'(x)$.

2. Démontrer que φ admet une primitive Φ, définie sur $\mathbb{R}$ par : $\Phi(x) = (Ax+B)\,\mathrm{e}^{-x}$ où A et B sont des nombres réels que l'on exprimera à l'aide de a et b.

3. Déterminer a et b pour que : $\varphi(0) = 5$ et $\varphi'(0) = -3$.
Donner alors $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ et $\Phi(x)$.

Partie II

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 1 cm sur l'axe des ordonnées.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = (2x+5)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Donner une interprétation graphique de cette deuxième limite.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec les axes du repère.

3. Calculer $f'(x)$, déterminer le signe de $f'(x)$ et donner le tableau des variations de la fonction f.

4. Soit I le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.
Une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point I est $y = g(x)$.
Déterminer $g(x)$.

5. On pose $d(x) = f(x) - g(x)$.

a. Étudier le sens de variation de d', calculer $d'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et donner le signe de d'.

b. Étudier le sens de variations de d, calculer $d\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et donner le signe de d.

c. Donner la position de la tangente (T) par rapport à la courbe $(\mathscr{C})$.

6. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente (T).

7. Soit α un réel strictement positif. On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire en cm^2 de la région du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = -\dfrac{5}{2}$ et $x = \alpha$.
Calculer $\mathscr{A}(\alpha)$. (On peut éventuellement utiliser le résultat de la **partie I.**)
Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

Baccalauréat S La Réunion juin 1999

Exercice 1 **5 points**

On dispose d'un cube en bois de 3 cm d'arête, peint en bleu. On le découpe, parallèlement aux faces, en 27 cubes de 1 cm d'arête. On place ces 27 cubes dans un sac.

Partie A

On tire au hasard l'un des 27 cubes du sac. On suppose que les tirages sont équiprobables. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de faces peintes sur le cube tiré.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Partie B

On tire maintenant, au hasard, simultanément deux des 27 cubes du sac. On suppose que les tirages sont équiprobables.

1. Montrer que la probabilité d'avoir, au total, six faces peintes est égale à $\dfrac{28}{351}$.
2. On désigne par n un nombre entier naturel non nul ; après avoir noté le nombre de faces coloriées sur les deux premiers cubes tirés, on les remet dans le sac et on recommence l'opération de manière à effectuer n tirages successifs et indépendants de deux cubes.
   a. Calculer la probabilité p_n pour que l'on obtienne, au total, $6n$ faces peintes.
   b. Déterminer la plus petite valeur de n pour que p_n soit inférieur à 10^{-12}.
   Les résultats des calculs de probabilités seront donnés sous forme fractionnaire.

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On considère l'application f qui, à chaque point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1}{\overline{z}}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
On désigne par A et O les points d'affixes respectives $-\text{i}$ et i.

1. Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre A et de rayon 1, privé de O.
   a. Pour tout nombre complexe z non nul, démontrer que :
   $$\left|z' + \text{i}\right| = \left|z'\right| \quad \text{équivaut à} \quad |z + \text{i}| = 1.$$
   b. En déduire l'ensemble $\mathscr{C}_1'$, image de $\mathscr{C}_1$ par f.
   c. Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_1'$ sur une même figure.
2. Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   a. Montrer que, pour tout nombre complexe z non nul,
   $\left|z' - \text{i}\right|^2 = 2$ équivaut à $|z + \text{i}|^2 = 2$ (on pourra utiliser $\left|Z^2\right| = Z\overline{Z}$).
   b. En déduire l'ensemble $\mathscr{C}_2'$ image de $\mathscr{C}_2$ par f.

c. Tracer $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_2'$ sur la figure précédente.

3. **a.** Donner l'écriture complexe de la similitude directe σ de centre Ω d'affixe $1+\text{i}$ de rapport 2, et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b. Montrer que $\sigma \circ f$ est l'application qui, à chaque point M d'affixe z non nulle, associe le point M'' d'affixe z'' telle que

$$z'' = \frac{2\text{i} + (3-\text{i})\overline{z}}{\overline{z}}.$$

c. À l'aide des questions précédentes, déterminer les ensembles Γ_1 et Γ_2, images respectives de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ par $\sigma \circ f$.

d. Tracer les ensembles Γ_1 et Γ_2 sur la figure précédente.

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).

On considère la courbe paramétrée (Γ), ensemble des points $M(t)$ dont les coordonnées $(x(t),\ y(t))$ sont définies, pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x(t) & = & 5\cos t \\ y(t) & = & 3\sin t \end{array}\right.$$

Partie 1 On se propose, dans cette partie, de tracer la courbe (Γ).

1. Recherche d'un intervalle d'étude.

a. Par quelle transformation géométrique le point $M(-t)$ est-il l'image du point $M(t)$ de (Γ) ?

b. Par quelle transformation géométrique le point $M(\pi - t)$ est-il l'image du point $M(t)$ de (Γ) ?

c. Expliquer comment, pour tracer ta courbe (Γ), on peut limiter l'étude à l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Tracé de (Γ).

a. étudier le sens de variation de chacune des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

b. Tracer la courbe (Γ) avec ses tangentes aux points $M(0)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Propriété géométrique liée à la courbe (Γ)

Soient F et F$'$ les points d'affixes respectives 4 et -4.

Le point M, de paramètre t, appartenant à la courbe (Γ), on note $z = x(t) + \text{i}y(t)$ son affixe. Soit $\overrightarrow{W}$ le vecteur d'affixe $w = -5\sin t + 3\text{i}\sin t$.

1. Démontrer que $16 - z^2 = w^2$.

2. En déduire que $\left(\overrightarrow{M\text{F}}, \overrightarrow{W}\right) = \left(\overrightarrow{W}, \overrightarrow{\text{F}'M}\right)$ modulo 2π.

3. Comment la propriété précédente permet-elle de construire la tangente en tout point de la courbe? Réaliser cette construction pour le point de paramètre $\frac{\pi}{3}$.

Problème **5 points**

L'objet du problème est d'étudier une fonction f puis d'examiner des intégrales qui en sont issues.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité graphique 3 cm).

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) ;$$

on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$ on a :

   $$f(x) = x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right).$$

   c. En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$.

   d. Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et (Δ).
2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
3. Tracer la droite (Δ) et la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie B

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$ on pose

$$F(x) = \int_0^x \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2t}\right)\,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1. Soit x un réel strictement positif. En utilisant la question **1** de la partie A, donner une interprétation géométrique de $F(x)$.
2. Étudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
3. Soit a un réel strictement positif.

   a. Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1~;~1+a]$, on a

   $$\frac{1}{1+a} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant 1.$$

   b. En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction logarithme, établir que $\dfrac{a}{1+a} \leqslant \ln(1+a) \leqslant a$.
4. Soit x un réel strictement positif.

   Déduire de la question **3** :

   $$\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t \leqslant F(x) \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t.$$

   puis $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2t}\right) \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$.
5. On admet que la limite de $F(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un nombre réel noté ℓ.

   Établir que $\dfrac{1}{2}\ln 2 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.
6. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2t}\right)\,\mathrm{d}t$.

   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2t}\right)\,\mathrm{d}t$.

   (On pourra utiliser le sens de variations de la fonction h, définie sur $[0~:~+\infty[$ par $h(t) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2t}\right)$).

   b. Déterminer la limite de la suite (u_n).
7. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

   a. Exprimer S_n à l'aide de F et n.

   b. La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner sa limite.

Durée : 4 heures

ൠ Baccalauréat S Polynésie juin 1999 ൠ

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux évènements suivants :
A : « On obtient des boules des deux couleurs » ;
B : « On obtient au plus une blanche ».

1. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement : « Toutes les boules tirées sont de même couleur ».
   b. Calculer la probabilité de l'évènement : « On obtient exactement une boule blanche ».
   c. En déduire que les probabilités $p(A\cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :

$$p(A\cap B)=\frac{n}{2^n},\quad p(A)=1-\frac{1}{2^{n-1}},\quad p(B)=\frac{n+1}{2^n}.$$

2. Montrer que $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ si, et seulement si,

$$2^{n-1}=n+1.$$

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout n entier naturel supérieur ou égal à deux par

$$u_n=2^{n-1}-(n+1).$$

   Calculer u_2, u_3, u_4.
   Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
4. En déduire la valeur de l'entier n tel que les évènements A et B soient indépendants.

Exercice 2 **4 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E)\ :\ z^3-8=0$.
2. On considère dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}}=-1+\mathrm{i}\sqrt{3},\quad z_{\mathrm{B}}=2\quad \text{et}\quad z_{\mathrm{C}}=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

   a. Écrire z_{A} et z_{C} sous la forme trigonométrique.
   b. Placer les points A, B et C.
   c. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z'=\mathrm{e}^{2i\frac{\pi}{3}}z.$$

   a. Caractériser géométriquement l'application f.

b. Déterminer les images des points A et C par f.
En déduire l'image de la droite (AC) par f.

Exercice 2 **4 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.
2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier

$$A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}.$$

a. Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p, par 7 ?
b. Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.
c. Étudier le cas où $p = 3n + 2$.

4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :

$$a = \overline{1\,001\,001\,000} \quad b = \overline{1\,000\,100\,010\,000}.$$

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p.
Sont-ils divisibles par 7 ?

Problème **11 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{2x-2}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On prendra 5 cm comme unité.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b. Vérifier que, pour tout réel x non nul : $f(x) = x\left[1 - 2\mathrm{e}^{-2} \times \left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2x}\right)\right]$.
2. Déterminer f'. Étudier le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f.
3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et (D).
4. On note A le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe $(\mathscr{C})$.
5. **a.** On note I l'intervalle $[0\,;0,5]$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera a.
b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de a.
6. Construire la courbe $(\mathscr{C})$, l'asymptote (D) et la tangente (T).

Partie B
Détermination d'une valeur approchée de a.

On définit dans $\mathbb{R}$ la suite (u_n) par :

$$\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \mathrm{e}^{2u_n-2} \end{array}\right.$$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{2x-2}$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$.
En déduire $g(a)$.

2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, on a :

$$\left|g'(x)\right| \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

3. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x)$ appartient à I.

4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que, pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}} |u_n - a|$.

5. Démontrer, par récurrence, que : $|u_n - a| \leqslant \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n$.

6. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

7. Déterminer un entier naturel p tel que : $\left|u_p - a\right| < 10^{-5}$.

8. En déduire une valeur approchée de a à 10^{-5} près : on expliquera l'algorithme utilisé sur la calculatrice.

Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 1999

EXERCICE 1 **4,5 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice on considère 20 boules indiscernables au toucher (10 noires et 10 blanches) et deux urnes A et B dans chacune desquelles on placera 10 boules suivant un mode qui sera précisé dans chaque question.

1. On choisit dix boules au hasard et on les met dans l'urne A. On place les dix autres boules dans l'urne B.
   a. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes ne contiennent chacune que des boules de même couleur ?
   b. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune 5 boules blanches et 5 boules noires ?
2. Soit x un entier tel que $0 \leqslant x \leqslant 10$. On place maintenant x boules blanches et $10 - x$ boules noires dans l'urne A et les $10 - x$ boules blanches et x boules noires restantes dans l'urne B. On procède à l'expérience E :
   On tire au hasard une boule de A et on la met dans B, puis on tire au hasard une boule de B et on la met dans A.
   On désigne par M l'évènement « chacune des deux urnes a la même composition avant et après l'expérience ».
   a. Pour cette question **a.**, on prend $x = 6$.
   Quelle est la probabilité de l'évènement M ?
   b. Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à :
   $$\frac{1}{55}\left(-x^2 + 10x + 5\right).$$
   c. Pour quelles valeurs de x l'évènement M est-il plus probable que l'évènement contraire $\overline{\text{M}}$?

EXERCICE 2 **5,5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Pour tout point P, on convient de noter z_P son affixe.

1. On considère dans l'ensemble des complexes l'équation (E) : $z^3 + 8 = 0$.
   a. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que $z^3 + 8 = (z+2)(az^2 + bz + c)$ pour tout complexe z.
   b. Résoudre l'équation (E) (on donnera les solutions sous la forme $x + y\text{i}$, avec x et y réels).
   c. Écrire ces solutions sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$, où r est un réel positif.
2. On considère les points A, B, C d'affixes respectives - 2, 1 - i$\sqrt{3}$ et 1 + i$\sqrt{3}$, le point D milieu de [OB] et la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
   a. Montrer que R(A) = B, R(B) = C et R(C) = A. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.
   Placer A, B, C, D dans le plan.
   b. On considère le point L défini par $\overrightarrow{\text{AL}} = \overrightarrow{\text{OD}}$. Déterminer son affixe z_{L}.
   Déterminer un argument de $\dfrac{z_{\text{L}}}{z_{\text{D}}}$.
   En déduire que le vecteur $\overrightarrow{\text{OL}}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\text{OD}}$ et au vecteur $\overrightarrow{\text{AL}}$.
   Montrer que L est sur le cercle de diamètre [AO].
   Placer L sur la figure.

EXERCICE 2 **5,5 points**

Enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On donne le point A$(6\,;\,0)$ et le point A$'(0\,;\,2)$.

À tout point M de l'axe des abscisses différent de A on associe le point M' tel que :

$$\text{A}M = \text{A}'M' \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\text{A}M}, \overrightarrow{\text{A}'M'}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{mod } 2\pi.$$

On admet l'existence et l'unicité de M'.

On réalisera une figure avec, pour unité graphique 0,5 cm et pour cette figure, on prendra -4 pour abscisse de M.

1. Soit M un point de l'axe des abscisses différent de A.

  a. Placer le point M' sur la figure.

  b. Pour cette question on pourra donner une démonstration purement géométrique ou utiliser les nombres complexes.

  Démontrer qu'il existe une unique rotation, dont on précisera le centre, noté I et l'angle, qui transforme A en A$'$ et M en M'.

  Placer I sur la figure.

  c. Démontrer que la médiatrice de $[MM']$ passe par I.

2. On veut déterminer et construire les couples de points $(M,\ M')$ vérifiant la condition supplémentaire $MM' = 20$.

  a. Calculer IM et démontrer qu'il existe deux couples solutions : $\left(M_1,\ M_1'\right)$ et $\left(M_2,\ M_2'\right)$.

  b. Placer ces quatre points sur la figure.

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats Étude d'une fonction et résolution d'une équation liée à cette fonction.

Dans tout le problème, on considère la fonction réelle f de la variable réelle x définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité graphique : 4 cm).

Partie A

Étude du sens de variation de la fonction f

1. **a.** Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $]0\ ;\ +\infty[$. En déduire le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.

   b. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0.

   c. Dresser le tableau de variations de f.

2. Montrer que, pour tout x élément de l'intervalle I = [0,7 ; 0,9], $f(x)$ est aussi élément de I et que $|f'(x)| \leqslant 0,9$.

Partie B

On se propose dans cette partie de montrer que l'équation $f(x) = x$ a une solution unique dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et de donner une valeur approchée de cette solution à l'aide d'une suite.

1. On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x.$$

   a. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en 0.

   b. Montrer que g est une fonction strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, que l'on notera α, appartenant à l'intervalle I = [0,7 ; 0,9]. Montrer que cette équation n'a pas d'autre solution dans $]0\ ;\ +\infty[$.

   d. Que peut-on en déduire pour l'équation $f(x) = x$? Sur le graphique joint en annexe, que l'on rendra avec la copie, figure la partie de la courbe $\mathcal{C}$ dont les points ont une abscisse comprise entre 0,7 et 0,9 et le segment [AB], où A et B sont les points de coordonnées respectives (0,7 ; 0,7) et (0,9 ; 0,9). Que représente le point de coordonnées $(\alpha\ ;\ f(\alpha))$ pour la courbe $\mathcal{C}$ et le segment [AB] ? Placer ce point sur le graphique joint en annexe.

2. On considère la suite réelle (a_n) définie par $a_0 = 0,7$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ pour tout entier naturel n.

   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, a_n est élément de I.

   b. Construire sur le graphique joint en annexe les éléments de (a_n) pour n = 1, 2, 3, 4. Justifier que la suite n'est pas monotone.

   c. Démontrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que

$$|a_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,9\,|a_n - \alpha| \text{ pour tout entier } n.$$

d. Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que

$$|a_n - \alpha| \leqslant (0,9)^n \times 0,2 \text{ pour tout entier } n.$$

En déduire que la suite (a_n) converge vers α.

3. a. Montrer que si $x < \alpha$ alors $f(x) > \alpha$ et que si $x > \alpha$ alors $f(x) < \alpha$. On admet que, pour tout entier naturel n pair, $a_n < \alpha$ et que pour tout entier naturel n impair, $a_n > \alpha$.

b. Le tableau de valeurs suivant a été écrit par un élève ayant recopié les résultats donnés par un logiciel informatique pour le calcul des valeurs approchées des termes de la suite (a_n), en ne retenant que les 5 premières décimales. Or, une valeur a été incorrectement recopiée.

Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle on est sûr que la valeur approchée écrite de a_n est incorrecte ?

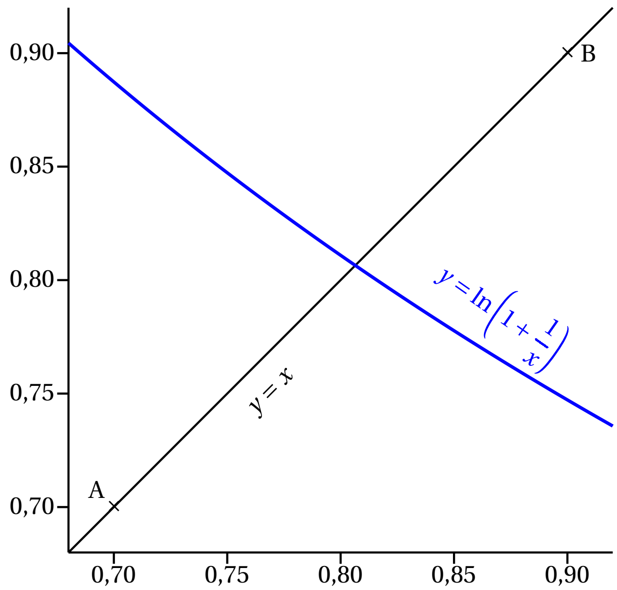
Pourquoi ? Soit p cette valeur. Calculer à la calculatrice une valeur approchée de a_p et vérifier la valeur approchée de a_{p+1} écrit dans le tableau.

Peut-on affirmer à l'aide de ce tableau que $0,80640 < \alpha < 0,80651$?

$n =$	a_n	$n =$	a_n
0	0,700 00	12	0,805 23
1	0,887 30	13	0,807 31
2	0,754 71	14	0,805 88
3	0,843 71	15	0,806 86
4	0,781 72	16	0,806 19
5	0,823 83	17	0,806 65
6	0,794 72	18	0,806 33
7	0,814 61	19	0,806 55
8	0,800 91	20	0,806 40
9	0,810 29	21	0,806 50
10	0,808 84	22	0,806 43
11	0,808 26		

Annexe 1

Partie de la courbe $\mathscr{C}$ dont les points ont une abscisse comprise entre 0,69 et 0,91 et le segment [AB], où A et B sont les points de coordonnées respectives (0,7 ; 0,7) et (0,9 ; 0,9).



∽ Baccalauréat S Métropole septembre 1999 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
Une urne contient trois boules noires et une boule blanche. On considère l'expérience suivante :
On lance un jeton parfaitement équilibré, présentant une face noire et une face blanche. Si le jeton tombe sur la face blanche, on ajoute une boule blanche dans l'urne; si le jeton tombe sur la face noire, on ajoute une boule noire dans l'urne.
Puis on tire simultanément, et au hasard, trois boules de l'urne.

1. On appelle E_0 l'évènement : « Aucune boule blanche ne figure parmi les trois boules tirées » et B l'évènement : « Le jeton est tombé sur la face blanche ».
   a. Calculer $P(E_0 \cap B)$, $P(E_0 \cap \overline{B})$, puis $P(E_0)$.
   b. On tire trois boules de l'urne, aucune boule blanche ne figure dans ce tirage. Quelle est la probabilité que le jeton soit tombé sur la face noire?
2. On appelle E_1 l'évènement : « Une boule blanche et une seule figure parmi les trois boules tirées » et B l'évènement : « Le jeton est tombé sur la face blanche ».
   a. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.
   b. On effectue successivement quatre fois l'expérience décrite au début, qui consiste à lancer le jeton, puis à tirer les trois boules de l'urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir, au moins une fois, une et une seule boule blanche?

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm). On note Z_M l'affixe d'un point M.
Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe 4i.

1. Soit θ un réel de $[0 ; 2\pi[$ et r un réel strictement positif.
   On considère le point E d'affixe $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ et F le point tel que OEF est un triangle rectangle isocèle vérifiant $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   Quelle est, en fonction de r et θ, l'affixe de F?
2. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice. On choisira, uniquement pour cette figure :
$$\theta = 5\frac{\pi}{6} \text{ et } r = 3.$$
3. On appelle P, Q, R, S les milieux respectifs des segments [AB], [BE], [EF], [FA].
   a. Prouver que PQRS est un parallélogramme.
   b. On pose : $Z = \dfrac{Z_R - Z_Q}{Z_Q - Z_P}$.
   Déterminer le module et un argument de Z. En déduire que PQRS est un carré.
4. **a.** Calculer, en fonction de r et θ, les affixes respectives des points P et Q.
   b. Quelle est, en fonction de r et θ, l'aire du carré PQRS?

c. r étant fixé, pour quelle valeur de θ cette aire est-elle maximale ?
Quelle est alors l'affixe de E ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Soit le repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ du plan complexe. Les points A, B et C sont définis par leurs affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}\ ;\ z_{\mathrm{B}} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}\ ;\ z_{\mathrm{C}} = 2 + \sqrt{3} + 3\mathrm{i}.$$

1. Faire la figure en choisissant pour unité graphique 2 cm. (On placera l'origine sur la gauche de la feuille).
2. Prouver que OAB est un triangle équilatéral direct. Soit G le centre de gravité du triangle OAB. Déterminer l'affixe z_{G} de G.
   Dans la suite de l'exercice, on étudie deux isométries transformant [OA] en [GC].
3. Soit a et b deux nombres complexes et R l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = az + b$.
   a. Déterminer a et b pour que R(O) = G et R(A) = C.
   b. Prouver que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
   c. Prouver que les droites (OA) et (GC) sont perpendiculaires. Que peut-on dire des points G, B et C ?
   d. Construire, en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par R.
4. Soit a' et b' deux nombres complexes et f l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a'\overline{z} + b'$.
   a. Déterminer a' et b' pour que $f(\mathrm{O}) = \mathrm{G}$ et $f(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$.
   b. Soit I le milieu du segment [OG]. Déterminer le point $f(\mathrm{I})$. f est-elle une réflexion ?
   c. Construire en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par f.

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats
Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A :

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.
2. Calculer $f'(x)$ en fonction de x. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $\ln x(2-\ln x)$. Déterminer le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f dans $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
4. On pose pour $p \geqslant 1$, $I_p = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$

b. Prouver, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier p supérieur ou égal à 1 :

$$I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p.$$

c. En utilisant les résultats précédents, calculer successivement $I_2,\ I_3,\ I_4$.

d. On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de $\mathscr{C}$, d'abscisses comprises entre 1 et e^2. Le point M de $\mathscr{C}$, d'abscisse x, décrit alors un cercle de rayon $f(x)$. Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unités de volume.

Partie B :

Soit a un réel strictement positif et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a. Soit T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.

1. Écrire une équation de T_a.
2. Déterminer les réels a, pour lesquels T_a passe par l'origine O du repère.
3. Donner une équation de chacune des tangentes à $\mathscr{C}$, passant par O.
   Tracer ces tangentes sur la figure.

Partie C :

On étudie maintenant l'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite Δ d'équation $y = \dfrac{1}{e^2}x$.

1. On pose pour x strictement positif, $\varphi_1(x) = x - e\ln x$.
   Montrer que φ_1 est strictement croissante sur $]e, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0 ; e[$.
2. On pose pour x strictement positif, $\varphi_2(x) = x + e\ln x$.
   a. Étudier le sens de variation de φ_2 sur $]0,\ +\infty[$.
   b. Prouver que $\varphi_2(x) = 0$ a une solution unique sur $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$. On appelle α cette solution ; donner un encadrement de α, d'amplitude 10^{-1}.
   c. En déduire que $\varphi_2(x) = 0$ a une seule solution sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de Δ.

∽ Baccalauréat S Sportifs de haut-niveau ∾ septembre 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

Une urne contient quatre boules rouges, quatre boules blanches et quatre boules noires.

On prélève simultanément quatre boules dans l'urne. Les prélèvements sont supposés équiprobables.

1. Calculer la probabilité d'un prélèvement unicolore.
2. **a.** Quelle est la probabilité d'un prélèvement bicolore composé de boules rouges et blanches ?

   b. Démontrer que la probabilité d'un prélèvement bicolore est $\dfrac{68}{165}$.
3. Déduire des résultats précédents la probabilité d'un prélèvement tricolore.
4. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules rouges sachant que le prélèvement est bicolore ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On désigne par E l'ensemble des points M d'affixe z tels que z^3 soit un nombre réel positif ou nul.

1. **a.** Le point A d'affixe $a = \text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$ appartient-il à E ?

   b. On note B le point d'affixe $b = -1 + \text{i}\sqrt{3}$.
   Calculer un argument de b et montrer que B appartient à E.
2. On suppose $z \neq 0$ et on note θ un argument de z. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que z^3 soit un nombre réel positif.
3. Après avoir vérifié que le point O appartient à E, déduire des résultats précédents que E est la réunion de trois demi-droites que l'on déterminera. Placer les points A et B et représenter E sur une figure.
4. À tout point P d'affixe $z \neq 0$, on associe les points Q d'affixe iz et R d'affixe z^4.
   On note F l'ensemble des points P tels que l'angle $(\overrightarrow{\text{O}Q}, \overrightarrow{\text{O}R})$ ait pour mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.
   Montrer que F est l'ensemble E privé du point O.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

1. On note A, B et C les points d'affixes respectives 2i, -1 + 4i et 5 + 2i.

   On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{\text{BC}}$, la symétrie S d'axe (AB) et la transformation $f = t \circ$ S.

   On désigne par A′ et B′ les images respectives de A et B par f. Calculer les affixes de A′ et B′ et placer les points A, B, C, A′ et B′ sur une figure.
2. On rappelle que l'écriture complexe d'un antidéplacement est de la forme $z' = a\overline{z} + b$ où a et b sont deux nombres complexes et $|a| = 1$.

   À tout point M d'affixe z, f associe le point M' d'affixe z'.

   Justifier que f est un antidéplacement et démontrer que :

$$z' = \frac{-3-4\text{i}}{5}\overline{z} + \frac{38-6\text{i}}{5}.$$

3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. La transformation f est-elle une symétrie ?
4. On appelle D le point d'affixe 3 + 6i, Δ la médiatrice de [BD] et S′ la symétrie d'axe Δ.
   a. Montrer que les droites Δ et (AB) sont parallèles. Déterminer S $\circ$ S′.

   b. Montrer que $f \circ$ S′ est la translation, notée t', de vecteur $\overrightarrow{\text{DC}}$. En déduire que $f = t' \circ$ S′.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Ce problème comporte trois parties **A, B** et **C**. Les parties **B** et **C** sont indépendantes.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 4 cm).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \text{e}^{-x}\right).$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = -x + \ln\left(1 + \text{e}^{x}\right)$.

   En déduire que la courbe Γ admet, en - ∞, une asymptote, notée (Δ).
4. Tracer (Δ) et Γ.

Partie B

1. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-1}{1+\text{e}^{x}}$.
2. On note A, B et C les points de Γ d'abscisses respectives 0, 1 et -1.

   On appelle T_0, T_1 et T_{-1} les tangentes respectives à la courbe Γ aux points A, B et C.

   a. Démontrer que la droite (BC) est parallèle à la droite T_0.

   b. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de T_1 et T_{-1}.

Partie C

1. Soient u et v les fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$u(t) = \ln(1+t) - t \quad \text{et} \quad v(t) = \ln(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2.$$

Étudier les variations de u et v. En déduire que, pour tout nombre réel t positif, on a :

$$t - \frac{1}{2}t^2 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$$

2. Soit n un entier naturel ($n \geqslant 1$).
On considère le nombre $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

a. Démontrer que :

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}-1} - \frac{1}{2}.\frac{1-\mathrm{e}^{-2n}}{\mathrm{e}^2-1} \leqslant S_n \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}-1}.$$

b. On admet que la suite (S_n) a une limite réelle L.
Montrer que $\left|\mathrm{L} - \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}\right| \leqslant \dfrac{1}{2\left(\mathrm{e}^2-1\right)}$.

Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 1999

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un appareil électronique envoie à une imprimante un code qui est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 (par exemple : 1011).

1. **a.** Combien l'appareil peut-il fabriquer de codes distincts ?

On supposera dans ce qui suit que tous ces codes ont la même probabilité d'être produits.

   b. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de 1 figurant dans le code. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2. Une imprimante a été choisie au hasard dans une série.

   À la suite d'études antérieures, on a observé cinq cas possibles. Dans le cas E_0, l'imprimante n'écrit que des 0, quel que soit le code émis par l'appareil. Pour chaque élément n de l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3\}$, dans le cas E_n l'imprimante écrit correctement les n premiers caractères du code et n'écrit ensuite que des 0.

   Par exemple, lorsque E_2 survient, tous les codes commençant par 01 sont imprimés 0100. Dans le cas E_4, l'imprimante fonctionne correctement.

   L'état de l'imprimante sera donc considéré comme le résultat d'une épreuve aléatoire ayant cinq issues possibles $E_0,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4$. On admet que, pour chaque élément n de l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, $P(E_n) = 32\times 10^{-3}$. Le code émis par l'appareil est indépendant de l'état de l'imprimante.

   a. Calculer la probabilité $P(E_4)$. Pour la suite, C désigne l'évènement : « le code imprimé est identique à celui émis par l'appareil ».

   b. On suppose que E_0 se produit. Quelle est la probabilité $P(C/E_0)$ que le code imprimé soit quand même celui que l'appareil a envoyé ?
   En déduire la probabilité $P(C\cap E_0)$.

   c. Déterminer de même $P(C/E_n)$ puis $P(C\cap E_n)$ pour tout élément n de l'ensemble $\{1,\ 2, 3, 4\}$. En déduire $P(C)$.

   d. Si le code imprimé est exactement celui émis par l'appareil, quelle est la probabilité que E_2 se soit produit ?

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\,\mathrm{d}x$ et, pour tout nombre n entier naturel non nul,
$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin 3x\,\mathrm{d}x$.

1. **a.** Calculer I_0.

   b. En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.

2. **a.** En effectuant deux intégrations par parties successives, déterminer, lorsque $n \geqslant 1$, I_{n+2} en fonction de I_n.

   b. Vérifier que $I_3 = \dfrac{\pi^2}{108} - \dfrac{2}{27}$.

3. Sans calculer l'intégrale I_n,

a. montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone ;

b. pour tout nombre n entier naturel non nul, comparer I_n à $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n\,\mathrm{d}x$.

c. déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On considère l'équation

$$(1) \qquad : \quad 20b - 9c = 2.$$

où les inconnues b et c appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

1. **a.** Montrer que si le couple $(b_0$; c_0 d'entiers relatifs est une solution de l'équation (1), alors c_0 est un multiple de 2.

   b. On désigne par d le p.g.c.d. de $|b_0|$ et $|c_0|$. Quelles sont les valeurs possibles de d ?

2. Déterminer une solution particulière de l'équation (1), puis déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.

3. Déterminer l'ensemble des solutions $(b$; $c)$ de (1) telles que p.g.c.d.$(b$; $c) = 2$.

4. Soit r un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. Le nombre entier naturel P, déterminé par $P = \alpha_n r^n + \alpha_{n-1} r^{n-1} + ... + \alpha_1 r + \alpha_0$, où $\alpha_n,\ \alpha_{n-1},\ \dots,\alpha_1,\ \alpha_0$ sont des nombres entiers naturels vérifiant $0 < \alpha_n < r$, $0 \leqslant \alpha_{n-1} < r$, ..., $0 \leqslant \alpha_0 < r$ est noté $\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1\alpha_0}^{(r)}$; cette écriture est dite « écriture de P en base r ». Soit P un nombre entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^{(6)}$ et $\overline{bbaa}^{(4)}$ (en base six et en base quatre respectivement).
   Montrer que $a + 5$ est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de a, puis de b et de c.
   Donner l'écriture de P dans le système décimal.

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0$; $+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + x - \frac{1 + \ln x}{x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On considère la fonction auxiliaire φ définie sur $]0$; $+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 2x^3 + x^2 + \ln x.$$

   a. Étudier le sens de variations de φ.

   b. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution unique qu'on appellera α. Trouver le nombre entier naturel p tel que :

$$p \times 10^{-2} \leqslant \alpha < (p+1) \times 10^{-2}.$$

   c. En déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathscr{C}$?
   c. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
   d. Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + x.$$

   On appelle Γ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Préciser les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.
   e. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0,2	0,4	2	2,5
$f(x)$									

   Les valeurs de $f(x)$ seront données à 10^{-2} près.
   f. Tracer $\mathscr{C}$ et Γ.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Unité graphique : 4 cm. À tout point M d'affixe non nulle z, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = z^2 + z - \frac{1 + \ln|z|}{z}.$$

On dit que M' est l'image de M.

1. On considère les points P et Q d'affixes respectives $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$ et i.
   Calculer les affixes des images P′ et Q′ de ces points. Placer P, Q, P′ et Q′.
2. **a.** Δ est la demi-droite constituée des points d'affixe réelle strictement positive. Soit M un point de Δ, d'affixe x. Quelle est l'affixe de son image M' ?
   b. En utilisant le tableau des variations de la fonction f, indiquer la valeur de x pour laquelle l'abscisse de M' est minimum.
   c. Définir et représenter l'ensemble Δ' des points M' lorsque M décrit la demi-droite Δ.
3. Le point M décrit maintenant le cercle E de centre O et de rayon 1.
   On note θ un argument de z, θ décrivant $[-\pi ; \pi]$.
   a. Montrer qu'une représentation paramétrique de l'ensemble E′ des points M est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(\theta) & = & \cos 2\theta \\ y(\theta) & = & \sin 2\theta + 2\sin\theta \end{array}\right.$$

   b. Que peut-on dire des points E′ de paramètres respectifs θ et $-\theta$?
   En déduire qu'il suffit de construire la partie E′ correspondant à l'ensemble $[0 ; \pi]$ des valeurs de θ (partie qu'on désignera par E'_1 pour obtenir E′.
   c. Étudier conjointement les variations sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ des fonctions x et y.
   d. Préciser les points d'intersection de E'_1 avec chacun des axes de coordonnées.
   e. Déterminer les points où E'_1 admet une tangente parallèle à l'un des axes de coordonnées. On admet qu'au point correspondant à la valeur π du paramètre, E'_1 admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
   f. Tracer E′ en utilisant avec précision les éléments obtenus précédemment.

Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie décembre 1999

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(3 ; 0 ; 1), B(0 ; −1 ; 2) et C(1 ; −1 ; 0).

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{\text{AB}} \wedge \overrightarrow{\text{AC}}$. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.
2. Soit D le point de coordonnées (1, 1, - 2). Calculer le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{\text{DA}}$ et du vecteur $\overrightarrow{\text{DB}} \wedge \overrightarrow{\text{DC}}$.
3. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par D et dont un vecteur directeur est $\vec{n}$.
   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de cette droite avec le plan ABC.
   c. Calculer DH (distance du point D au plan ABC).
4. Calculer les coordonnées du point D′, symétrique du point D par rapport au plan ABC.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique : 2 cm.

1. Tracer les cercles de centre O et de rayons 1 et 2. Placer les points A, B, et D d'affixes respectives $\sqrt{3}+\text{i}$, $\sqrt{3}-\text{i}$ et $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$.
2. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et la translation T de vecteur d'affixe 1.
   a. Déterminer les affixes $z_{\text{A}'}$ et $z_{\text{B}'}$ des points A′ et B′, images respectives des points A et B par la rotation R.
   b. Déterminer l'affixe $z_{\text{D}'}$, du point D′, image du point D par la translation T.
   c. Placer les points A′, B′ et D′.
3. Déterminer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_{\text{A}'}-z_{\text{B}'}}{z_{\text{D}'}}$.
   Justifier que la droite (OD′) est une médiatrice du triangle OA′B′.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n+1$ et $M = 9n-1$.

1. On suppose que n est un entier pair. On pose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.
   a. Montrer que M et N sont des entiers impairs.
   b. En remarquant que $N = M+2$, déterminer le PGCD de M et N.
2. On suppose que n est un entier impair. On pose $n = 2p+1$, avec p entier naturel.
   a. Montrer que M et N sont des entiers pairs.

b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'entier $81n^2 - 1$.

a. Exprimer l'entier $81n^2 - 1$ en fonction des entiers M et N.

b. Démontrer que si n est pair alors $81n - 1$ est impair.

c. Démontrer que $81n^2 - 1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$y' - 2y = e^{2x}, \quad (E).$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = 0 \quad (E_0)$.

3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).

4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Partie B - Étude d'une fonction

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)e^{2x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

2. Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.
Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x.

3. Soit un réel α strictement inférieur à -1. On considère le domaine plan $\mathcal{D}$ limité par $\mathcal{C}$, les droites d'équation $x = \alpha$, $x = -1$ et l'axe des abscisses.

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire $\mathcal{D}(\alpha)$ du domaine $\mathcal{D}$.

b. Déterminer la limite de $\mathcal{D}(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

Partie C - Résolution d'une équation

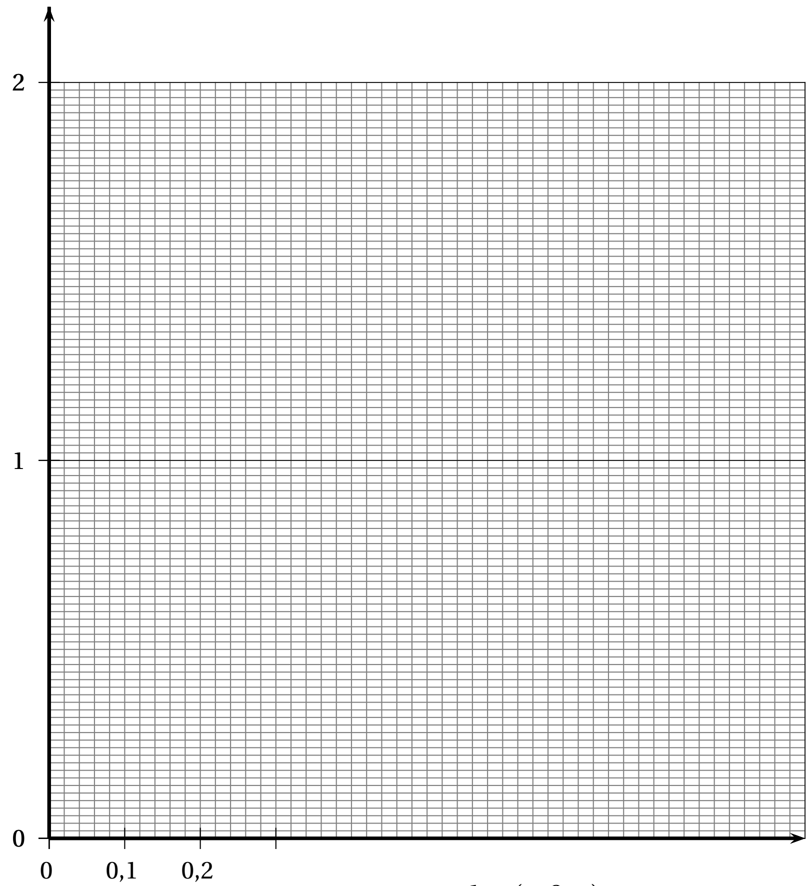
1. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle [0,2 ;0,3].

2. Recopier, puis compléter le tableau suivant :

x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$f(x)$						

Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies avec une précision de 10^{-2} près par défaut.

3. Sur le papier millimétré, ci-dessous, où les unités sont de 10 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées, tracer l'arc de la courbe $\mathcal{C}$ pour x appartenant à $[0 ; 0,3]$.
Faire apparaître x_0 sur le graphique.



Démontrer que x_0 satisfait à la relation : $x_0 = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2}{x_0+1}\right)$.

Partie D - Approximation de x_0

1. Soit h la fonction définie sur I = [0,2 ; 0,3] par

$$h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{x_0+1}\right).$$

a. Démontrer que pour tout x de I, $h(x)$ appartient à I.

b. Démontrer que pour tout x de I, $|h'(x)| \leqslant 0,42$.

2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0,2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$.

a. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - x_0| \leqslant 0,42\,|u_n - x_0|$.
À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déduire que, pour tout entier naturel n on a : $u_n - x_0| \leqslant 0,1 \times (0,42)^n$.

b. Déterminer la limite de (u_n).

c. Déterminer un entier p tel que $|u_p - x_0| \leqslant 10^{-5}$.

d. On note b la valeur de u_p affichée sur la calculatrice. Déterminer β valeur décimale approchée par défaut de b à 10^{-5} près.
Classer par ordre croissant les réels $f(\beta)$, $f(\beta + 10^{-5})$ et 2.
En déduire la valeur décimale approchée par défaut de x_0 à 10^{-5} près.