Baccalauréat S 2001

L'intégrale d'avril à décembre 2001

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

∽ Baccalauréat S Pondichéry mai 2001 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

1. On pose, pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b. Prouver que, pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c. Montrer, en utilisant une intégration par parties que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

2. On considère la suite réelle (a_n), définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_n = \frac{1}{\mathrm{e}} + (-1)^n I_n.$$

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z différent de 1, associe le nombre complexe

$$f(z) = \frac{2-\mathrm{i}z}{1-z}.$$

L'exercice étudie quelques propriétés de f.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm, dans lequel seront représentés les ensembles trouvés aux questions **1** et **2**.
A est le point d'affixe 1 et B celui d'affixe $-2\mathrm{i}$.

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.
Écrire $f(z)$ sous forme algébrique. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel et représenter cet ensemble.

2. On pose $z' = f(z)$.

a. Vérifier que i n'a pas d'antécédent par f et exprimer, pour z' différent de i, z en fonction de z'.

b. M est le point d'affixe z (z différent de 1) et M' celui d'affixe z' (z' différent de i).

Montrer que $\mathrm{O}M = \dfrac{M'\mathrm{C}}{M'\mathrm{D}}$ où C et D sont les points d'affixes respectives 2 et i.

c. Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A, son image M' appartient à une droite fixe que l'on définira géométriquement.

d. Montrer que, si M est un point de l'axe des réels, différent de O et de A, alors M' appartient à la droite (CD).

EXERCICE 2 (SPÉCIALITÉ) **4 points**

1. On considère l'équation (1) d'inconnue $(n,\ m)$ élément de $\mathbb{Z}^2$:

$$11n - 24m = 1.$$

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. recherche du P.G.C.D. de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

b. $(n,\ m)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire

$$\left(10^{11n} - 1\right) - 10\left(10^{24m} - 1\right) = 9.$$

c. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.
(on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^0\right)$, valable pour tout entier naturel n non nul).
Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$\left(10^{11} - 1\right)N - \left(10^{24} - 1\right)M = 9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

PROBLÈME **12 points**

Dans tout le problème, $(\mathscr{C})$ désigne la courbe d'équation $y = \ln x$ représentant la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O et d'unité graphique 4 cm.
Question préliminaire : Tracer avec soin mais sans étude de la fonction, la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

Partie A

1. a. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à $(\mathscr{C})$ au point I d'abscisse 1.

b. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x - 1 - \ln x.$$

c. En déduire la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à Δ.

2. a. Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par $x - \ln x$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

b. M et N sont les points de même abscisse x des courbes $(\mathscr{C})$ et (D) respectivement.
Déterminer la plus petite valeur (exprimée en cm) prise par la distance MN lorsque x décrit l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B

1. Soit M le point d'abscisse x de la courbe $(\mathscr{C})$. Exprimer la distance OM de l'origine à M en fonction de x.
2. *Étude de la fonction auxiliaire u définie sur* $]0~;~+\infty[$ *par* $u(x) = x^2 + \ln x$.
   a. Justifier les limites de $u(x)$ en 0 et en $+\infty$ ainsi que le sens de variations de u.
   b. Montrer qu'il existe un réel α et un seul tel que $u(\alpha) = 0$.
   Montrer que α est compris entre 0,5 et 1 puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   c. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant la valeur de x.
3. *Étude de la fonction g définie sur* $]0~;~+\infty[$ *par* $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$.
   Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \dfrac{2}{x}u(x)$.
   En déduire le tableau de variations de g.
4. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe $(\mathscr{C})$ et en donner une valeur approchée (exprimée en cm) en utilisant pour α la valeur centrale de l'encadrement trouvé à la question **2. b**.
5. A étant le point d'abscisse α de $(\mathscr{C})$, démontrer que la tangente en A est perpendiculaire à la droite (OA).

Partie C Étude d'une suite

1. Montrer que le réel α défini dans **la partie B** est solution de l'équation $h(x) = x$, où h est la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par
$$h(x) = x - \frac{1}{4}\left(x^2 + \ln x\right).$$
2. **a.** Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}~;~1\right]$.
   b. Prouver que $h\left(\left[\frac{1}{2}~;~1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}~;~1\right]$.
   c. Calculer $h''(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}~;~1\right]$.
   d. En déduire que, pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}~;~1\right]$, on a
$$0 \leqslant h'(x) \leqslant 0,3.$$
3. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = h\left(u_n\right).$$
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$, et que la suite (u_n) est décroissante.
   b. *Attention, cette question n'est plus au nouveau programme du baccalauréat S.*
   En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que l'on a pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,3|u_n - \alpha|$ puis que $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}(0,3)^n$.
   c. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.
   d. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près et indiquer la valeur de u_{n_0} donnée par la calculatrice (avec 5 décimales).

∽ Baccalauréat S Amérique du Nord juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les trois points A $(2\,;0\,;0)$, B$(1\,;1\,;0)$ et C$(3\,;2\,;6)$. (D) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\,(0\,;1\,;1)$ et (Δ) la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{v}\,(1\,;-2\,;2)$.

1. Écrire une représentation paramétrique de chacune des droites (D) et (Δ) puis montrer que (D) et (Δ) sont sécantes en un point dont on précisera les coordonnées.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ (question hors programme en 2002), puis écrire une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soit H le projeté orthogonal du point F$(2\,;4\,;4)$ sur le plan (ABC).
   - **a.** Expliquer pourquoi il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{FH} = k\vec{w}$.
   - **b.** Déterminer la valeur de k et en déduire les coordonnées de H.
   - **c.** Calculer le volume du tétraèdre FABC.

Exercice 2 **4 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1. Calculer $P\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$ et $P\left(-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$ puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z) = \left(z^2+3\right)Q(z)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_B = -\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_C = 3+2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.
4. On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}$ puis déterminer la nature du triangle BEC.

EXERCICE 2 **4 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n+3$ et $5n+1$ sont premiers entre eux.
2. On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
   - **a.** Vérifier, en utilisant par exemple la question **1)**, que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que $87u+31v = 1$ puis une solution $(x_0\,;\,y_0)$ de (E).
   - **b.** Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

c. *Application* : Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.

Indication : On remarquera que le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple $(x\,;\,-y)$ vérifie l'équation (E).

PROBLÈME **12 points**

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie **A** la fonction numérique f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2},$$

de déterminer ensuite dans la partie **B.** la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie **C.**, cette dernière partie étant, dans une large mesure, indépendante des deux autres.

Partie A

1. Soit g la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 1.$$

a. Montrer que la fonction g est dérivable et que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{(x-1)\left(3x^2+3x+2\right)}{x}.$$

b. Étudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.

2. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ puis donner le tableau de variations de f.

Partie B

(Γ) désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, unité graphique 2 cm.

1. Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = x + \ln x$.

a. Étudier le sens de variation de h, puis montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0{,}4\,;\,0{,}7]$.

b. Montrer que l'on a : $\text{e}^{-\alpha} = \alpha$.

2. a. Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$.

b. Utiliser les résultats de la question **1 a** pour déterminer les positions relatives de (Γ) et (Δ).

3. Construire (Γ) et (Δ) dans le repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

4. a. Calculer, au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale I

$$\text{I} = \int_1^2 \frac{\ln t}{t^2}\,\text{d}t.$$

b. En déduire l'aire, en cm^2, de la portion de plan limitée par la courbe (Γ), la droite (Δ) et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Partie C

Étude d'une suite (hors-programme en 2002)
Dans cette partie :

* I désigne l'intervalle [0,4 ; 0,7] ;
* α est le réel mis en évidence au **B 1** ;
* φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \text{e}^{-\,x}$;
* u est la suite récurrente définie par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,4 \\ u_{n+1} & = & \varphi(u_n) \end{array}\right.$

1. Montrer qu'on a, pour tout $x \in I$.

a. $\varphi(x) \in \text{I}$.

b. $|\varphi'(x)| \leqslant 0,7$.

c. $|\varphi(x) - \alpha| \leqslant 0,7|x - \alpha|$.

2. a. Montrer qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,7\,|u_n - \alpha|$, puis en déduire par récurrence qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leqslant 0,3 \times (0,7)^n.$$

b. Conclure alors quant à la convergence de la suite u.

3. Déterminer un entier p tel que, pour $n \geqslant p$, on ait $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$, puis donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3} près.

∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un joueur achète 10 euros un billet permettant de participer à un jeu constitué d'un grattage suivi d'une loterie.
Il gratte une case sur le billet. Il peut alors gagner 100 euros avec une probabilité de $\dfrac{1}{50}$ ou bien ne rien gagner.
G désigne l'évènement : « Le joueur gagne au grattage ».
Il participe ensuite à une loterie avec le même billet. À cette loterie, il peut gagner 100 euros, ou 200 euros, ou bien ne rien gagner.
L_i désigne l'évènement « Le joueur gagne 100 euros à la loterie ».
L_2 désigne l'évènement « Le joueur gagne 200 euros à la loterie ».
P désigne l'évènement : « Le joueur ne gagne rien à la loterie ».
Si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 100 euros à la loterie est $\dfrac{1}{70}$, et la probabilité qu'il gagne 200 euros à la loterie est $\dfrac{1}{490}$.

1. **a.** Faire un arbre sur lequel on indiquera les renseignements qui précèdent.

   b. Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il n'a rien gagné au grattage. Compléter l'arbre obtenu avec cette valeur.

   c. Au bout de chaque branche, indiquer le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

2. On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

   La probabilité de l'évènement « $\mathrm{X} = 90$ » est $\dfrac{2}{125}$.

   La probabilité de l'évènement « $\mathrm{X} = 190$ » est $\dfrac{1}{250}$.

   a. Montrer que la probabilité que le joueur gagne 100 euros à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage, est égale à $\dfrac{1}{10}$.

   b. Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage.

   c. Déterminer la loi de probabilité de X.
   Calculer l'espérance de X.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on désigne par $M(z)$ le point M ayant pour affixe z.

1. Placer sur une figure les points $\mathrm{A}(2 + \mathrm{i})$, $\mathrm{B}(2\mathrm{i})$, $\mathrm{C}(-4+3\mathrm{i})$ et $\mathrm{D}(-8)$, en prenant 1 cm pour unité graphique.

2. Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = (1+2\mathrm{i})z - 4 - 2\mathrm{i}.$$

   a. Préciser les images des points A et B par f.

   b. Montrer que f admet un unique point fixe Ω, dont on précisera l'affixe ω (M est un point fixe pour f si, et seulement si, $f(M) = M$).

3. On admet que $\omega = 1 - 2\text{i}$. Soit M un point quelconque et M' son image par f.

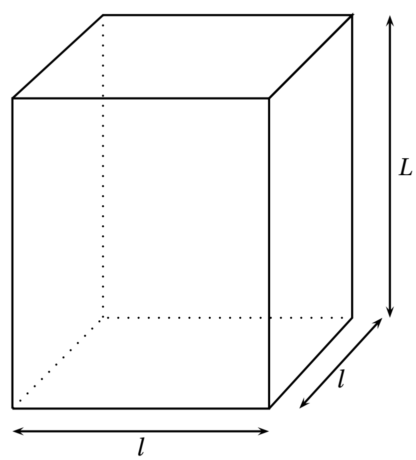
a. Montrer que, pour tout complexe z on a : $z' - z = 2\text{i}(w - z)$.
Dans toute la suite, M est différent de Ω.

b. Déduire de la question précédente le rapport des distances $\dfrac{MM'}{\Omega M}$, et l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$.

c. Déduire des questions précédentes une construction géométrique du point M', connaissant le point M.
Réaliser cette construction sur la figure de la question **1)**

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



1. Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que $l < L$. On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus grande valeur possible pour a ?
Quelles sont les valeurs possibles pour a ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est $v = 77\,760$. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de a est 12. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question **1** (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ?
Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est $15\,435$. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105.
Quelles sont les dimensions l et L de la boîte B ?

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

⋆ **Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$**

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = (ax + b)\mathrm{e}^x.$$

   a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).

   b. Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u + v$ est solution de (1).

   c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Partie B

⋆ **Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 2$.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variations.
3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

   a. Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

   b. L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie C

⋆ **Étude de la fonction principale**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x + 1)\mathrm{e}^x$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
   (On pourra mettre e^{2x} en facteur.)
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
   Étudier le sens de variation de f
3. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ où α est défini dans la partie **B**.
   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
   (On rappelle que $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.)
4. Établir le tableau de variations de f
5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Partie D

⋆ **Calcul d'aire**

1. Soit m un réel négatif. Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x$. (On justifiera la réponse.)
2. **a.** Calculer $\int_m^0 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, à l'aide d'une intégration par parties.

   b. En déduire $\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Calculer la limite de $\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x$, lorsque m tend vers $-\infty$.

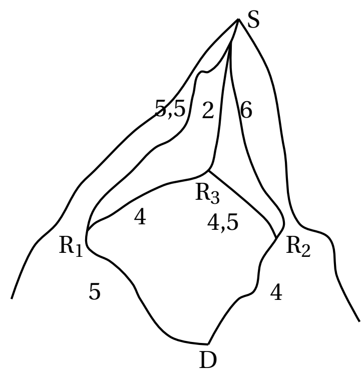
Baccalauréat S Asie juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour rejoindre le sommet S d'une montagne des Alpes à partir d'un point de départ D, les randonneurs ont la possibilité d'emprunter plusieurs parcours. La course n'étant pas faisable en une journée, ils doivent passer une nuit dans l'un des deux refuges se trouvant à la même altitude de 1 400 mètres sur les parcours existants ; les deux refuges ne sont pas situés au même endroit. On les appelle R_1 et R_2.
Le lendemain matin, pour atteindre le sommet qui se trouve à 2 500 mètres d'altitude, ils ont deux possibilités : ils peuvent atteindre le sommet en faisant une halte au refuge R_3, ou atteindre le sommet directement.

La probabilité que les randonneurs choisissent de passer par R_1 est égale à $\dfrac{1}{3}$.
La probabilité de monter directement au sommet en partant de R_1 est égale à $\dfrac{3}{4}$.
La probabilité de monter directement au sommet en partant de R_2 est égale à $\dfrac{2}{3}$.



1. Tracer un arbre pondéré représentant tous les trajets possibles du départ D jusqu'au sommet S.
2. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   E_1 : « Les randonneurs ont fait une halte au refuge R_3 sachant qu'ils ont passé la nuit au refuge R_1 » ;
   E_2 « Les randonneurs ont fait une halte au refuge R_3 » ;
   E_3 « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge R_1 sachant qu'ils ont fait une halte au refuge R_3 » ;
   E_4 « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge R_2 sachant que, le deuxième jour, ils sont montés directement au sommet S ».
3. On note $d(M,\ N)$ la distance, en km, à parcourir pour se rendre du point M au point N.
   On donne $d(\text{D}, \text{R}_1) = 5$; $d(\text{D}, \text{R}_2) = 4$; $d(\text{R}_1,\ \text{R}_3) = 4$; $d(\text{R}_2, \text{R}_3) = 4{,}5$;
   $d(\text{R}_3, \text{S}) = 2$; $d(\text{R}_1, \text{S}) = 5{,}5$; $d(\text{R}_2, \text{S}) = 6$.
   Soit X la variable aléatoire qui représente la distance parcourue par les randonneurs pour aller du départ D au sommet S.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z $(z \neq -1)$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-\text{i}z - 2}{z + 1}.$$

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = -1,\ b = 2\text{i}$ et $c = -\text{i}$.

1. Soit C′ l'image du point C par f. Donner l'affixe c' du point C′ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
2. Calculer l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D′ d'affixe $d' = \dfrac{1}{2}$.
3. Pour tout nombre complexe z différent de - 1, on note p le module de $z+1$ (c'est-à-dire $|z+1| = p$) et p' le module de $z'+\mathrm{i}$ (c'est-à-dire $|z'+\mathrm{i}| = p'$).
   a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de - 1, on a : $pp' = \sqrt{5}$.
   b. Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2, montrer qu'alors $M' = f(M)$ appartient à un cercle (Γ'), dont on précisera le centre et le rayon.
4. Pour tout nombre complexe z différent de - 1, on considère le nombre complexe $\omega = \dfrac{z-2\mathrm{i}}{z+1}$.
   a. Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe ω.
   b. Montrer que $z' = -\mathrm{i}\omega$.
   c. Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul.
   d. Vérifier que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (F).
5. Représenter les ensembles (Γ), (F) et (Γ') en prenant 4 cm pour unité graphique.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On se place dans le plan, rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :
$$z' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}.$$
   a. Exprimer $(f \circ f)(z)$ en fonction de z.
   b. Montrer que $f = \mathrm{R} \circ \mathrm{S}$, où R est une rotation et S une symétrie axiale (on déterminera les éléments caractéristiques de ces deux applications R et S).
   c. Décomposer R à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que f est une réflexion, dont on donnera l'axe (D_1).
   Réaliser une figure, en y représentant l'axe (D_1) (unité graphique 2 cm).
2. On considère l'application g qui, à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' telle que :
$$z'' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
   a. Déterminer une équation de l'ensemble des points invariants de g.
   b. Montrer que $g = \mathrm{T} \circ f$ où T est une translation (on précisera l'affixe du vecteur de la translation T).
   c. Décomposer la translation T à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que g est une réflexion, d'axe noté (D_2).

d. Quelle est l'image par g du point A d'affixe $\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

En déduire une construction de la droite (D_2), qui n'utilise pas son équation, et l'illustrer en complétant la figure précédente.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle]- 1 ; + ∞[par :

$$f(x) = \frac{\text{e}^x}{(1+x)^2}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

⋆ I. Étude de la fonction f et tracé de $(\mathscr{C})$

1. **a.** Calculer la limite de cette fonction lorsque x tend vers $+\infty$.

   b. Calculer la limite de cette fonction lorsque x tend vers - 1.

   Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$?

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que son signe est celui de $\dfrac{x-1}{x+1}$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 1$, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0 (unité graphique : 4 cm).
5. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle [1 ; 10].

   Utiliser le graphique précédent pour donner deux nombres entiers consécutifs a et b tels que α appartient à l'intervalle $[a\,;\,b]$.

⋆ II. Calcul d'une aire

1. Soit g la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\text{e}^x}{1+x}$.

   a. Étudier le sens de variation de g dans l'intervalle [1 ; 2].

   b. Montrer que, pour tout x appartenant à [1 ; 2], on a : $1 \leqslant g(x) \leqslant 2,5$.

   c. En déduire un encadrement de $\text{A}_1 = \displaystyle\int_1^2 g(x)\,\text{d}x$.

2. Soit A_2 l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$, la courbe $(\mathscr{C})$ et l'axe des abscisses.

   À l'aide d'une intégration par parties, exprimer A_2 en fonction de A_1, et en déduire un encadrement de A_2.

⋆ III. Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite

Pour cette partie, on utilisera sans justification le fait que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution β et que celle-ci est élément de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.

Soit h la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\text{e}^x}{(1+x)^3}$.

1. **a.** Vérifier que, pour tout x appartenant à $]-1\,;\,+\infty[$ on a :

$$f'(x) = f(x) - 2h(x).$$

   b. Calculer $h'(x)$.

c. En utilisant la question **a**, calculer $f''(x)$.
En déduire le sens de variation de f dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}~;~1\right]$
En déduire que, pour tout x appartenant à $\left[\frac{1}{2}~;~1\right]$ on a :

$$\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

2. On définit la suite (U_n), pour tout nombre entier naturel n, par $\text{U}_0 = 1$ et $\text{U}_{n+1} = f(\text{U}_n)$ pour $n \geqslant 0$.
On admet que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leqslant \text{U}_n \leqslant 1$.
(Question hors-programme en 2002).

a. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a :

$$\left|\text{U}_{n+1} - \beta\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|\text{U}_n - \beta\right|.$$

b. Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a :

$$\left|\text{U}_n - \beta\right| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

c. En déduire une valeur approchée numérique de β à 10^{-3} près.

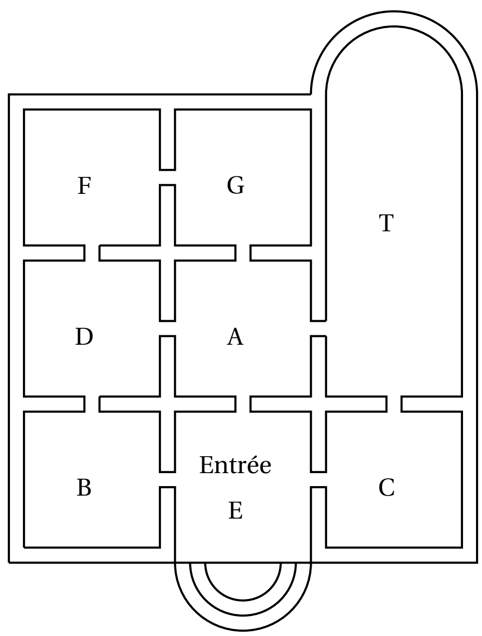
Baccalauréat S Centres étrangers juin 2001

EXERCICE 1 **5 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

Le directeur d'un musée, dont le plan est fourni ci-dessous, organise une exposition. Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard, en faisant les hypothèses suivantes :

- Le visiteur passe *au hasard* d'une salle à une salle voisine.
- Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer.
  Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençant par la lettre E. Par exemple :
- Si le visiteur passe successivement par les salles E, B, D, F, on codera son trajet par le mot EBDF.
- Le trajet codé EBDB est impossible avec les hypothèses choisies.



1. On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses précédentes.
   a. Construire l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur.
   b. Montrer que la probabilité du parcours codé EBDF est $\dfrac{1}{6}$.
   c. Déterminer la probabilité p_1 de l'évènement : « La quatrième salle du trajet est F ».
   d. Pour des raisons techniques, le directeur installe les œuvres les plus intéressantes dans la salle T. Déterminer la probabilité p_2 de l'évènement « Le trajet passe par la salle T ».
2. Le directeur imagine dix visiteurs pris au hasard, effectuant chacun un trajet, de manière indépendante et selon les hypothèses précédentes. On appelle X la variable aléatoire qui, aux dix visiteurs, associe le nombre de leurs trajets passant par la salle T.

a. Calculer la probabilité de l'évènement (X = 1).

b. Calculer la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T. (Donner le résultat arrondi au millième.)

c. Le directeur décide d'obliger les visiteurs à se diriger, après l'entrée, vers la salle A, les hypothèses précédentes demeurant pour la suite des trajets. Il pense ainsi augmenter la probabilité que deux visiteurs au moins, sur les dix, passent par la salle T.
Prouver qu'il a tort.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 4 cm), dans lequel on considère les points A (2 ; 0), B(0 ; 2) et C(−2 ; −2).

1. Soient a, b et c les nombres définis pour t réel par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a &=& -\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{2}{3}\cos t+\frac{2}{3}\\ b &=& \sin 2t-\frac{1}{3}\cos t+\frac{2}{3}\\ c &=& -\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{3}\cos t+\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

a. Démontrer que, pour tout réel t, il existe un barycentre, noté $G(t)$, du système de points pondérés {(A, a) ; (B, b) ; (C, c)}.

b. Montrer que, pour tout réel t, les coordonnées du point $G(t)$ sont :

$$x(t) = \cos t \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{3}{2}\sin 2t.$$

Lorsque le paramètre t varie, ce barycentre décrit une courbe (Γ), que l'on se propose d'étudier.

2. Étude des symétries de la courbe (Γ)

a. Étudier les positions relatives des points $G(t)$ et $G(t+2\pi)$.

b. Étudier les positions relatives des points $G(t)$ et $G(-t)$.

c. Étudier les positions relatives des points $G(t)$ et $G(\pi - t)$.

d. Déduire de ce qui précède, en justifiant la démarche, un intervalle d'étude approprié pour les fonctions x et y.

3. a. Étudier le sens de variation de chacune des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et les faire apparaître dans un même tableau.

b. Placer les points de (Γ) correspondant aux valeurs du paramètre 0, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$ et tracer les tangentes à la courbe (Γ) en ces points.

c. Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ puis tracer (Γ) complètement. (Hors-programme en 2002)

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard (J_0 + 6), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple $(u\ ;\ v)$ est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.
2. **a.** Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\ ;\ y_0)$ solution particulière de l'équation (E_2) :

$$35x - 27y = 1.$$

   b. En déduire une solution particulière $(u_0\ ;\ v_0)$ de (E_1).

   c. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).

   d. Déterminer la solution $(u\ ;\ v)$ permettant de déterminer J_1.
3. **a.** Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

   b. Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.)

   c. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Les objectifs du problème sont de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle (partie A), d'étudier cette solution (partie B) et de la retrouver dans un contexte différent (partie C).

Partie A

On appelle (E) l'équation différentielle : $y'' - y = 0$, où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Déterminer les réels r tels que la fonction h, définie par $h(x) = \text{e}^{rx}$, soit solution de (E).
2. Vérifier que les fonctions φ définies par $\varphi(x) = \alpha\text{e}^{x} + \beta\text{e}^{-x}$, où α et β sont deux nombres réels, sont des solutions de (E). On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E).
3. Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $\left(\ln 2\ ;\ \dfrac{3}{4}\right)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est $\dfrac{5}{4}$.

Partie B

On appelle f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\text{e}^{x} - \text{e}^{-x}\right).$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit μ un réel. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \mu$ équivaut à $\text{e}^{2x} - 2\mu\text{e}^{x} - 1 = 0$.
   En déduire que l'équation $f(x) = \mu$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa valeur en fonction de μ.
2. **a.** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 0.
   b. En étudiant le sens de variation de la fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - x$, préciser la position de ($\mathscr{C}$) par rapport à (T).
   c. Tracer ($\mathscr{C}$) et (T) (unité graphique : 2 cm).
4. Soit D la partie représentant sur le graphique l'ensemble des points M de coordonnées $(x~;~y)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\ x & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right.$$

   Calculer, en cm^2 l'aire de D.

Partie C

On cherche à caractériser les fonctions φ, dérivables sur l'ensemble des nombres réels, telles que, pour tout réel x :

$$\varphi(x) - \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = x \quad \text{(H)}.$$

1. On suppose qu'il existe une telle fonction φ.
   a. Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$\varphi(x) = x + x\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Calculer $\varphi(0)$.
   b. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $\varphi'(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
   Calculer $\varphi'(0)$.
   c. Vérifier que φ est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie **A**. Déterminer laquelle, parmi toutes les solutions explicitées dans la question **A 2**.
2. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^x t\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t$.
   b. Démontrer que la fonction trouvée à la question **1 c** vérifie bien la relation (H).

☙ Baccalauréat S Métropole juin 2001 ❧

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
On note G_k le barycentre du système $\left\{(\text{A},\ k^2+1),\ (\text{B},\ k),\ (\text{C},\ -k)\right\}$.

1. Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1}.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel k de l'intervalle $[-1\,;\,1]$, on a l'égalité :

$$\overrightarrow{\text{A}G_k} = -\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{\text{BC}}.$$

b. Établir le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1\,;\,1]$ par

$$f(x) = -\frac{x}{x^2+1}.$$

c. En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.

3. Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\|.$$

4. Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right\|.$$

5. L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(0\,;\,0\,;\,2)$, $(-1\,;\,2\,;\,1)$ et $(-1\,;\,2\,;\,5)$. Le point G_k et les ensembles (E) et (F) sont définis comme ci-dessus.

a. Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}.
Montrer que les ensembles (E) et (F) sont sécants.

b. Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$ intersection de (E) et (F).

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm].
On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \dfrac{5\pi}{6}$. Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\text{O}M_n}\right)$ ait pour mesure α_n.

1. Placer les douze points $\text{M}_0,\ \text{M}_1,\ \text{M}_2, \ldots, \text{M}_{11}$.

2. On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{12}\right)}$.

3. **a.** Montrer, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :

- les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés ;

- les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_{n+4} = \text{e}^{-\frac{2\text{i}\pi}{3}} z_n$.
En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$, est équilatéral.
On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_nM_{n+4}M_{n+8}$.

4. Douze cartons indiscernables au toucher, marqués $\text{M}_0, \text{M}_1, \text{M}_2, \cdots, \text{M}_{11}$ sont disposés dans une urne. On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm].
On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = z\text{e}^{\frac{5\text{i}\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :
M_0 a pour affixe $z_0 = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.
On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
Placer les points $\text{M}_0, \text{M}_1, \text{M}_2$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité

$$z_n = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$$

(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p. Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, $(n-p)$ est multiple de 12.

4. a. On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(4\,;\,9)$ est solution, résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[\text{O}x)$.

PROBLÈME **9 points**
Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

Partie A

$\star$ Étude d'une fonction f

On définit la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right).$$

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 3.
   Calculer l'ordonnée de A. Soit B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\dfrac{5}{4}$, P le projeté orthogonal de B sur l'axe $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u}\right)$ et H le projeté orthogonal de B sur l'axe $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{v}\right)$.
   Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B, P et H. Placer les points A, B, P et H dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ et représenter la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie B

$\star$ Utilisation d'une rotation

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. À tout point M du plan d'affixe z la rotation r associe le point M' d'affixe z'.

1. **a.** Donner z' en fonction de z.
   On note $z = x + \text{i}y$ et $z' = x' + \text{i}y'$ ($x,~y,~x',~y'$ réels). Exprimer x' et y' en fonction de x et y, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.

   b. Déterminer les coordonnées des points A$'$, B$'$ et P$'$ images respectives des points A, B et P par la rotation r.

2. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \text{e}^{-2x} + 2\text{e}^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

   a. Montrer que lorsqu'un point M appartient à $(\mathscr{C})$, son image M' par r appartient à (Γ).
   On admet que lorsque le point M décrit $(\mathscr{C})$, le point M' décrit (Γ).

   b. Tracer sur le graphique précédent les points A$'$, B$'$, P$'$ et la courbe (Γ) (l'étude des variations de g n'est pas demandée).

Partie C

$\star$ Calcul d'intégrales

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\ln 2} g(x)\,\text{d}x$.
   Interpréter graphiquement cette intégrale.

2. **a.** Déterminer, en unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan $\mathscr{D}$ limité par les segments [AO], [OH] et [HB] et l'arc de courbe $(\mathscr{C})$ d'extrémités B et A.

   b. On pose $\text{I} = \displaystyle\int_{\frac{5}{4}}^{3} \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\,\text{d}x$.
   Trouver une relation entre $\mathscr{A}$ et I puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

Baccalauréat S Liban juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Dans un village de montagne deux familles A et B disposent de cinq circuits balisés de promenades c_1, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.

Partie A

Chaque matin, chacune des familles tire au hasard, indépendamment l'une de l'autre, un des cinq circuits.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles pour l'ensemble des deux familles ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'elles fassent le même jour, le même circuit ?
3. Quelle est la probabilité pour que pendant n jours consécutifs, elles ne se trouvent janais sur le même circuit ?
4. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité de se trouver au moins une fois sur le même circuit est supérieure ou égale à 0,9.

Partie B

On considère dans cette partie deux jours consécutifs. Le deuxième jour chaque famille élimine de son tirage le circuit qu'elle a fait la veille. Il reste donc quatre circuits pour chacune des deux familles.
On note :
E l'évènement « les deux familles font le même circuit le premier jour ».
F l'évènement « les deux familles font le même circuit le deuxième jour ».
Calculer les probabilités suivantes :

$$\text{P(E)}\ ,\ \text{P(F/E)}\ ,\ \text{P}\left(\text{F}/\overline{\text{E}}\right) \text{ puis } \text{P(F} \cap \text{E) et P}\left(\text{F} \cap \overline{\text{E}}\right).$$

En déduire P(F).

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_\text{A} = 3 + \text{i}$ et $z_\text{B} = 1 + 2\text{i}$.

1. Exprimer le complexe $\dfrac{z_\text{B}}{z_\text{A}}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
2. En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}}\right)$.

Partie B

Désormais on considère l'espace muni du repère orthonormal direct $(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$ où $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
On considère les points A(3 ; 1 ; 0), B(1 ; 2 ; 0), C(3 ; 2 ; 1) et $D(0\ ;\ 0\ ;\ d)$ où d désigne un réel positif ou nul. On a ainsi un tétraèdre ABCD.

1. On pose $\overrightarrow{\text{N}} = \overrightarrow{\text{AB}} \wedge \overrightarrow{\text{AC}}$.
   a. Calculer les coordonnées de N.
   b. En déduire l'aire du triangle ABC.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3. On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

a. On pose $\overrightarrow{DH} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{N}}$.
Calculer λ en fonction de d.

b. En déduire l'expression de la distance DH.
Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est $\mathrm{V}_d = \dfrac{2d+5}{6}$.

4. Déterminer pour quelle valeur de d la droite (DB) est perpendiculaire au plan (ABC).

5. On suppose que $d = 0$. Calculer la distance de A au plan (OBC).

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On suppose le plan rapporté au repère orthonormal direct $\left(\Omega\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 3 cm.

Partie A

Soit trois droites D_1, D_2 et D_3, sécantes en Ω et de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{u}$, et $\overrightarrow{d_2}$ et $\overrightarrow{d_3}$ supposés unitaires et tels que $\left(\overrightarrow{d_1},\,\overrightarrow{d_2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{d_1},\,\overrightarrow{d_3}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$.
On note S_1, S_2 et S_3 les réflexions d'axes respectifs D_1, D_2 et D_3, et f la composée $\mathrm{S}_3 \circ \mathrm{S}_2 \circ S_1$, de ces trois réflexions.

1. Tracer ces trois droites.

2. **a.** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r = \mathrm{S}_2 \circ \mathrm{S}_1$.

b. Caractériser la réflexion S telle que $r = \mathrm{S}_3 \circ \mathrm{S}$. On notera D l'axe de S et on en déterminera un point et un vecteur directeur $\overrightarrow{d}$. Tracer la droite D.

c. En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques.

3. Justifier que le point E d'affixe $z_{\mathrm{E}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{12}}$ est un point de la droite D.
Déterminer les nombres complexes a et b tels que la forme complexe de f soit l'application f_1 définie sur $\mathbb{C}$ par $f_1(z) = a\overline{z} + b$.

Partie B

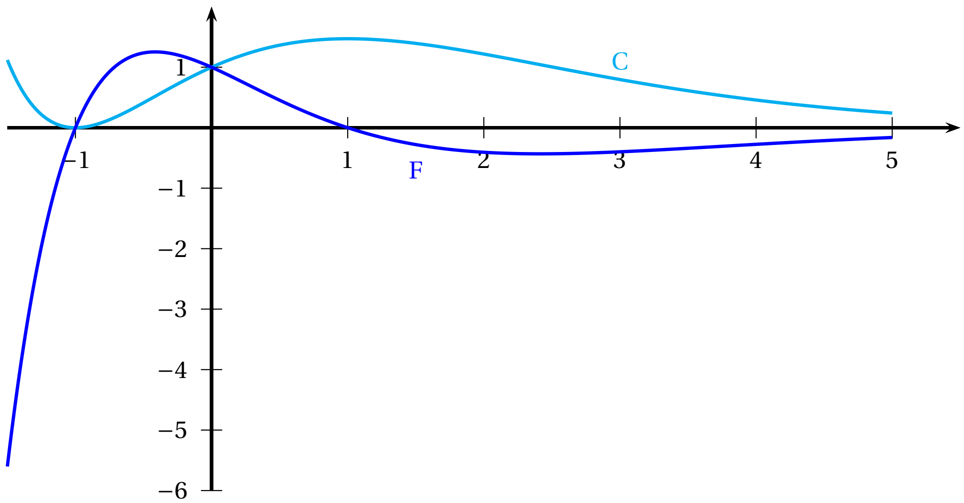
1. Choisir un point A sur D. On note B l'image de A par S_1 et C l'image de B par S_2. Placer les points B et C.

2. Démontrer que A est l'image de C par S_3.

3. Que peut-on dire du point Ω pour le triangle ABC ?

PROBLÈME **5 points**

Partie A - Lectures graphiques



On donne dans un repère orthogonal les courbes C et F représentatives de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On sait que l'une de ces fonctions est la fonction dérivée de l'autre, on peut donc les noter g et g'.

1. Associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique. On justifiera le résultat en donnant un tableau où figurera sur l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{2}\ ;\ 5\right]$ le signe de $g'(x)$ et les variations de g.
2. Quel est le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 0 ?

Partie B

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2(x+1)\text{e}^{-x}$.

1. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = (x^2+2x)\text{e}^{-x}$ est une solution de l'équation (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.
3. Soit u une solution de (E') . Montrer que la fonction $f_0 + u$ est une solution de (E).

   On admettra que, réciproquement, toute solution f de (E) est de la forme $f = f_0 + u$ où u est une solution de (E').

   En déduire, pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f(x)$ lorsque f est solution de (E).
4. Sachant que la fonction g de la partie A est solution de (E) , déterminer $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer la solution h de l'équation (E) dont la représentation graphique admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 0.

Partie C

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2+2x+2)\text{e}^{-x}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$: déterminer sa fonction dérivée et étudier son signe. Donner le tableau de variation de f.

3. Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique 2 cm, on note C$'$ la représentation graphique de f.

a. Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C' au point Ω d'abscisse -1.

b. Tracer avec soin la courbe C$'$ et la tangente T dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

4. a. Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction F définie par $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\text{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction f.

b. Soit α un réel positif. Calculer en cm^2 l'aire notée $\mathcal{A}(\alpha)$ de la zone du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C$'$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

∽ Baccalauréat S Polynésie juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Enseignement obligatoire et de spécialité

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm, on considère les points A et B, d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -1$ et $z_{\text{B}} = 3\text{i}$.
Soit la fonction f de P privée du point A dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \text{i}\left(\dfrac{z-3\text{i}}{z+1}\right) \quad (1)$.

1. Soit C le point d'affixe $z_{\text{C}} = 2-\text{i}$. Montrer qu'il existe un seul point D tel que $f(\text{D}) = \text{C}$.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. À l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout M distinct de A et de B :
   $\text{O}M' = \text{B}M$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{\text{O}M'}) = \dfrac{\pi}{2} + (\overrightarrow{M\text{A}}, \overrightarrow{M\text{B}})$ (modulo 2π).
4. En déduire et construire les ensembles de points suivants :
   a. L'ensemble E des points M tels que l'image M' soit située sur le cercle (F) de centre O, de rayon 1.
   b. L'ensemble F des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.
5. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   On note C_1 l'image de C par R.
   a. Déterminer l'affixe de C_1.
   b. Montrer que C_1 appartient à l'ensemble F.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

Une boîte contient 8 cubes : $\left\{\begin{array}{l}\text{1 gros rouge et 3 petits rouges}\\ \text{2 gros verts et 1 petit vert}\\ \text{1 petit jaune}\end{array}\right.$

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte (*on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur*).
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On note A l'évènement : « obtenir des cubes de couleurs différentes » et B l'évènement : « obtenir au plus un petit cube ».
   a. Calculer la probabilité de A.
   b. Vérifier que la probabilité de B est égale à $\dfrac{2}{7}$.
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X.
3. L'enfant répète n fois l'épreuve « tirer simultanément trois cubes de la boîte », en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants. On note P_n la probabilité que l'évènement B soit réalisé au moins une fois.
   a. Déterminer P_n en fonction de n.

b. Déterminer le plus petit entier n tel que $P_n \geqslant 0,99$.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $91x + 10y = 1$.

a. Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).

b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.

c. Résoudre (E').

2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).

3. On considère l'équation (E″) $A_3x + A_2y = 3\,296$.

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ solutions de l'équation (E″).

b. Montrer que (E″) admet pour solution un couple unique d'entiers naturels.
Le déterminer.

PROBLÈME **11 points**
Enseignement obligatoire et de spécialité

Dans tout le texte e désigne le nombre réel qui vérifie $\ln \text{e} = 1$.
On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x + x\text{e}}{x^2}.$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = -2\ln x - x\text{e} + 1.$$

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de g.

3. Montrer que dans [0,5 ; 1] l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée α. Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.

4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1 + \alpha\text{e}}{2\alpha^2}$.

4. Donner le tableau de variations de f.

5. Construire Γ.

Partie C : Intégrale et suite

Soit $I_n = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} \dfrac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $A_n = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^n}^{\mathrm{e}^{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$I_n = \frac{n+1}{\mathrm{e}^n} - \frac{n+2}{\mathrm{e}^{n+1}}.$$

2. **a.** Montrer que $A_n = I_n + \mathrm{e}$.

   b. Calculer I_0 et A_0.

   c. Donner une interprétation géométrique de A_0.

3. Montrer que la suite (A_n) converge vers e.

Baccalauréat S Antilles - Guyane septembre 2001

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Soit m un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = m\sin x & \text{pour } x \in [0\,;\,\pi] \\ f(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer le réel m tel que f soit une densité de probabilité.
2. Représenter f dans un repère orthonormé.
3. Soit X une variable aléatoire dont f est une densité de probabilité.
   Définir la fonction de répartition de X puis représenter graphiquement F dans un repère orthonormé.
4. Calculer la probabilité $p\left(\dfrac{\pi}{4} \leqslant X \leqslant \dfrac{3\pi}{4}\right)$.
5. Calculer les probabilités $p(X \geqslant 0)$ et $p(X \leqslant 0)$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2 + 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = -4\sqrt{3} - 4\text{i}$ et $b = -4\sqrt{3} + 4\text{i}$.
   Calculer les distances OA, OB et AB.
   En déduire la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + \text{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe d du point D.
4. On appelle G le barycentre des points pondérés $(O\,;\,-1)$, (D ; 1) et (B ; 1).
   a. Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6\text{i}$.
   b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure. (Unité graphique : 1 cm).
   c. Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.
5. **a.** Justifier l'égalité $\dfrac{c-g}{a-g} = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   b. En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{GA}},\ \overrightarrow{\text{GC}}\right)$, ainsi que la valeur du rapport $\dfrac{\text{GC}}{\text{GA}}$.
   Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle AGC ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que PGCD$(a+b\,;\,ab) = p$, où p est un nombre premier.
   a. Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$.)

b. En déduire que p divise a.
On constate donc, de même, que p divise b.

c. Démontrer que PGCD$(a,\ b) = p$.

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$.

a. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcr}\text{PGCD}(a,\ b) & = & 5\\ \text{PPCM}(a,\ b) & = & 170\end{array}\right.$$

b. En déduire les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lcr}\text{PGCD}(a+b,\ ab) & = & 5\\ \text{PPCM}(a,\ b) & = & 170\end{array}\right.$$

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = -3 - \ln x + 2(\ln x)^2.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

Partie A - Étude de la fonction f et tracé de la courbe $(\mathscr{C})$

1. a. Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. (On pourra poser $\ln x = X$).

b. Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(x) > 0$.

2. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$.

c. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

3. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $\text{e}^{\frac{5}{4}}$.

4. On se propose d'étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{T})$.
Pour cela, on considère la fonction φ, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - \left(4\text{e}^{-\frac{5}{4}}x - \frac{41}{8}\right).$$

a. Montrer que $\varphi'(x) = \dfrac{4\ln x - 1}{x} - 4\text{e}^{-\frac{5}{4}}$ puis calculer $\varphi''(x)$.

b. Étudier le sens de variation de φ' sur $]0\ ;\ +\infty[$.
En déduire que, pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, on a $\varphi'(x) \leqslant 0$.

c. Calculer $\varphi\left(\text{e}^{\frac{5}{4}}\right)$. Pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ déterminer le signe de $\varphi(x)$.
En déduire la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{T})$.

5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{T})$. (Unité graphique : 2 cm).

Partie B - Calcul d'une aire

1. Vérifier que la fonction h, définie par $x \longmapsto x\ln x - x$, est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. On pose $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} \ln x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer I_1.

b. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\mathrm{I}_2 = \dfrac{5}{4}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - \dfrac{5}{\mathrm{e}}$.

c. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} f(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$.

Baccalauréat S Métropole septembre 2001

Exercice 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.
On note A l'évènement « l'urne a est choisie » , B l'évènement « l'urne b est choisie » et R l'évènement « une boule rouge est obtenue au tirage ».
On note $p_{\text{A}}(\text{R})$ la probabilité conditionnelle de l'évènement R par rapport à l'évènement A.

1. Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches.
   a. Déterminer les probabilités suivantes : $p(\text{A})$, $p_{\text{A}}(\text{R})$, $p(\text{A} \cap \text{R})$.
   b. Montrer que
   $$p(\text{R}) = \frac{13}{30}$$
   c. Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne a ?
2. Dans cette question, on suppose que l'urne a contient quatre boules blanches et l'urne b deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges (où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne b en contient $5 - n$.
   a. Exprimer $p_{\text{A}}(\text{R})$ et $p_{\text{B}}(\text{R})$ en fonction de n.
   b. Démontrer que
   $$p(\text{R}) = \frac{-n^2 + 4n + 10}{(4 + n)(7 - n)}.$$
   c. On sait que n ne prend que six valeurs entières. Déterminer la répartition possible des cinq boules rouges entre les urnes a et b donnant la plus grande valeur possible de $p(\text{R})$.

Exercice 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ direct.
Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe $-\text{i}$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C} - \{\text{i}\}$ par :

$$f(z) = \frac{1 - \text{i}z}{z - \text{i}}.$$

1. Vérifier que pour tout z de $\mathbb{C} - \{\text{i}\}$
$$f(z) = -\text{i} + \frac{2}{z - \text{i}}.$$
2. a. Démontrer que $-\text{i}$ n'a pas d'antécédent par f.
   b. Déterminer les antécédents de 0 et de i par f.
3. À tout point M différent de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = f(z)$.

   a. Démontrer que pour tout point M différent de A, le produit des longueurs AM et BM' est égal à 2 $(\text{A}M \cdot \text{B}M' = 2)$.

   b. Démontrer que lorsque M décrit le cercle C de centre A et de rayon 4, M' se déplace sur un cercle C' dont on précisera le centre et le rayon.

4. **a.** Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que $z - \text{i}$ soit un nombre réel non nul.

   b. Démontrer que lorsque M décrit E, M' se déplace sur une droite Δ que l'on précisera.

   c. Lorsque M décrit E, M' décrit-il toute la droite Δ ?

5. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur non nul.

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Déterminer le PGCD des nombres 168 et 20.

   b. Soit l'équation $168x + 20y = 6$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a t-elle des solutions ?

   c. Soit l'équation $168x + 20y = 4$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a t-elle des solutions ?

2. **a.** Déterminer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, et en détaillant les calculs effectués, deux entiers relatifs m et p tels que $42m + 5p = 1$.

   b. En déduire deux entiers relatifs u et v tels que $42u + 5v = 2$.

   c. Démontrer que le couple d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation $42x + 5y = 2$ si, et seulement si $42(x + 4) = 5(34 - y)$.

   d. Déterminer tous les couples d'entiers $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $42x + 5y = 2$.

3. Déduire du **2.** les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $(42x + 5y - 3)(42x + 5y + 3) = -5$.

Problème **9 points**

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = \left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)\text{e}^x.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. **a.** Étudier le sens de variation de f et donner le tableau de variation de f.

   b. Tracer $\mathcal{C}$.

3. Soit

$$\text{I} = \int_{-3}^{0} f(x)\,\text{d}x.$$

   a. Interpréter graphiquement I.

b. En utilisant l'intégration par parties, calculer

$$\int_{-3}^{0} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x,$$

puis

$$\int_{-3}^{0} x^2\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x.$$

c. En déduire la valeur exacte de I.

Partie B

1. Soit a et b deux nombres réels et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{\left(x^2+ax+b\right)}.$$

Quelles sont les valeurs de a et de b pour lesquelles le tableau de variations de g est celui donné ci-dessous ?

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^{\left(x^2-3x+1\right)}$$

et Γ sa courbe représentative dans le repère $\mathscr{R}$.

a. Démontrer que la droite D d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ est axe de symétrie de Γ.

b. Justifier l'affirmation suivante : « 3,2 est une valeur approchée à 10^{-1} près d'une solution de l'équation $h(x) = 5$ ».

c. Soit α un nombre dont 1,7 est une valeur approchée à 0,5 près. Établir que

$$0,28 \leqslant h(\alpha) \leqslant 0,47.$$

Partie C

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous (a, b et c étant trois nombres réels).

x	$-\infty$	0		a		b		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$		$\searrow$	c	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Soit v_1, v_2, v_3 les fonctions définies par :

$$v_1(x) = \mathrm{e}^{u(x)} \qquad v_2(x) = u\left(\mathrm{e}^{x}\right) \qquad v_3(x) = u(x)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Déterminer le sens de variation des fonctions v_1 et v_2 (en justifiant votre réponse).
2. Indiquer un intervalle sur lequel il est possible de donner le sens de variation de la fonction v_3 (en justifiant votre réponse).

∽ Baccalauréat S Polynésie septembre 2001 ∾

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Pour tout naturel $n \geqslant 1$ on pose :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.
2. Démontrer que pour tout naturel $n \geqslant 1$ on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

3. En déduire par récurrence que pour tout naturel $n \geqslant 1$ on a :

$$\sqrt{\mathrm{e}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!} + I_n.$$

4. Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n n!}\mathrm{A}.$$

On pourra déterminer A en majorant la fonction :

$$t \longmapsto (1-t)^n \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \quad \text{sur l'intervalle } [0\,;\,1]$$

En déduire la limite quand n tend vers l'infini de :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}.$$

Exercice 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{C}} = -1+\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{D}} = 1+\mathrm{i}.$$

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit la fonction f de $\mathscr{P}$ - {B} dans $\mathscr{P}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' où

$$z' = \mathrm{i}\frac{z-2\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}.$$

   a. Développer $(z+1-\mathrm{i})(z-1-\mathrm{i})$.

   b. Chercher les points M vérifiant $f(M) = M$ et exprimer leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.

2. **a.** Montrer que, pour tout z différent de i,

$$|z'| = \frac{\mathrm{A}M}{\mathrm{B}M},$$

   et que, pour tout z différent de i et de 2i,

$$\arg\left(z'\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{B}M}, \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (\text{modulo}2\pi).$$

b. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

c. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $\arg(z') = \dfrac{\pi}{2}$ (modulo 2π).

3. a. Démontrer que $z' - \text{i} = \dfrac{1}{z - \text{i}}$ et en déduire que $|z' - \text{i}| \times |z - \text{i}| = 1$, pour tout complexe z différent de i.

b. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon $\dfrac{1}{2}$. Prouver que le point M' d'affixe z' appartient à un cercle de centre B et de rayon à déterminer.

Exercice 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{A}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, unité graphique 1 cm, on considère les points B, D définis par : $\overrightarrow{\text{AB}} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{\text{AD}} = 3\vec{v}$ et C tel que ABCD soit un rectangle.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{DB}}$. Déterminer l'affixe z_{E} de E.

2. Déterminer les nombres réels a, b tels que le point F d'affixe $z_{\text{F}} = 6 - \text{i}$ soit le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients a, b et 1.

3. On considère la similitude s qui transforme A en E et B en F. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z', image de M par s.

a. Exprimer z' en fonction de z.

b. Déterminer le centre I, l'angle et le rapport de la similitude s.

c. Déterminer les images de C et de D par s.

d. Calculer l'aire de l'image par s du rectangle ABCD.

4. a. Déterminer l'ensemble Ω des points M du plan tels que :

$$\left\|6\overrightarrow{M\text{A}} - 10\overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 9.$$

b. Déterminer, en précisant ses éléments caractéristiques, l'image de Ω par s.

Problème **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2 + \cos x)\text{e}^{1-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$.

2. a. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos x\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

b. En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 + \cos x + \sin x > 0$.

   c. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\text{e}^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\text{e}^{1-x}$.

   b. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c. Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.

4. **a.** Montrer que, sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. Représenter la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0\,;4]$.

Partie B

On veut calculer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1. Montrer que : $\mathscr{A} = 2\text{e} - 2 + \displaystyle\int_0^1 \cos t\text{e}^{1-t}\,\text{d}t$.

2. On pose : $\text{I} = \displaystyle\int_0^1 \cos t\text{e}^{1-t}\,\text{d}t$ et $\text{J} = \displaystyle\int_0^1 \sin t\text{e}^{1-t}\,\text{d}t$.

   a. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$\text{I} = -\cos 1 + \text{e} - \text{J} \quad \text{et} \quad \text{J} = -\sin 1 + \text{I}.$$

   b. En déduire la valeur de I.

3. Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ si à 10^{-2} près par défaut.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

1. **a.** Montrer que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.

2. **a.** Déterminer $\ln[f(x)]$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

   b. Étudier le sens de variations de la fonction H.

   c. Déterminer le tableau de variations de H.

3. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$. (On ne demande pas de représenter Γ.) On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.

   a. Étudier la position relative de Γ et de Δ.

   b. Déterminer les abscisses des points communs à Γ et Δ.

4. **a.** Établir une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.

   b. Étudier la position relative de Γ et T.

5. Montrer que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie décembre 2001

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie I

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$(-1 ; 0 ; 2), \quad (3 ; 2 ; -4), \quad (1 ; -4 ; 2), \quad (5 ; -2 ; 4).$$

On considère les points I, J et K définis par : I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD] et $\overrightarrow{\text{BJ}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{BC}}$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. **a.** Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.

   b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est :

   $$8x + 9y + 5z - 12 = 0.$$

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L dont on déterminera les coordonnées.

   d. Montrer que :

   $$\overrightarrow{\text{AL}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}}.$$

Partie II

Plus généralement, dans l'espace E, on considère un tétraèdre ABCD ainsi que les points I, J, K et L définis par I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD].

$$\overrightarrow{\text{AL}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\text{BJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{BC}}$$

Soit G le barycentre de (A, 3), (B, 3), (C, 1), D, 1).

1. Déterminer les barycentres de {(A, 3), (D, 1)} et le barycentre de {(B, 3), (C, 1)}.
2. En associant les points A, B, C et D de deux façons différentes, montrer que G appartient aux droites (IK) et (JL). En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 4 cm. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = -\text{i}$ et B le point d'affixe $z_{\text{B}} = -2\text{i}$.
On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, M distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{\text{i}z - 2}{z + \text{i}}$.

1. Démontrer que, si z est un imaginaire pur, $z \neq -\mathrm{i}$, alors z' est imaginaire pur.
2. Déterminer les points invariants par l'application f.
3. Calculer $\left|z' - \mathrm{i}\right| \times |z + \mathrm{i}|$.
   Montrer que, quand le point M décrit le cercle de centre A et de rayon 2, le point M' reste sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
4. **a.** Développer $(z+\mathrm{i})^2$, puis factoriser $z^2 + 2\mathrm{i}z - 2$.
   b. Déterminer et représenter l'ensemble des points M, tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O.
5. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M, tels que le module de z' soit égal à 1.
   $\left(\text{On pourra remarquer que } z' = \dfrac{\mathrm{i}\,(z - z_{\mathrm{B}})}{z - z_{\mathrm{A}}}.\right)$

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = \left(x^2+2\right)^2 - 4x^2$.
2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.
3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B, divise $4n$.
4. Dans cette question on suppose que n est impair.
   a. Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
   b. Montrer que d divise n.
   c. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
5. On suppose maintenant que n est pair.
   a. Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.
   b. Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.
   c. Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question **4**)

PROBLÈME **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \left(x^2 + 4x + 3\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; l'unité graphique est 2 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire *g*

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \left(x^2 + 2x - 1\right) \mathrm{e}^{-x} + 1.$$

1. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ et $(3 - x^2)$ ont le même signe.

3. En déduire le tableau de variations de g.

4. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. Vérifier que $g(0) = 0$. On note α la solution non nulle.

b. Prouver que $-2,4 < \alpha < -2,3$.

5. En déduire le signe $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B - Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$, est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

4. **a.** Montrer que la droite (D)et la courbe $(\mathscr{C})$ se coupent en deux points A et B dont on donnera les coordonnées.

b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C})$.

5. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).

Partie C - Calculs d'aire

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction H soit une primitive de la fonction h définie par :

$$h(x) = \left(x^2 + 4x + 3\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

2. Déterminer l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).

3. Soit m un réel strictement supérieur à -1. On considère le domaine $(\mathscr{D}_m)$ délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = m$.

a. Calculer l'aire $(\mathscr{A}_m)$ du domaine $(\mathscr{D}_m)$, en unités d'aire.

b. Déterminer la limite de $(\mathscr{A}_m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.

∽ Baccalauréat S Amérique du Sud ∾ décembre 2001

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (unité graphique : 2 cm). On considère la courbe $\mathscr{C}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lll} x = f(t) & \text{où} & f(t) = 2\left(\cos^2 t + \cos t - 1\right) \\ y = g(t) & \text{où} & g(t) = \sin^3 t + \sin t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in [-\pi\ ;\ \pi]$$

On appelle $M(t)$ le point de la courbe $\mathscr{C}$ défini par la valeur t du paramètre.

1. **a.** Étudier les positions relatives de $M(t)$ et $M(-t)$.
   b. Expliquer pourquoi il suffit alors, pour tracer $\mathscr{C}$, d'étudier f et g sur $[0\ ;\ \pi]$.
   Soit $\mathscr{C}'$ la partie de $\mathscr{C}$ correspondante.
2. **a.** Montrer que $f'(t) = -2\sin t(2\cos t + 1)$. Étudier le signe de f' sur $[0\ ;\ \pi]$.
   b. Montrer que $g'(t) = \cos t\left(3\sin^2 t + 1\right)$. Étudier le signe de g' sur $[0\ ;\ \pi]$.
   c. Dans un même tableau, faire figurer les variations de f et de g sur $[0\ ;\ \pi]$.
3. On veut déterminer l'intersection de $\mathscr{C}'$ et de l'axe des ordonnées.
   a. A l'aide du **2.** montrer que l'équation $f(t) = 0$ a une unique solution dans $[0\ ;\ \pi]$.
   Soit t_0 celle solution.
   b. Donner une valeur approchée de t_0 à 10^{-1} près par défaut.
   c. Déterminer une valeur approchée de $g(t_0)$.
4. Placer les points $M(0)$, $M(t_0)$, $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $M(\pi)$.
   Construire les tangentes à $\mathscr{C}'$ parallèles aux axes de coordonnées. Tracer $\mathscr{C}'$ puis en déduire la courbe $\mathscr{C}$.

EXERCICE 2 **6 points** (d'après Nathan)
Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{3u_n + 4} \end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que (u_n) est majorée par 4.
   b. Montrer que (u_n) est strictement croissante.
   c. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(4 - u_n).$$

   b. Retrouver le résultat du **1. c**.
   c. Étudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = n^2(4 - u_n).$$

EXERCICE 2 **4 points**
Candidats n'ayant pas pris l'enseignement de spécialité

On considère l'ensemble $E = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$.
Avec deux chiffres distincts x et y de E on crée un unique domino simple noté indifféremment $\boxed{x \mid y}$ ou $\boxed{y \mid x}$.
Avec un chiffre z de E, on forme un unique domino double noté $\boxed{z \mid z}$.

1. Montrer que l'on peut ainsi créer 36 dominos.
2. On tire au hasard un domino.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino constitué de chiffres pairs ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des chiffres est paire ?
3. On tire au hasard et simultanément deux dominos.
   Un élève affirme : « la probabilité d'obtenir un domino double et un domino simple dont l'un des chiffres est celui du domino double est égale à $\dfrac{4}{45}$ ».
   Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée*).

EXERCICE 2 **4 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Soit n un entier naturel non nul.
On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 + n.$$

1. Montrer que $2n+1$ divise a et b.
2. Un élève affirme que le PGCD de a et b est $2n+1$.
   Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée.*)

PROBLÈME **10 points.**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$$

et sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

Partie A : étude de la fonction *f*

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. a. Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
   b. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : étude d'une tangente

1. On rappelle que f'' désigne la dérivée seconde de f.

a. Montrer que, pour tout x réel, $f''(x) = 4(2x-1)\mathrm{e}^{-2x}$.

b. Résoudre l'équation $f''(x) = 0$.

2. Soit B le point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ de la courbe $\mathscr{C}$. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en B.

3. On veut étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T : pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - \left(-\frac{2}{\mathrm{e}}x + \frac{3}{\mathrm{e}}\right).$$

a. Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.

b. Étudier le signe de $g''(x)$ suivant les valeurs de x.
En déduire le sens de variations de g' sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le signe de $g'(x)$ puis le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

d. Déterminer alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. Que peut-on en conclure sur la position relative de $\mathscr{C}$ et T ?

4. Dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ placer les points A et B puis tracer la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : calculs d'aire et de volume

1. Soit λ un réel strictement positif.
On note A(λ), l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = \lambda$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer A(λ) en fonction de λ.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \mathrm{A}(\lambda)$.

2. a. On considère les fonctions h et H définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$$h(x) = (2x+1)^2\mathrm{e}^{-4x} \qquad \text{et} \qquad H(x) = \left(-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}\right)\mathrm{e}^{-4x}.$$

Montrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

b. On considère le domaine E limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $= -\dfrac{1}{2}$ et $x = \dfrac{1}{2}$.
On note V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de E autour de l'axe des abscisses.
On rappelle que V, en unités de volume, est exprimé par $\mathrm{V} = \pi \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$.
Déterminer la valeur exacte de V en unités de volume puis une valeur approchée de V à 10^{-3} près.