∽ Baccalauréat S 2003 ∾

L'intégrale d'avril 2003 à mars 2004

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

∽ Baccalauréat S Pondichéry avril 2003 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = a, \text{ et, pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$$

où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Dans un repère orthonormal (unité graphique 8 cm), tracer, sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, la droite (d) d'équation $y = x$ et la courbe (Γ) représentative de la fonction : $f\ : x \longmapsto x(2 - x)$.

c. Utiliser (d) et (Γ) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3.

2. On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle $]0\,;\,1[$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Que peut-on en déduire ?

3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$. On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 1 - u_n.$$

a. Exprimer, pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de v_n.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Première partie

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$\text{(E)} \quad z^3 + 2z^2 - 16 = 0.$$

1. Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)\left(az^2 + bz + c\right) = 0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

2. En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Placer les points A, B et D d'affixes respectives

$$z_A = -2 - 2\text{i},\ z_B = 2 \quad \text{et} \quad z_D = -2 + 2\text{i}.$$

2. Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.

3. Soit E l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et F l'image de C par la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   a. Calculer les affixes des points E et F, notées z_E et z_F.
   b. Placer les points E et F.
4. **a.** Vérifier que : $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \text{i}$.
   b. En déduire la nature du triangle AEF.
5. Soit I le milieu de [EF]. Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Première partie
ABC est un triangle direct du plan orienté.
On désigne respectivement par I, J et K les milieux de [AB], [BC] et [CA].
Soit α un réel qui conduit à la réalisation de la figure jointe sur laquelle on raisonnera. Cette figure sera jointe à la copie.
d_1 est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle α.
d_2 est l'image de la droite (BC) par la rotation de centre J et d'angle α.
d_3 est l'image de la droite (CA) par la rotation de centre K et d'angle α.
A_1 est le point d'intersection de d_1 et d_3, B_1 celui de d_1 et d_2 et C_1 celui de d_2 et d_3.

1. On appelle H le point d'intersection de (BC) et d_1. Montrer que les triangles HIB et HB_1J sont semblables.
2. En déduire que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
A - Construction de la figure

1. Placer les points $A(-4-6\text{i})$, $B(14)$, $C(-4+6\text{i})$, $A_1(3-7\text{i})$, $B_1(9+5\text{i})$ et $C_1(-3-\text{i})$.
2. Calculer les affixes des milieux I, J et K des segments [AB], [BC] et [CA]. Placer ces points sur la figure.
3. Montrer que A_1, I, B_1 sont alignés.
   On admettra que B_1, J, C_1 *d'une part et* C_1, K, A_1 *d'autre part sont alignés.*
4. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB_1}\right)$.
   On admettra que $\left(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KA_1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ *et que* $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JC_1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
5. Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$?

B - Recherche d'une similitude directe transformant ABC en $A_1B_1C_1$

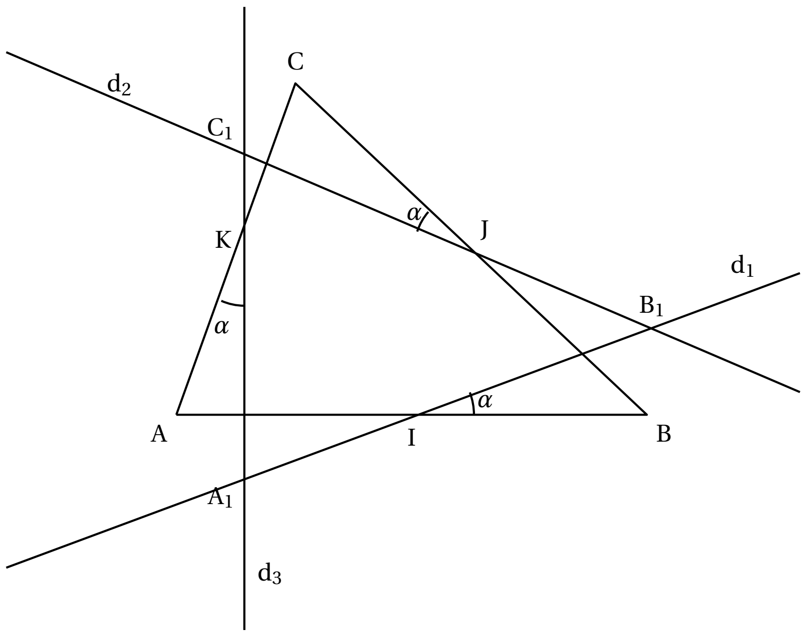
On admet qu'il existe une similitude directe s transformant les points A, B et C en A_1, B_1 et C_1.

1. Montrer que l'écriture complexe de s est $z' = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}\right)z + 2 - 2\text{i}$, où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point et de son image par s.
2. **a.** Déterminer le rapport et l'angle de s.

b. Déterminer l'affixe du centre Ω de s.

3. Que représente le point Ω pour ABC ?

Le candidat joindra cette figure à sa copie



PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$

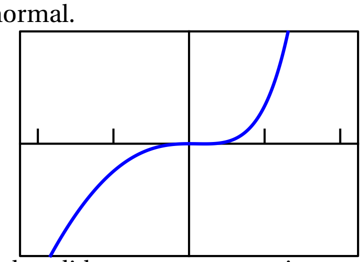
Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.

Conjectures

À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant

a. le sens de variations de f sur $[-3 ; 2]$?

b. la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?



Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A : contrôle de la première conjecture

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.
2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel.

a. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.

b. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.

c. En déduire le sens de variations de la fonction g, puis dresser son tableau de variations.

d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.

e. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. Sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.

b. En déduire le sens de variations de la fonction f.

c. Que pensez-vous de votre première conjoncture ?

Partie B : contrôle de la deuxième conjoncture

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.

1. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.

a. Calculer $h'(x)$ pour x élément de $[0 ; 1]$, puis déterminer le sens de variations de h sur $[0 ; 1]$.

b. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

3. **a.** Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe $(x'x)$.

b. Préciser alors la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

c. Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

Partie C : tracé de la courbe

Compte tenu des résultats précédents, on se propose de tracer la partie Γ de $\mathscr{C}$ correspondant à l'intervalle $[-0,2 ; 0,4]$, dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ avec les unités suivantes :

— sur l'axe des abscisses 1 cm représentera 0,05.

— sur l'axe des ordonnées 1 cm représentera 0,001.

1. Recopier le tableau suivant et compléter celui-ci à l'aide de la calculatrice en indiquant les valeurs approchées sous la forme $n \times 10^{-4}$ (n entier relatif).

x	$-0,2$	$-0,15$	$-0,1$	$-0,05$	0	$0,05$	$0,1$	$0,15$	$0,2$	$0,25$	$0,3$	$0,35$	$0,4$
$f(x)$													

2. Tracer alors Γ dans le repère choisi.

Partie D : calcul d'aire

On désire maintenant calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1 - \ln 2$.

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$x \longmapsto x^2\mathrm{e}^x.$$

2. En déduire une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

3. Calculer alors, en unités d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ puis en donner une valeur approchée en cm^2.

Baccalauréat S Centres étrangers juin 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

1. Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

a. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \dfrac{1}{2}$.

c. Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geqslant N$, $v_n < \dfrac{3}{4}$.

d. En déduire que si $n \geqslant N$, alors $u_{n+1} < \dfrac{3}{4}u_n$.

On pose pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $S_n = u_5 + u_6 + \cdots + u_n$.

2. On se propose de montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 5}$ est convergente.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,

$$u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5.$$

b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,

$$S_n \leqslant \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5.$$

c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $S_n \leqslant 4u_5$.

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 5}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.

EXERCICE 2 **6 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.

Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.

On rappelle que la loi de probabilité est alors définie par :

$$p(D \leqslant A) = \int_0^A \frac{1}{82}\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\,\mathrm{d}x.$$

Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millième.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

a. comprise entre 50 et 100 km ;

b. supérieure à 300 km.

2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?

3. Détermination de la distance moyenne parcourue sans incident.

a. Au moyen d'une intégration par parties, calculer $\mathrm{I}(A) = \displaystyle\int_0^A \frac{1}{82} x\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\,\mathrm{d}x$ où A est un nombre réel positif.

b. Calculer la limite de $\mathrm{I}(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. (Cette limite représente la distance moyenne cherchée).

4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$.

d étant un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

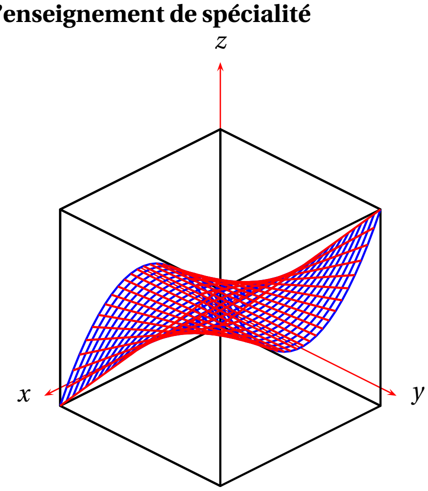
a. Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $\mathrm{e}^{-\lambda d}$.

b. Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

EXERCICE 2 **6 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère la surface **T** d'équation : $x^2y = z$ avec $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$.
La figure ci-contre est une représentation de la surface **T**, dans le cube de centre O et de côté 2.



1. Éléments de symétrie de la surface **T**.

a. Montrer que si le point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à **T**, alors le point $M'(-x\,;\,y\,;\,z)$ appartient aussi à **T**. En déduire un plan de symétrie de **T**.

b. Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie de **T**.

2. Intersections de la surface **T** avec des plans parallèles aux axes.

a. Déterminer la nature des courbes d'intersection de **T** avec les plans parallèles au plan (xOz).

b. Déterminer la nature des courbes d'intersection de **T** avec les plans parallèles au plan $(y\mathrm{O}z)$.

3. Intersections de la surface **T** avec les plans parallèles au plan $(x\mathrm{O}y)$ d'équations $z = k$, avec $k \in [0\,;\,1]$.

a. Déterminer l'intersection de la surface **T** et du plan d'équation $z = 0$.

b. Pour $k > 0$ on note K le point de coordonnées $(0,\ 0,\ k)$. Déterminer, dans le repère $\left(K\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, l'équation de la courbe d'intersection de **T** et du plan d'équation $z = k$.

c. Tracer l'allure de cette courbe dans le repère $\left(K\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.

4. On note (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface **T**.

$$(\mathrm{D}) = M(x,\ y,\ z) \in (E) \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant 1\ ;\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 y.$$

   a. Pour $0 < k \leqslant 1$, le plan d'équation $z = k$ coupe le domaine (D) selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la **question 3 c**.
   C'est l'ensemble des points M du cube unité, de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ tels que $y \geqslant \dfrac{k}{x^2}$ et $z = k$.
   Calculer en fonction de k l'aire $S(k)$ exprimée en unités d'aire, de cette surface.

   b. On pose $S(0) = 1$; calculer en unités de volume, le volume V du domaine (D).
   On rappelle que $V = \displaystyle\int_0^1 S(k)\,\mathrm{d}k$.

PROBLÈME **9 points**

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-2\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x\ln(x+2).$$

On note $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (unité graphique 4 cm).

I. Étude de la fonction *f*

1. Étude des variations de la dérivée f'.
   a. f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' la fonction dérivée seconde. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$.
   b. Étudier les variations de f' sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$.
   c. Déterminer les limites de f' en -2 et en $+\infty$.
2. Étude du signe de $f'(x)$.
   a. Montrer que sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[-0,6\ ;\ -0,5]$.
   b. En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
3. Étude des variations de f
   a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$.
   b. Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.
   c. Dresser le tableau de variation de f.

II. Position de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à ses tangentes

Soit x_0 un réel appartenant l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$, on appelle T_{x_0} la tangente $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point d'abscisse x_0.
On note, pour x appartenant à l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$,

$$d(x) = f(x) - \left[f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\right].$$

1. Étude des variations de d.
   a. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$,

$$d'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

b. En utilisant la croissance de la fonction f', donner le signe de $d'(x)$ selon les valeurs de x. En déduire les variations de d sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$.

2. Déterminer la position relative de $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et de T_{x_0}.

III. Tracés dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$

1. Déterminer une équation de la droite T_0, tangente $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au point d'abscisse 0 ; tracer T_0.

2. Trouver les réels x_0 pour lesquels les tangentes T_{x_0} passent par l'origine du repère puis tracer ces droites.

3. Tracer la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ pour les valeurs de x comprises entre -1 et 2. On prendra pour α la valeur $-0,54$ et pour $f(\alpha)$ la valeur $0,8$.

Baccalauréat série S Amérique du Nord juin 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions : chacune comporte trois réponses, une et une seule étant exacte.
Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la feuille jointe en annexe, page 5, en cochant pour chaque question la case correspondante à la réponse proposée.
Toute réponse ambigüe sera considérée comme une absence de réponse. Toute réponse exacte entraîne une bonification, toute erreur est pénalisée.

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Ainsi, la probabilité d'un intervalle $[0,\ t[$, notée $p([0\,;\ t[)$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t.

Cette loi est telle que $p([0,\ t[) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années (loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$).

1. Pour $t \geqslant 0$, la valeur exacte de $p([t\,;\,+\infty[)$ est :

a. $1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ **b.** $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ **c.** $1 + \mathrm{e}^{-\lambda t}$

2. La valeur de t pour laquelle on a $p([0\,;\ t[) = p([t\,;\,+\infty[)$ est :

a. $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$ **b.** $\dfrac{\lambda}{\ln 2}$ **c.** $\dfrac{\lambda}{2}$

3. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est alors :

a. $\ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$ **b.** $\ln\left(\dfrac{41}{50}\right)$ **c.** $\dfrac{\ln(82)}{\ln(100)}$

4. Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

a. $p([1;\ +\infty[)$ **b.** $p([3\,;\,+\infty[)$ **c.** $p([2\,;\,3[)$

Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0,2$.

5. La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est :

a. 0,552 3 **b.** 0,548 8 **c.** 0,451 2

6. Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années.

La valeur la plus proche de la probabilité de l'évènement « $X = 4$ » est :

a. 0,555 5 **b.** 0,802 2 **c.** 0,160 7

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5 - 4\text{i}$,
$z_1 = -1 - 4\text{i}$, $z_2 = -4 - \text{i}$.

1. **a.** Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(\text{A}_0) = \text{A}_1$ et $S(\text{A}_1) = \text{A}_2$.

   b. Établir que l'écriture complexe de S est $z' = \dfrac{1-\text{i}}{2}z + \dfrac{-3+\text{i}}{2}$.

   c. En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.

   d. On considère un point M, d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image M', d'affixe z'.

   Vérifier la relation : $\omega - z' = \text{i}(z - z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

2. Pour tout entier naturel n, le point A_{n+1}, est défini par $\text{A}_{n+1} = S(\text{A}_n)$ et on pose $u_n = \text{A}_n\text{A}_{n+1}$.

   a. Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géoétriquement les points A_3, A_4, A_5, A_6.

   b. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   a. Exprimer v_n en fonction de n.

   b. La suite (v_n) est-elle convergente ?

4. **a.** Calculer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle $\Omega\text{A}_n\text{A}_{n+1}$.

   b. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n : si $n > p$ alors $r_n < 10^{-2}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté au reère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On consière les points A, B et C d'affixes respectives $z_\text{A} = -1 + \text{i}\sqrt{3}$,
$z_\text{B} = -1 - \text{i}\sqrt{3}$ et $z_\text{C} = 2$.

1. Placer ces points sur un dessin.

2. **a.** Vérifier que : $\dfrac{z_\text{B} - z_\text{C}}{z_\text{A} - z_\text{C}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

   b. En déduire la nature du triangle ABC.

   c. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC. Tracer le cercle Γ_1.

3. **a.** Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $2(z + \overline{z}) + z\overline{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon. Construire Γ_2.

   b. Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.

4. On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   a. Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1 ? Construire l'image C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.

   b. Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1.

5. Soit r une rotation. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe de M'.
   On posera : $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.
   On suppose que r transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1.
   a. Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b.
   b. Déterminer en fonction de a l'affixe du point $r(\mathrm{C})$, image du point C par la rotation r ; en déduire que le point $r(\mathrm{C})$ appartient un cercle fixe que l'on définira. Vérifier que ce cercle passe par C_1.

PROBLÈME **10 points**
Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction f et construction de sa courbe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{x}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** On rappelle que : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} + \mathrm{e}^{-x} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$.
   Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   c. En déduire que la courbe admet deux asymptotes que l'on précisera.
2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

   a. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.
3. **a.** Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g\left(\mathrm{e}^{x}\right)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
4. Tracer les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B : comportements asymptotiques d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier le sens de variations de la fonction F.
2. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel t, $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{t}} = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{t}}{1+\mathrm{e}^{t}}$ et calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{e}^{t}}\,\mathrm{d}t$.
   b. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$.

c. Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$\begin{array}{lcl}(1) \quad F(x) & = & x - \ln(1+\mathrm{e}^x) - f(x) + 2\ln 2.\\ (2) \quad F(x) & = & \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right) - f(x) + 2\ln 2.\end{array}$$

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} [F(x)-x]$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie C : étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k}\ln(1+\mathrm{e}^k).$$

1. Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est u_n.

2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3. **a.** Justifier que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Comparer u_n et $F(n)$.

4. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Annexe à rendre avec la copie

Réponses à l'exercice 1 (mettre une croix dans la case correspondant à la réponse choisie)

	(a)	(b)	(c)
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			

∽ Baccalauréat série S Antilles-Guyane juin 2003 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun tous les candidats

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm). On considère les points A et B d'affixes respectives $\mathrm{A}(3+2\mathrm{i})$ et $\mathrm{B}(-1+4\mathrm{i})$. Extérieurement au triangle OAB, on construit les deux carrés $\mathrm{OA_1A_2A}$ et $\mathrm{OBB_1B_2}$.

1. **a.** En remarquant que $\mathrm{A_2}$ est l'image de O par une rotation de centre A, déterminer l'affixe de $\mathrm{A_2}$. En déduire l'affixe du centre I du carré $\mathrm{OA_1A_2A}$.

   b. En remarquant que $\mathrm{B_1}$ est l'image de O par une rotation de centre B, déterminer l'affixe de $\mathrm{B_1}$. En déduire l'affixe du centre J du carré $\mathrm{OBB_1B_2}$.

2. Calculer l'affixe du milieu K du segment [AB]. À l'aide des affixes des différents points, calculer les longueurs KI et KJ, ainsi qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{KI}},\ \overrightarrow{\mathrm{KJ}}\right)$. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à $0,03$ et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à $0,02$.
Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,049 4.

2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.

   a. Définir la loi de X.

   b. Calculer l'espérance matématique de X. Quel est le sens de ce nombre ?

3. **a.** Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.

   b. Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

4. La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,000 7, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 0,000\,7\mathrm{e}^{-0,000\,7x}.$$

   Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Calculer : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$.

   b. Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2. Soit n un entier naturel non nul. On note a et b les entiers naturels tels que :

$$\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}.$$

Que valent a_1 et b_1 ?

D'après les calculs de la question **1. a.**, donner d'autres valeurs de a_n et b_n.

a. Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

b. Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$.

En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

c. Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

PROBLÈME **11 points**

A. On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :

$$\boldsymbol{y' - 2y = 2\left(e^{2x} - 1\right).}$$

1. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 2x\mathrm{e}^{2x} + 1$$

est solution de l'équation différentielle (E).

2. On pose : $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0$. Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E).

3. Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0. Elle sera appelée g et étudiée dans la **partie B**.

B. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{2x} + 1.$$

1. Déterminer le sens de variation de g. Présenter son tableau de variations. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - g(x) \geqslant 0$.

b. Calculer l'intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)]\,\mathrm{d}x$.

c. Interpréter graphiquement les résultats des questions **a.** et **b.**.

C. On considère la fonction numérique f définie pour x réel non nul par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{x}.$$

1. Calculer les limites de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.

2. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote que l'on précisera.

3. Déterminer le sens de variation de f et donner son tableau de variations (on pourra utiliser la **partie B)**.

4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, avec pour unités : 4 cm sur $\left(\text{O} ; \vec{\imath}\right)$ et 2 cm sur $\left(\text{O} ; \vec{\jmath}\right)$. Après avoir recopié et complété le tableau ci-dessous avec des valeurs approchées arrondies à 10^{-2} près, construire la courbe $\mathscr{C}$ pour des valeurs de x comprises entre -2 et 1.

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	$-0,2$	$-0,1$	$-0,05$	0,05	0,1	0,2	0,5	1
$f(x)$												

5. Soit f_1 la fonction définie par $\begin{cases} f_1(x) = f(x),\ x \neq 0 \\ f_1(0) = 0 \end{cases}$

Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. En supposant que f_1 est dérivable en 0, expliquer comment on peut déterminer graphiquement une valeur approchée du nombre dérivé $f'(0)$; faire cette lecture graphique.
Quel résultat de limite cela permet-il de conjecturer ?

D. On se propose de trouver un encadrement de l'intégrale :

$$\text{J} = \int_{-2}^{-1} \frac{\text{e}^{2x} - 1}{x}\,\text{d}x.$$

Montrer que pour tout x de $[-2 ; -1]$ on a : $-\dfrac{0,86}{x} \leqslant \dfrac{\text{e}^{2x}-1}{x} \leqslant -\dfrac{0,99}{x}$.
En déduire un encadrement de J d'amplitude 0,1.

∽ Baccalauréat S Asie juin 2003 ∾

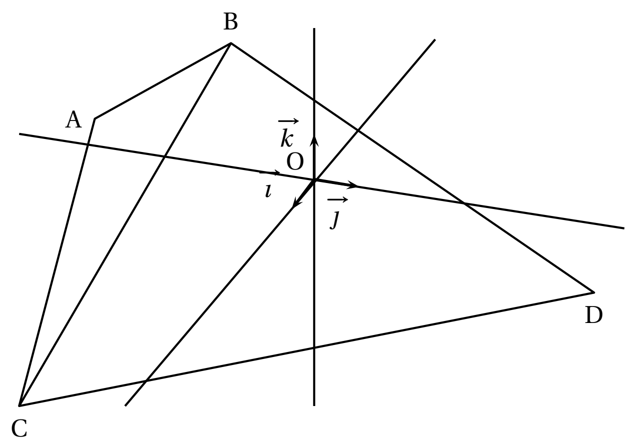
EXERCICE 1 **5 points**

Commun tous les candidats

L'espace E est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$A(3\,;\,-2\,;\,2) \quad ; \quad B(6\,;\,1\,;\,5) \quad ; \quad C(6\,;\,-2\,;\,-1).$$



Partie A

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Soit P le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.
   Montrer que P est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3. Soit P′ le plan orthogonal la droite (AC) et passant par le point A.
   Déterminer une équation cartésienne de P′.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, droite d'intersection des plans P et P′.

Partie B

1. Soit D le point de coordonnées $(0\,;\,4\,;\,-1)$.
   Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2. Calculer le volume du tétraèdre ABDC.
3. Montrer que l'angle géométrique BDC a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.
4. **a.** Calculer l'aire du triangle BDC.
   b. En déduire la distance du point A au plan (BDC).

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Γ est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 2(1+\mathrm{i})z.$$

   On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

a. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel. Montrer que $\mathcal{H}$ est la représentation graphique d'une fonction h que l'on déterminera (l'étude de la fonction h n'est pas demandée). $\mathcal{H}$ est tracée sur le graphique ci-dessous.

2. Montrer que le point A d'affixe $a = 2(1+\text{i})$ appartient à Γ et $\mathcal{H}$.

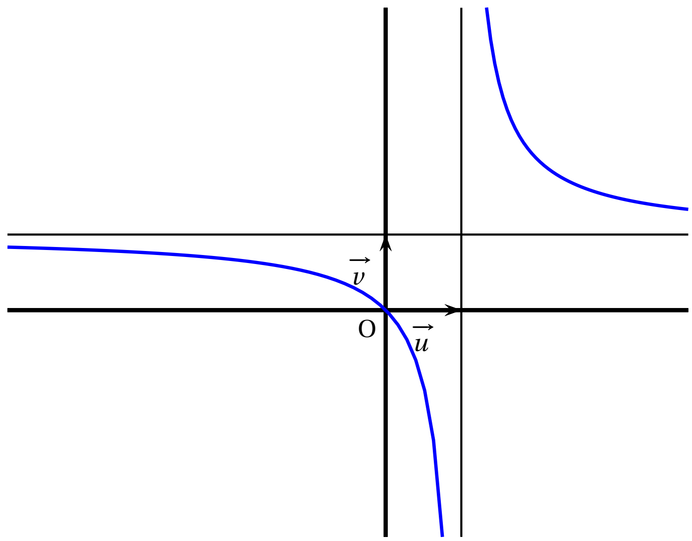
3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On note B et C les points tels que R(A) = B et R(C) = A.

a. Montrer que R(B) = C et que les triangles OAB, OBC et OCA sont isométriques.

b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

c. Montrer que B et C appartiennent à Γ et $\mathcal{H}$.

d. Tracer Γ et placer A, B et C sur le graphique ci-dessous.



Exercice 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par $n+3$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(a\,;\,b) = \text{PGCD}(bc - a\,;\,b).$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}\left(3n^3 - 11n\,;\,n+3\right) = \text{PGCD}(48\,;\,n+3).$$

4. a. Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3 - 11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

PROBLÈME **11 points**

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}.$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f et soit $(\mathcal{C}')$ celle de la fonction h définie sur $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire que $(\mathcal{C})$ a deux asymptotes que l'on déterminera.

2. Calculer la dérivée f' de f et étudier les variations de f.

3. Soit I le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de I.

4. Pour tout x de $]0~;~+\infty[$, on pose $g(x) = 1 - x + 2\ln x$.

a. Étudier les variations de la fonction g.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0\,;2[$ et $]2\,;4[$. Soit α la solution appartenant $]2\,;4[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. a. Montrer que $f(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ se coupent en deux points.

b. Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie :

$$0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

6. Tracer $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

Partie B

1. Soit $\mathcal{D}$ la partie du plan définie par les inégalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcll} 1 \leqslant & x & \leqslant \alpha & (\alpha \quad \text{est le réel défini dans la partie A}) \\ 0 \leqslant & y & \leqslant f(x) & \end{array}\right.$$

a. Déterminer l'aire de $\mathcal{D}$, notée $\mathcal{A}(\alpha)$, en unités d'aire (on utilisera une intégration par parties).

b. Montrer que $\mathcal{A}(\alpha) = 2 - \dfrac{2}{\alpha}$ et donner une valeur approchée de $\mathcal{A}(\alpha)$ 10^{-2} près.

2. Soit la suite (I_n) définie pour n suérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

b. En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

c. Soit $S_n = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n$. Calculer S_n puis la limite de la suite (S_n).

Partie C

On considère, pour tout n supérieur ou égal à 1, la fonction f_n, définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x^{2n}}.$$

1. Calculer la dérivée f_n' de la fonction f_n.

2. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Soit x_n la solution de cette équation.

3. Déterminer la limite de la suite (x_n).

∽ Baccalauréat S Métropole juin 2003 ∾

Note :
Ce sujet a soulevé l'indignation des candidats et des professeurs de terminale. En rupture brutale avec les usages antérieurs, il était en effet trop difficile, trop long et ne correspondait pas à ce que doit être un sujet d'examen.
L'**A. P. M. E. P.** a choisi de publier, en partant du thème d'un exercice et du problème de cette épreuve, d'autres rédactions possibles qui nous ont paru intéressantes.

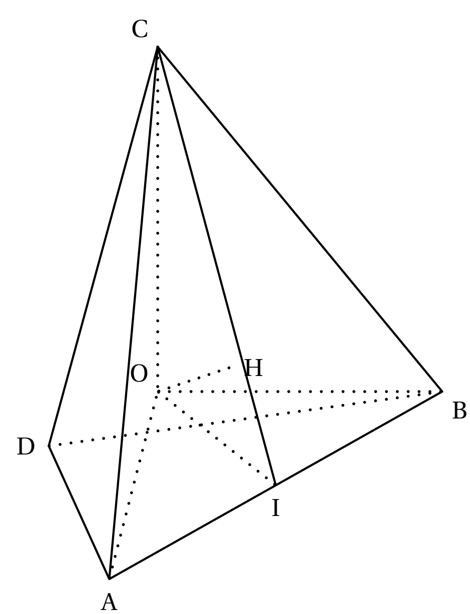
EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1-\text{i}$ et $c = 1+\text{i}$.

1. **a.** Placer les points A, B et C sur une figure.
   b. Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.
2. **a.** On appelle r la rotation de centre A telle que $r(\text{B}) = \text{C}$.
   Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $\text{D} = r(\text{C})$.
   b. Soit Γ le cercle de diamètre [BC].
   Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.
3. Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r.
   a. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right[$ tel que $z = 1+\text{e}^{\text{i}\theta}$.
   b. Exprimer z' en fonction de θ.
   c. Montrer que $\dfrac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.
   d. Placer sur la figure le point M d'affixe $1+\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M′ par r.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :
• OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,
• OA = OB = OC = a.
On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{\text{HO}} = \overrightarrow{\text{OD}}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Calcul de OH
   a. Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.
   b. Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que OH = $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
4. Étude du tétraèdre ABCD.
   L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O} ; \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\text{OA}}, \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\text{OB}}, \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\text{OC}}\right)$.
   a. Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}\right)$.
   b. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
   c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

EXERCICE 2 proposé par l'A. P. M. E. P. **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

OABC est un tétraèdre tel que :
— OAB, OAC, OBC, sont trois triangles rectangles en O.
— OA = OB = OC.
Le dessin fourni en annexe sera complété au fur et à mesure de l'avancement du problème, et rendu avec la copie.
(Je propose que seul le tétraèdre OABC soit représenté, avec une disposition qui permette ultérieurement de bien distinguer les points O et K, les droites (CK) et (CO), les droites (AK) et (AO), et de placer le repère dans la disposition habituelle).

1. On nomme K le point du plan ABC qui est le point de concours des trois médiatrices du triangle ABC. Montrer que K est aussi l'isobarycentre de A, B, C.
2. On choisit la distance OA comme unité de longueur, et on munit l'espace du repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OC}}\right)$, qui est alors orthonormé.
   a. Déterminer les coordonnées de K.
   b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{OK}}$ est normal au plan ABC.
   c. Calculer la distance de O au plan ABC.
3. On rappelle que, dans l'espace, le plan médiateur d'un segment est défini de deux façons équivalentes :
   — c'est le plan orthogonal au segment et passant par son milieu
   — c'est l'ensemble de tous les points de l'espace situés à égale distance des deux extrémités du segment.

   a. Montrer que le plan médiateur P du segment [AB] est le plan COK.
   Déterminer le plan médiateur Q du segment [BC].
   b. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points de l'espace situés à égale distance des trois points A, B, C.
4. Soit D le point de l'espace symétrique de K par rapport à O, c'est à dire le point tel que $\overrightarrow{\text{OD}} = \overrightarrow{\text{KO}}$, et soit Ω l'isobarycentre des quatre points A, B, C, D.
   a. Montrer que Ω est le milieu du segment [OK].
   b. Montrer que Ω est le centre d'une sphère S contenant les quatre sommets du tétraèdre ABCO (S se nomme sphère circonscrite au tétraèdre).

5. Les unités d'aire et de volume étant celles attachées au repère, calculer :
— l'aire du triangle ABC ;
— la mesure de la hauteur issue de D du tétraèdre ABCD ;
— le volume du tétraèdre ABCD ;
— le volume de la sphère S.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les questions **3.** *et* **4.** *sont indépendantes des questions* 1. *et* 2. *seule l'équation de* Γ *donnée en* **1. c.** *intervient à la question* **4.**.

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

a. Montrer que les plans P et Q d'équations respectives $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles.

b. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q.

c. On considère le cône de révolution Γ d'axe (Ox) contenant la droite Δ comme génératrice.
Montrer que Γ pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$.

2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de Γ avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.
Déterminer dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

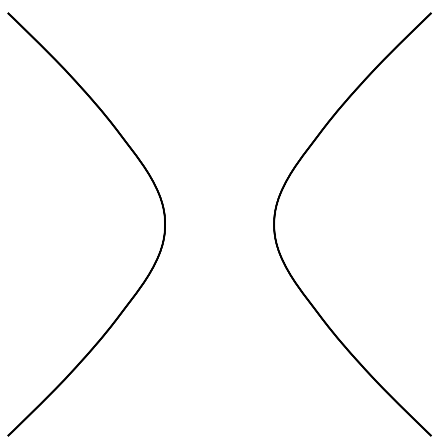


Figure 1

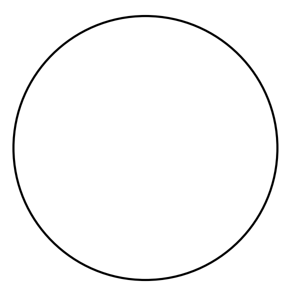


Figure 2

3. **a.** Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3 \quad [7]$, dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution,

b. Montrer la propriété suivante :
pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.

4. **a.** Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante : si le point A de coordonnées (a, b, c) est un point du cône Γ alors a, b et c sont divisibles par 7.

b. En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (**partie A**)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (**partie B**).

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence.

Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$. (où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.

2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.
Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs, ...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :

Soit $g(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$ la relation :

$$(\text{E}) \qquad g'(t) = ag(t)\left[1 - \frac{g(t)}{\text{M}}\right].$$

où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la **partie A**.

1. a. Démontrer que si g est une fonction strictement positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle

$$(\text{E}') \qquad y' + ay = \frac{a}{\text{M}}.$$

b. Résoudre (E′).

c. Démontrer que si h est une solution strictement positive de (E′), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2. On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \frac{\text{M}}{1 + C\text{e}^{-at}}$ où C est une constante strictement supérieure à 1 dépendant des conditions expérimentales.

a. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < \text{M}$.

b. Étudier le sens de variation de g (on pourra utiliser la relation (E)).
Démontrer qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \frac{\text{M}}{2}$.

c. Démontrer que $g'' = a\left(1 - \dfrac{2g}{\text{M}}\right)g'$. Étudier le signe de g''. En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus.
Exprimer t_0 en fonction de a et C.

d. Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculer le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0, en fonction de M et C.

Partie C

1. Le tableau présenté en **Annexe I** a permis d'établir que la courbe représentative de f passait par les points de coordonnées respectives $(0\,;\,1)$ et $(0{,}5\,;\,2)$. En déduire les valeurs de N_0, T et a.
2. Sachant que $g(0) = \text{N}_0$ et que $\text{M} = 100\ \text{N}_0$, démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'égalité suivante :

$$g(t) = \frac{100}{1 + 99 \times 4^{-t}}.$$

3. Tracer, sur la feuille donnée en **Annexe II**, la courbe Γ représentative de g, l'asymptote à Γ ainsi que le point de Γ d'abscisse t_0.
4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites ?

PROBLÈME proposé par l'A. P. M. E. P. **11 points**
Commun à tous les candidats

On étudie une population de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$.
Ce problème a pour objet l'étude de trois modèles d'évolution de cette population.
Dans tout le problème, la population initiale sera de 1 million d'individus, et on exprimera le temps en heures, et la population de bactéries en millions d'individus.

Partie A
Un modèle discret
On suppose que la population double toutes les demi-heures.

1. Combien y-a-t-il de bactéries au bout d'une heure ? au bout de deux heures ?
2. Soit $P(n)$ le nombre d'individus au bout de n heures. Donner l'expression de $P(n)$ en fonction de n.
3. Au bout de combien d'heures la population dépasse-t-elle 100 millions d'individus ?
   Quelle est la limite de la suite $(P(n))$?

Partie B
Un premier modèle continu

On s'intéresse à la population de bactéries à l'instant t.
Pour faciliter le traitement mathématique, on la représente par une fonction continue et dérivable $f(t)$ (ceci malgré le fait qu'en toute rigueur, elle devrait être forcément un nombre décimal n'ayant pas plus de 6 décimales, puisqu'il y a un nombre entier de bactéries).
On prend pour hypothèse dans ce premier modèle continu qu'à chaque instant l'accroissement de la population par unité de temps, $f'(t)$, est proportionnel à la population.
Cela revient à dire qu'il existe un coefficient a strictement positif et invariant au cours du temps tel que $f'(t) = af(t)$.

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle $y' = ay$, et en déduire l'expression de $f(t)$, en prenant en compte la population initiale.
   b. On suppose que la population double toutes les demi-heures. En déduire la valeur de a.
2. On suppose désormais que la population à l'instant t est : $f(t) = \mathrm{e}^{t\ln 4} = 4^t$.
   a. Dans ce modèle, combien y-a-t-il de bactéries au bout de 10 minutes, au bout de 1 h 40 ?
   Quelle est la limite de $f(t)$ en plus l'infini ?
   b. Si l'instant initial était midi, à quelle heure, à la minute près, la population atteindrait-elle 100 millions ?
   c. Comparer $f(n)$ et $P(n)$; qu'apporte cette deuxième modélisation par rapport à la première ? (On peut comparer les questions posées dans A et dans B pour évaluer les « performances »de chaque modélisation.)

Partie C
Un modèle continu moins simpliste : l'équation logistique

L'expérience montre que le nombre de bactéries ne peut pas croître sans limite comme dans le modèle précédent. Pour améliorer le modèle, on introduit un terme négatif dans l'équation différentielles qui va avoir pour effet de diminuer la vitesse du phénomène. Ce modèle a été imaginé par Verhulst en 1838.
Dans ce paragraphe, la population à l'instant t est notée $g(t)$; elle est supposée définie sur l'ensemble des réels positifs ou nuls, dérivable et strictement positive et elle est solution de l'équation différentielle :

$$y' = y\ln(4) - ky^2$$

où k est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales.

1. Résolution de cette équation différentielle :
   a. Prouver, pour toute fonction g dérivable et strictement positive, l'équivalence suivante :

$$\left(\forall t,\ g'(t) = g(t)\ln 4 - k(g(t)^2)\right) \iff \left(\forall t,\ \left(\frac{1}{g}\right)'(t) = -\frac{1}{g(t)}\ln 4 + k\right).$$

   b. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y\ln(4) + k$.
   c. Déduire de a. et b. une expression de $g(t)$ en prenant en compte la condition initiale : $g(0) = 1$.
   d. On suppose dans cette question que : $g(t) = \dfrac{\ln 4}{(\ln 4 - k)\mathrm{e}^{-t\ln 4} + k}$.
   Des mesures expérimentales montrent que la population finit par se stabiliser à 100 millions d'individus. On traduit cette stabilisation par la condition : $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 100$.
   Quelle est la valeur de k pour que cette condition soit remplie.
2. Comportement de ce modèle.
   On suppose désormais que $g(t) = \dfrac{100}{1+99\mathrm{e}^{t\ln 4}} = \dfrac{100}{1+99\times 4^t}$.
   a. Vérifier que cette fonction est solution de l'équation différentielle (E)

$$y' = y\ln 4 - \frac{\ln 4}{100}y^2$$

   et qu'elle vérifie les deux conditions $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 100$.

b. Comparer les nombres 100 et $g(t)$.

c. Établir le tableau de variation complet de g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. Tracer dans un repère adapté aux données la représentation graphique (T) de g.

d. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation : $g(T) = 50$.
On note la solution d.

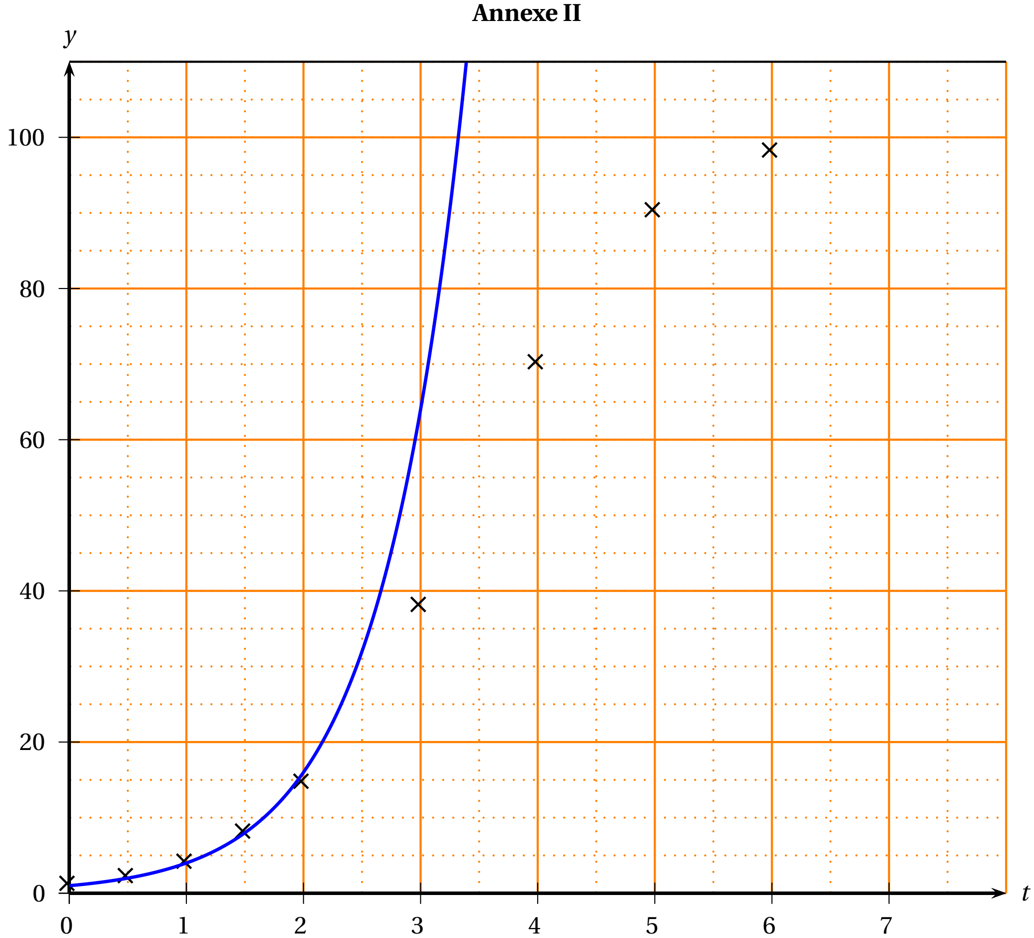
Document à rendre avec la copie

Annexe I

t (en h)	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
Nombre de bactéries (en millions)	1,0	2,0	3,9	7,9	14,5	37,9	70,4	90,1	98

Les points obtenus à partir de ce tableau, ainsi que le graphe de la fonction f, sont représentés dans le graphique ci-dessous.

Annexe II



Baccalauréat La Réunion S juin 2003

EXERCICE 1 **6 points**
Commun tous les candidats

Cet exercice comporte 3 questions indépendantes.
Une question comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c et d.
Aucune justification n'est demandée pour cet exercice.
Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.
Vous inscrirez en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX » dans la case correspondante du tableau donné en annexe à rendre avec la copie.

1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et avec remise, n désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.
   a. X suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{4}$.
   b. $\text{P}(X = 0) = \dfrac{1}{2^{2n}}$
   c. $\text{P}(X < 5) = 1 - \text{P}(X > 5)$
   d. $\text{E}(X) = 0,75n$
2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée.
   Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :
   • Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % sont négatifs.
   • Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs).
   Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test.
   On note M l'évènement : **l'individu est malade** et T l'évènement : **le test pratiqué est positif**.
   a. $\text{P}_M(T) + \text{P}_{\overline{M}}(T) = 1,01$.
   b. $\text{P}_M(T) + \text{P}_{\overline{M}}(T) = \text{P}(T)$
   c. $\text{P}(T) = 2,97 \cdot 10^{-2}$.
   d. Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.
3. La durée d'attente en seconde de la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,01$. Alors :
   a. La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par : $f(t) = \text{e}^{-0,01t}$
   b. Pour tout réel t positif, $\text{P}(Y \leqslant t) = 1 - \text{e}^{-0,01t}$.
   c. La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à $0,01$ près, égale à $0,16$.
   d. Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Le nombre a désigne un réel strictement positif.
On considère le point M de la demi-droite [AE) défini par $\overrightarrow{\text{A}M} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{\text{AE}}$.

1. Déterminer le volume du tétraèdre ABDM en fonction de a.
2. Soit K le barycentre du système de points pondérés :

$$\left\{\left(M\,;\,a^2\right),\ (\mathrm{B}\,;\,1),\ (\mathrm{D}\,;\,1)\right\}.$$

   a. Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{B}K}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{B}M}$ et de $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.

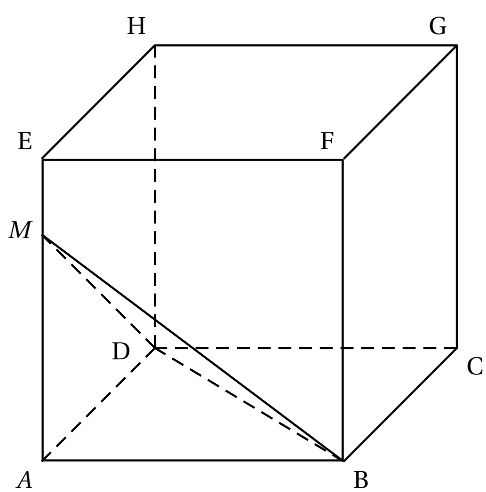
   b. Calculer $\overrightarrow{\mathrm{B}K} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}K} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ puis en déduire l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{B}K} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{D}} = 0$.

   c. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{D}K} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{B}} = 0$.

   d. Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM.

3. Démontrer les égalités $\overrightarrow{\mathrm{A}K} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{B}} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}K} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{D}} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?
4. **a.** Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ unité d'aire.

   b. Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BDM soit égale à 1 unité d'aire. Déterminer la distance AK dans ce cas.



EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 1 cm, pour unité graphique.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)z - 1 + \mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right).$$

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i. En déterminer le rapport et l'angle.
2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}\mathrm{i}$.

   Calculer $\Omega\mathrm{M}_0$ et donner une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}_0}\right)$.
3. On considère la suite de points $(M_n)_{n\geqslant 0}$, définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

a. Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

b. Monter par récurrence, pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$z_n - \mathrm{i} = 2^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - \mathrm{i}).$$

c. Pour tout entier naturel n, calculer ΩM_n, puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geqslant 10^2$.

4. a. On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où x et y sont deux entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(-5\,;\,-3)$ est solution, résoudre l'équation (E).

b. Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\mathrm{Im}(z) = 1$ et $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$.

Caractériser géométriquement Δ et le représenter.

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$. Préciser son plus petit élément.

PROBLÈME **9 points**

Commun à tous les candidats.

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. a. Démontrer que la fonction u définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ est solution de (E).

b. Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0\,;\,+\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur $]0\,;\,+\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.

c. En déduire toutes les solutions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation (E).

2. Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}\mathrm{e}^x.$$

a. Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et déterminer le nombre de solutions sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation $f_k'(x) = 0$.

3. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

On a tracé sur le graphique ci-joint les courbes $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_{-0,25}$, $\mathscr{C}_{-0,15}$ et $\mathscr{C}_0$.

En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).

4. Pour tout réel a strictement positif, on pose $\mathscr{A}(a) = \displaystyle\int_a^{a+1} \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$.

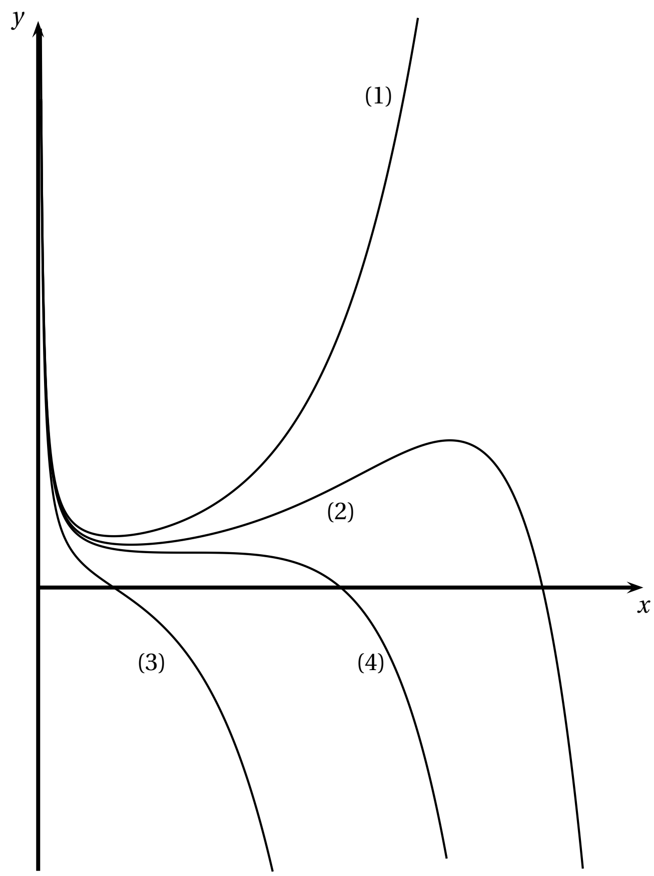
a. Interpréter géométriquement $\mathscr{A}(a)$.

b. On désigne par F une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

En remarquant que $\mathscr{A}(a) = F(a+1) - F(a)$ étudier le sens de variation de la fonction qui à tout réel a élément de $]0\,;\,+\infty[$ associe le réel $\mathscr{A}(a)$

c. On veut découper dans le plan une bande verticale de largeur une unité de telle sorte que l'aire située dans cette bande entre les courbes $\mathscr{C}_0$ et $(\mathrm{O}x)$ soit minimale. Comment doit-on procéder ?

Annexe du problème



∽ Baccalauréat S Liban mai 2003 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4.
2. On considère les évènements suivants :
   B_n : « On tire une boule blanche lors du n-ième tirage »,
   U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».
   a. Calculer la probabilité de l'évènement B_n.
   b. Exprimer la probabilité de l'évènement U_n en fonction de n.
   c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité :
   $$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.
   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
   b. Déterminer la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
   $$4z^2 - 12z + 153 = 0.$$
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_{\text{A}} = \frac{3}{2} + 6\text{i}$,
   $z_{\text{B}} = \frac{3}{2} - 6\text{i}$; $z_{\text{C}} = -3 - \frac{1}{4}\text{i}$, $z_{\text{P}} = 3 + 2\text{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{w}} = -1 + \frac{5}{2}\text{i}$.
   a. Déterminer l'affixe z_{Q} du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\overrightarrow{w}$.
   b. Déterminer l'affixe z_{R} du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.
   c. Déterminer l'affixe z_{S} du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   Placer les points P, Q, R et S.
3. **a.** Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

b. Calculer $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$.

En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.

c. Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathscr{C}$. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.

4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathscr{C}$?

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{array}{lll} x_0 = 3 & \text{et} & x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1 & \text{et} & y_{n+1} = 2y_n + 3. \end{array}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2. a. Calculer le pgcd de x_8 et x_9, puis celui de x_{2002} et x_{2003}. Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part ?

b. x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.

b. Exprimer y_n en fonction de n.

c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

d. On note d_n le pgcd de x_n et y_n pour tout entier naturel n.

Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A Étude d'une fonction auxiliaire *g*

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^x + 2x - 7$.

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

3. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α telle que :

$$0,94 < \alpha < 0,941.$$

4. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x - 5)\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$, ou f' désigne la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

   Dresser le tableau de variations de f.
4. **a.** Démontrer l'égalité : $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$.

   b. Étudier le sens de variations de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\dfrac{5}{2}\right[$.

   En déduire, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la **partie A**, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de $f(\alpha)$.
5. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$, d'équation $y = 2x - 5$, est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

   Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.
6. Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

Partie C - Calcul d'aires

À l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$ de la portion de plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \dfrac{5}{2}$.

Partie D - Étude d'une suite de rapports de distances

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on considère les points A_n, B_n, et C_n d'abscisse n, appartenant respectivement à l'axe des abscisses, la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$; soit u_n le réel défini par :

$$u_n = \frac{C_nB_n}{A_nB_n}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$u_n = \frac{2n - 5 - f(n)}{2n - 5}.$$

2. **a.** Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

   b. Calculer la limite de la suite (u_n). Pouvait-on prévoir ce résultat ?

∽ Baccalauréat S Polynésie juin 2003 ∾

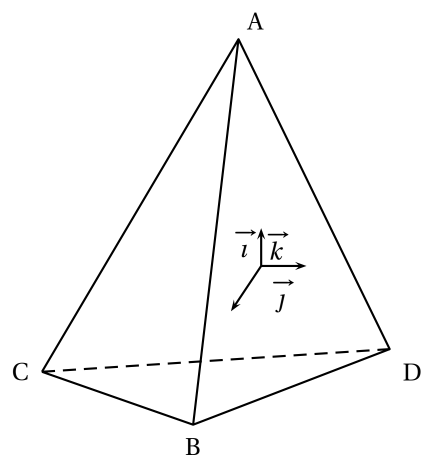
EXERCICE 1 **4 points**

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :

$$A(0\,;\,0\,;\,3),\ B\left(2\sqrt{2}\,;\,0\,;\,-1\right),\ C\left(-\sqrt{2}\,;\,-\sqrt{6}\,;\,-1\right),\ D\left(-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{6}\,;\,-1\right).$$

1. Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.
2. On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC] ; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.
3. Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.



Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.
On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1. Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
2. Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
3. Calculer la probabilité de l'évènement E « les six faces rouges sont visibles ».
4. On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.
   Calculer la probabilité p_n pour que l'évènement E soit réalisé au moins une fois.
   Calculer $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

EXERCICE 2 (Obligatoire) **5 points**

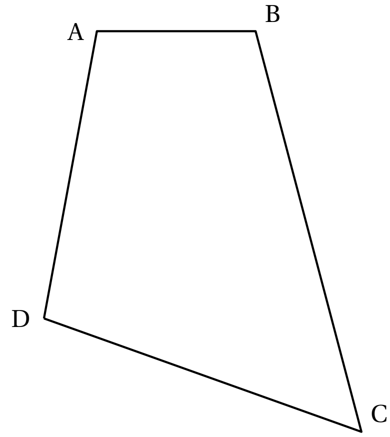
Dans tout l'exercice, le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Les constructions seront faites sur papier millimétré.

1. **a.** Le point E a pour affixe $Z_E = 3 + \mathrm{i}$ et le point F a pour affixe $Z_F = 1 + 3\mathrm{i}$.
Placer dans $\mathscr{P}$ les points E et F.

   b. Construire le point H tel que EHF soit un triangle rectangle isocèle direct de sommet H, c'est-à-dire tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{HF}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{HE}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

   c. On désigne par Z_H l'affixe de H.
Montrer que $\left|\dfrac{3 + \mathrm{i} - Z_H}{1 + 3\mathrm{i} - Z_H}\right| = 1$ et que $\arg\left(\dfrac{3 + \mathrm{i} - Z_H}{1 + 3\mathrm{i} - Z_H}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
En déduire que $Z_H = 3 + 3\mathrm{i}$.

2. A, B, C et D sont quatre points du plan $\mathscr{P}$.



   a. Construire les triangles rectangles isocèles directs BIA, AJD, DKC et CLB d'angles droits respectifs $\widehat{\mathrm{BIA}}$, $\widehat{\mathrm{AJD}}$, $\widehat{\mathrm{DKC}}$ et $\widehat{\mathrm{CLB}}$.

   b. Conjecturer la position relative des droites (IK) et (LJ) et le rapport des longueurs des segments [IK] et [LJ].

3. **a.** On désigne par a, b et z_1 les affixes respectives des points A, B et I.
Montrer que $\left|\dfrac{b - z_1}{a - z_1}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{b - z_1}{a - z_1}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
En déduire que $z_1 = \dfrac{\mathrm{i}a - b}{\mathrm{i} - 1}$.

   b. Avec les points B, C et L d'affixes respectives b, c et z_L, exprimer sans démonstration z_L en fonction de b et c.

   c. Avec les points C, D et K d'affixes respectives c, d et z_K, exprimer de même z_K en fonction de c et d. Avec les points D, A et J d'affixes respectives d, a et z_J exprimer de même z_J en fonction de a et d.

   d. Montrer que $z_L - z_J = \mathrm{i}\,(z_K - z_I)$. En déduire que les droites (JL) et (KI) sont perpendiculaires et que JL = KI.

EXERCICE 2 (Spécialité) 5 points

Le plan complexe est rapporté un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm.
On donne les points A, C, D et Ω, d'affixes respectives $1 + \mathrm{i}$, 1, 3 et $2 + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

Partie A

1. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω passant par A.

   a. Montrer que $\mathscr{C}$ passe par C et D.

   b. Montrer que le segment [AD] est un diamètre de $\mathscr{C}$.

c. Sur une feuille de papier millimétré, faire une figure en plaçant les points A, C, D, Ω et tracer $\mathscr{C}$. On note B la seconde intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite (OA).

d. Montrer que le point O est extérieur au segment [AB].

2. Montrer par un raisonnement géométrique simple que les triangles OAD et OCB sont semblables mais non isométriques.

Soit S la similitude qui transforme le triangle OCB en le triangle OAD.

a. Montrer que S est une similitude indirecte différente d'une réflexion.

b. Quel est le centre de S ?

Partie B

1. **a.** Déduire de la partie **A 2** que l'on a OA × OB = OC × OD.

b. En déduire le module de l'affixe z_{B} du point B. Déterminer un argument de z_{B}.

2. Déterminer l'écriture complexe de S.

3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S ∘ S.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^x \cos x.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal.

1. Montrer que pour tout réel x,

$$-\text{e}^x \leqslant f(x) \leqslant \text{e}^x.$$

En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote au voisinage de $-\infty$. Quelle est cette asymptote ?

2. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

3. On étudie f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}~;~+\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Démontrer que pour tout réel $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}~;~+\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

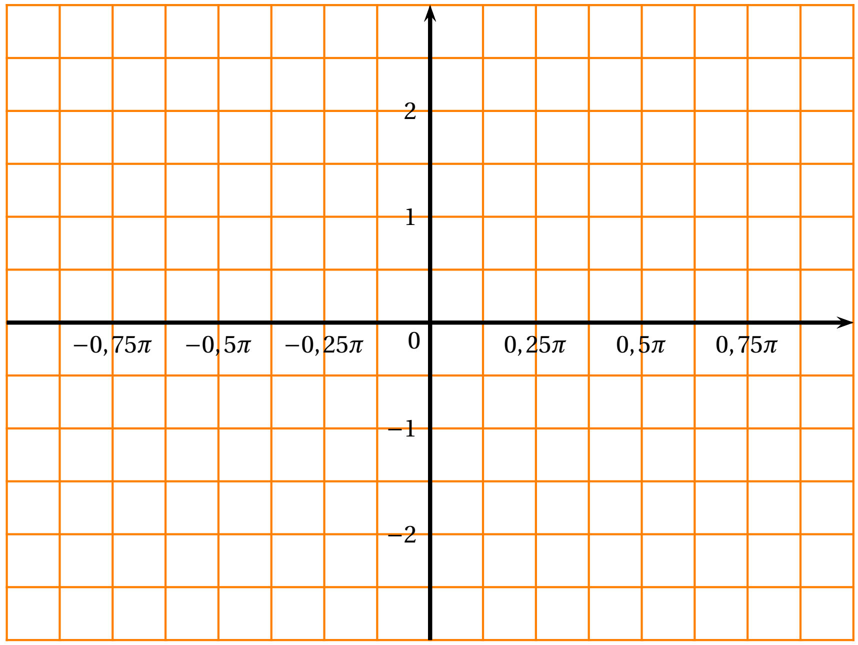
4. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

Montrer que f est croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}~;~+\dfrac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[+\dfrac{\pi}{4}~;~+\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}~;~+\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Indiquer les valeurs prises par f en $-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.

5. Tracer $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}~;~+\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur le graphique ci-dessous



6. Démontrer que, sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution unique α.
   Trouver, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée décimale de α arrondie au centième.
7. On note f'' la fonction dérivée seconde de f. Montrer que $f''(x) = -2\mathrm{e}^x \sin x$.
   En déduire que, sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ +\dfrac{\pi}{2}\right]$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x atteint, pour $x = 0$, une valeur maximale que l'on précisera.
   Trouver l'équation de la tangente T $\mathscr{C}_f$ en 0 et tracer T sur le graphique de la question 5.

Partie B

Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(nx)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$.
2. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :
$$I_n = \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{\pi} - 1}{1 + n^2}.$$
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\quad |I_n| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{\pi} + 1}{1 + n^2}$.
   En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Partie C

On considère les équations différentielles

$$(\mathrm{E}) \qquad y' - 2y - 1 = 0$$

$$(\mathrm{E}') \qquad y' - 2y = 1 - \mathrm{e}^{x} \sin x$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dire, en le justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. (E) admet une fonction polynôme du premier degré comme solution.
2. Soit g une fonction positive définie sur $\mathbb{R}$; si g est solution de (E) alors elle est croissante sur D.
3. La fonction $x \longmapsto 3\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{2}$ est une solution de (E).
4. La primitive F de f qui s'annule en 0 est une solution de (E$'$).

Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.

Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\frac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.
Les probabilités demandées seront arrondies au 100^{e} *le plus proche.*

1. **a.** Montrer que la probabilité qu'un jour donné les 12 groupes inscrits soient tous présents est comprise entre $0,20$ et $0,21$.

   b. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où les 12 groupes inscrits se sont tous présentés au départ lors d'un mois de 30 jours. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   Donner la signification des évènements $X = 30$ puis $X = 0$ et calculer la probabilité de ces évènements.

   Préciser l'espérance mathématique $\text{E}(X)$

   Quelle signification peut-on donner à ce résultat?

   c. Une somme de 1 Crédit (la monnaie locale) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.

   Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.

   On nomme S la variable aléatoire égale à la somme, en Crédits, perçue par l'association un jour donné.

   Calculer la probabilité de l'évènement $[S = 11]$.

   Préciser l'espérance mathématique de S.

2. **a.** Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. évidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le 13^{e} groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédits à l'association.

   Quelle est la probabilité P_{13} qu'un jour donné il n'y ait pas de désistement, c'est-à-dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade?

   b. Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.

   Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.

   c. Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :

   $$\left(\sum_{k=0}^{13} k \cdot \binom{k}{13}\left(\frac{7}{8}\right)^{k}\left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}\right) - 2\text{P}_{13}.$$

   Calculer ce gain.

   d. La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association?

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0.$$

où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\dfrac{14}{39}$ est solution de l'équation (1)

a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation
$14u + 39v = 1\,129$.

b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$.

Vérifier que le couple $(-25 ; 9)$ est solution de cette équation.

c. En déduire un couple $(u_0 ; v_0)$ solution particulière de l'équation
$14u + 39v = 1\,129$.

Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u ; v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.

d. Déterminer, parmi les couples $(u ; v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2. a. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.

En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b. Soit $\dfrac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0 \quad \text{où } u \text{ et } v \text{ sont des entiers relatifs.}$$

Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

PROBLÈME **10 points**

Partie A - étude préliminaire d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x - 1$

1. Déterminer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Montrer que la fonction φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudier le signe de sa dérivée.

En déduire les variations de la fonction φ et préciser les valeurs de $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.

3. Prouver que la fonction φ s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera α et β. On prendra $\alpha < \beta$. étudier alors le signe de la fonction φ sur l'ensemble des réels et récapituler cette étude dans un tableau.

4. À l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} des valeurs α et β.

5. Montrer que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{2 - \alpha}$.

Partie B - Étude d'une fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$ et calcul intégral

1. Montrer que $\mathrm{e}^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f puis, à l'aide des résultats de la **partie A**, construire le tableau des variations de f.
4. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, le nombre α étant la plus petite des deux valeurs pour lesquelles la fonction φ de la partie A s'annule.
5. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 0,01 près de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}\,\mathrm{d}x.$$

Partie C - étude de deux suites

1. Préciser l'ensemble de définition D_g de la fonction g définie sur cet ensemble par $g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{2 - x}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   Prouver que la fonction g est croissante sur son ensemble de définition et que l'image par g de l'intervalle $\mathrm{I} = [-2~;~0]$ est incluse dans cet intervalle.
2. **a.** Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \end{array}\right.$$

   Montrer que u_1 appartient à l'intervalle $\mathrm{I} = [-2~;~0]$. Prouver par récurrence, à l'aide des variations de la fonction g, que la suite (u_n) a tous ses termes dans l'intervalle I et est croissante.

   b. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 0 \\ v_{n+1} & = & g(v_n) \end{array}\right.$$

   Calculer le terme v_1 et montrer que $-2 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 0$.
   Établir par récurrence, à l'aide de la croissance de la fonction g sur l'intervalle $[-2~;~0]$, que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :

$$-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0.$$

   Préciser le sens de variation de la suite (v_n).
3. **a.** Soit m la fonction définie sur $[0~;+\infty[$ par :

$$m(x) = x - \ln(1 + x).$$

   Montrer que m est croissante et calculer $m(0)$. En déduire que, pour tout x positif, on a $\ln(1 + x) \leqslant x$.

   b. Vérifier que, pour tout entier n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \dfrac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right)$.
   En déduire que $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{v_n - u_n}{2 - v_n}$.
   Sachant que, pour tout entier n, les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle $[-2~;~0]$, donner un encadrement de $\dfrac{1}{2 - v_n}$ et établir que :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(v_n - u_n\right).$$

Prouver alors que, pour tout entier naturel n,

$$v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}\left(v_0 - u_0\right).$$

Que peut-on en déduire pour la suite de terme général $v_n - u_n$ et pour les suites (u_n) et (v_n) ?

4. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-4} de u_{10} et v_{10}.

Baccalauréat S Métropole septembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère les points A et Ω d'affixes respectives : $a = -1 + \sqrt{3} + \text{i}$ et $\omega = -1 + 2\text{i}$.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

1. Placer sur une figure les points A et Ω, l'image B du point A par r, l'image C du point B par r et l'image D du point A par h.
2. On note b, c et d les affixes respectives des points B, C et D.

   Le tableau ci-dessous contient une suite de 18 affirmations, dont chacune débute dans la première colonne et s'achève sur la même ligne colonne 2, colonne 3 ou colonne 4.

   Le candidat doit se prononcer sur chacune de ces affirmations. Pour cela il doit remplir le tableau de la feuille annexe, en faisant figurer dans chacune des cases la mention VRAI ou FAUX (en toutes lettres).

1.	$\lvert a - \omega \rvert =$	2	4	$\sqrt{3} - \text{i}$
2.	$\arg(a - \omega) =$	$-\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{47\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{6}$

3.	$\left(\vec{v}, \overrightarrow{\Omega\text{C}}\right) =$	$\arg((\omega - c)\text{i})$	$\left(-\vec{v}, \overrightarrow{\text{C}\Omega}\right)$	$\dfrac{2\pi}{3}$
4.	$\omega =$	$\dfrac{1}{3}(a + b + c)$	$a + b + c$	$b - 2\text{i}$

5.	$\dfrac{b - d}{a - d} =$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$
6.	Le point D est	l'image de Ω par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{A}\Omega}$.	l'image de Ω par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{3}{2}$	l'image de Ω par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un commerce possède un rayon « journaux »et un rayon « souvenirs ».

À la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon. On constate que la caisse du rayon « journaux »contient trois fois plus de pièces de 1€ que celle du rayon « souvenirs ».

Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face diffère et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique.

Ainsi, 40 % des pièces de 1€ dans la caisse du rayon « souvenirs »et 8 % de celles du rayon « journaux »portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).

1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère.
   Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ». On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face étrangère.
   a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.
   b. Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.
   c. Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.
2. Les pièces de 1€ issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac.
   On prélève au hasard une pièce du sac.
   On note S l'évènement : « la pièce provient de la caisse « souvenirs » »et E l'évènement « la pièce porte une face étrangère ».
   a. Déterminer $P(S)$, $P_S(E)$; en déduire $P(S \cap E)$.
   b. Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à $0,16$.
   c. Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ».
3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à $0,16$.
   Le collectionneur prélève n pièces (n entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise.
   Calculer n pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à $0,9$.

PROBLÈME **10 points**
Commun à tous les candidats

Partie A : Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad y' - 3y = \frac{-3\mathrm{e}}{(1+\mathrm{e}^{-3x})^2}.$$

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-3x}\varphi(x).$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, exprimer $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$.
2. Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\varphi(0) = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Partie B : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{1-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de f.
2. Tracer $\mathscr{C}$.
3. Pour α réel non nul, on pose $\mathrm{I}_\alpha = \displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$.
   - **a.** Donner le signe et une interprétation graphique de I_α en fonction de α.
   - **b.** Exprimer I_α en fonction de α.
   - **c.** Déterminer la limite de I_α lorsque α tend vers $+\infty$.

Partie C

On définit sur $\mathbb{N}^*$ la suite (u_n) par :

$$u_n = \int_0^\alpha f(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x \text{ où } f \text{ est la fonction définie dans la } \textbf{partie B}.$$

On ne cherchera pas à calculer u_n.

1. **a.** Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le signe de u_n.
   - **b.** Donner le sens de variation de la suite (u_n).
   - **c.** La suite (u_n) est-elle convergente ?
2. **a.** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{I}_1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\mathrm{I}_1$$

   où I_1 est l'intégrale de la **partie B** obtenue pour α égal à 1.
   - **b.** En déduire la limite de la suite (u_n).
     Donner sa valeur exacte.

Baccalauréat S Polynésie spécialité septembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormé. Soit s un nombre réel.
On donne les points A(8 ; 0 ; 8), B(10 ; 3 ; 10) ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -5+3s\\ y &=& 1+2s\\ z &=& -2s \end{array}\right.$$

1. **a.** Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B.

   b. Démontrer que $\mathcal{D}$ et Δ sont non coplanaires.
   Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

   c. Montrer que la distance d'un point quelconque M de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{P}$ est indépendante de M.

   d. Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de $\mathcal{P}$ avec le plan (xOy).

2. La sphère $\mathcal{S}$ est tangente à $\mathcal{P}$ au point C(10 ; 1 ; 6). Le centre Ω de $\mathcal{S}$ se trouve à la distance $d = 6$ de $\mathcal{P}$, du même côté que O.
   Donner l'équation cartésienne de $\mathcal{S}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.
Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.
2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k+1)$, puis que n est divisible par 16.
3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n.
4. **a.** Soient a, b et c trois entiers naturels.
   Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.

   b. Déduire de ce qui précède que 240 divise n.
5. Existe-t-il quinze nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 1 \\ f(x) & = & \dfrac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 \quad \text{si} \quad x>0 \end{array}\right.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** Étudier la dérivabilité de f en 0.

   b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x>0$, f' désignant la fonction dérivée de f.
3. Étudier le sens de variations de f sur $[0~;~+\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

1. Calculer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x=1$.
2. On considère la fonction $g~:~x\longmapsto f(x)-2x-\dfrac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   a. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g. Étudier le sens de variations de g'. En déduire le signe de $g'(x)$ sur $]0~;~+\infty[$

   b. Étudier le sens de variations de g.

   En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente $\mathscr{D}$.
3. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{D}$ (unité graphique : 2 cm).

Partie C

1. n est un entier naturel non nul.

   Exprimer en fonction de n le réel $I_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2\ln x\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser une intégration par parties).
2. En déduire en fonction de l'entier n, l'aire $\mathscr{A}_n$ exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la tangente $\mathscr{D}$ et les deux droites d'équation $x=\dfrac{1}{n}$ et $x=1$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathscr{A}_n$ et interpréter le résultat obtenu.

☙ Baccalauréat S Amérique du Sud ❧ novembre 2003

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement -1, 0, 0, 1 et indiscernables au toucher.
On tire un jeton du sac, on note son numéro x et on le remet dans le sac ; on tire un second jeton, on note son numéro y et on le remet dans le sac ; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro z et on le remet dans le sac.
Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.
À chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ le point M de coordonnées $(x,\ y,\ z)$.
Sur le graphique joint en annexe page 6, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions possibles du point M. Les coordonnées du point A sont $(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On note $\mathscr{C}$ le cube ABCDEFGH.

1. Démontrer que la probabilité que le point M soit en A est égale à $\dfrac{1}{64}$.
2. On note E_1 l'évènement : « M appartient à l'axe des abscisses ».
   Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\dfrac{1}{4}$.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par O et orthogonal au vecteur $\vec{n}\,(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.
   - **a.** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.
   - **b.** Tracer en couleur sur le graphique de la page 5, la section du plan $\mathscr{P}$ et du cube $\mathscr{C}$. (On ne demande pas de justification).
   - **c.** On note E_2 l'évènement : « M appartient à $\mathscr{P}$ ».
     Quelle est la probabilité de l'évènement E_2 ?
4. On désigne par $\mathscr{B}$ la boule de centre O et de rayon 1,5 (c'est-à-dire l'ensemble des points M de l'espace tels que $\text{O}M \leqslant 1,5$).
   On note E_3 l'évènement : « M appartient à la boule $\mathscr{B}$ ».
   Déterminer la probabilité de l'évènement E_3.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique 4 cm).
Soit I le point d'affixe 1. On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [OI] et on nomme son centre Ω.

Partie I

On pose $a_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$ et on note A_0 son image.

1. Montrer que le point A_0 appartient au cercle $\mathscr{C}$.
2. Soit B le point d'affixe b, avec $b = -1 + 2\text{i}$, et B' le point d'affixe b' telle que $b' = a_0 b$.
   - **a.** Calculer b'.
   - **b.** Démontrer que le triangle OBB' est rectangle en B'.

Partie II

Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe.
À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az$.

1. On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M'.

a. Interpréter géométriquement $\arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)$.

b. Montrer que $\left(\overrightarrow{M'\mathrm{O}}\,,\ \overrightarrow{M'M}\right) = \arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right) + 2k\pi \quad (\text{où } k \in \mathbb{Z})$.

c. En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle $\mathscr{C}$ privé de O et de I.

2. Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O.
On note x son affixe.
On choisit a de manière que A soit un point de $\mathscr{C}$ différent de I et de O.
Montrer que le point M' appartient à la droite (OA).
En déduire que M' est le projeté orthogonal de M sur cette droite.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).
On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{5}$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation

$$(E) : 3y = 5(15 - x).$$

2. Soit I le point d'affixe 1.
On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O.
Sa position initiale est en I.
On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point A sur le cercle $\mathscr{C}$ après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels).
On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\dfrac{\pi}{3}$ cm (respectivement $\dfrac{\pi}{5}$ cm).
Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle $\mathscr{C}$ à partir de I.

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6. On pose $s_1 = r_1 \circ h_1$ et $s_2 = r_2 \circ h_2$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2.

2. On pose :
$S_m = s_1 \circ s_1 \cdots \circ s_1$ (composée de m fois s_1, m étant un entier naturel non nul),
$S'_n = s_2 \circ s_2 \cdots \circ s_2$ (composée de n fois s_2, n étant un entier naturel non nul),
et $f = S'_n \circ S_m$.
   a. Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n} \times 3^n$ et d'angle $m\dfrac{\pi}{3} + n\dfrac{6\pi}{5}$.
   b. f peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?
   c. On appelle M le point d'affixe 6 et M′ son image par f.
   Peut-on avoir OM′ = 240 ?
   Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique $(m,\ n)$ tel que OM′ = 576.
   Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{OM}'}\right)$.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\text{e}^x + \text{e}^{-x}}$$

et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
2. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\text{e}^{-x} \leqslant \text{e}^x$.
3. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. On considère les fonctions g et h définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{\text{e}^x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{2\text{e}^x}$.
Sur l'annexe sont tracées, dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ les courbes représentatives de g et h, notées respectivement Γ_1 et Γ_2.
   a. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.
   b. Que peut-on en déduire pour les courbes Γ, Γ_1, et Γ_2 ?
   Tracer Γ sur l'annexe, en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\text{d}x$.

1. Justifier l'existence de (I_n), et donner une interprétation géométrique de (I_n).
2. **a.** Démontrer, que pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$.
   b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
   c. Démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie C

Soit (J_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $J_n = \displaystyle\int_0^{n} f(x)\,\text{d}x$.

1. En utilisant l'encadrement obtenu dans la question **A. 4. a.**, démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-n}\right) \leqslant J_n \leqslant 1-\mathrm{e}^{-n} \leqslant 1.$$

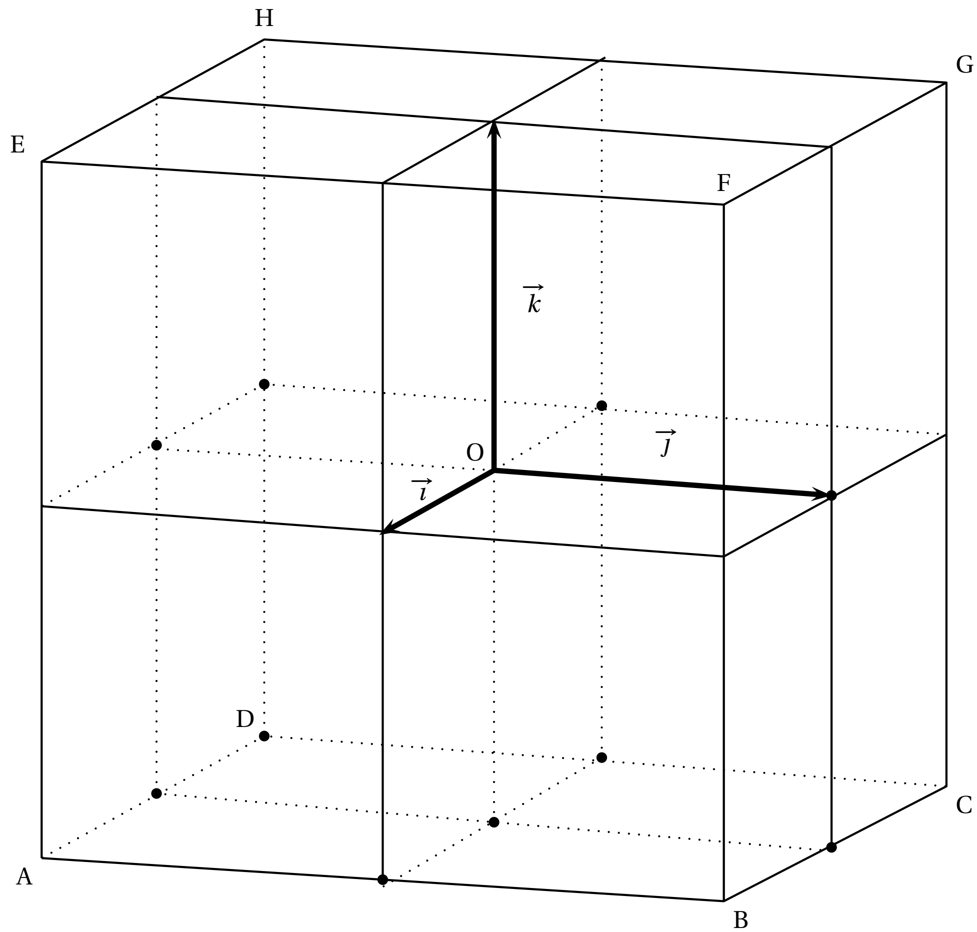
2. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
En déduire qu'elle converge.
3. On note L la limite de la suite (J_n) et on admet le théorème suivant :
« Si u_n, v_n et w_n sont trois suites convergentes de limites respectives a, b et c et si, à partir d'un certain rang on a pour tout n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $a \leqslant b \leqslant c$ ».
Donner un encadrement de L.
4. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On note v la primitive de u sur $\mathbb{R}$ telle que $v(1) = \frac{\pi}{4}$.
On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = \frac{\pi}{2}$.
   a. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2+1}$.
   b. Démontrer que, pour tout réel x, f est la dérivée de la fonction $x \longmapsto v\left(\mathrm{e}^x\right)$.
   c. En déduire la valeur exacte de L.

Annexe de l'exercice 1

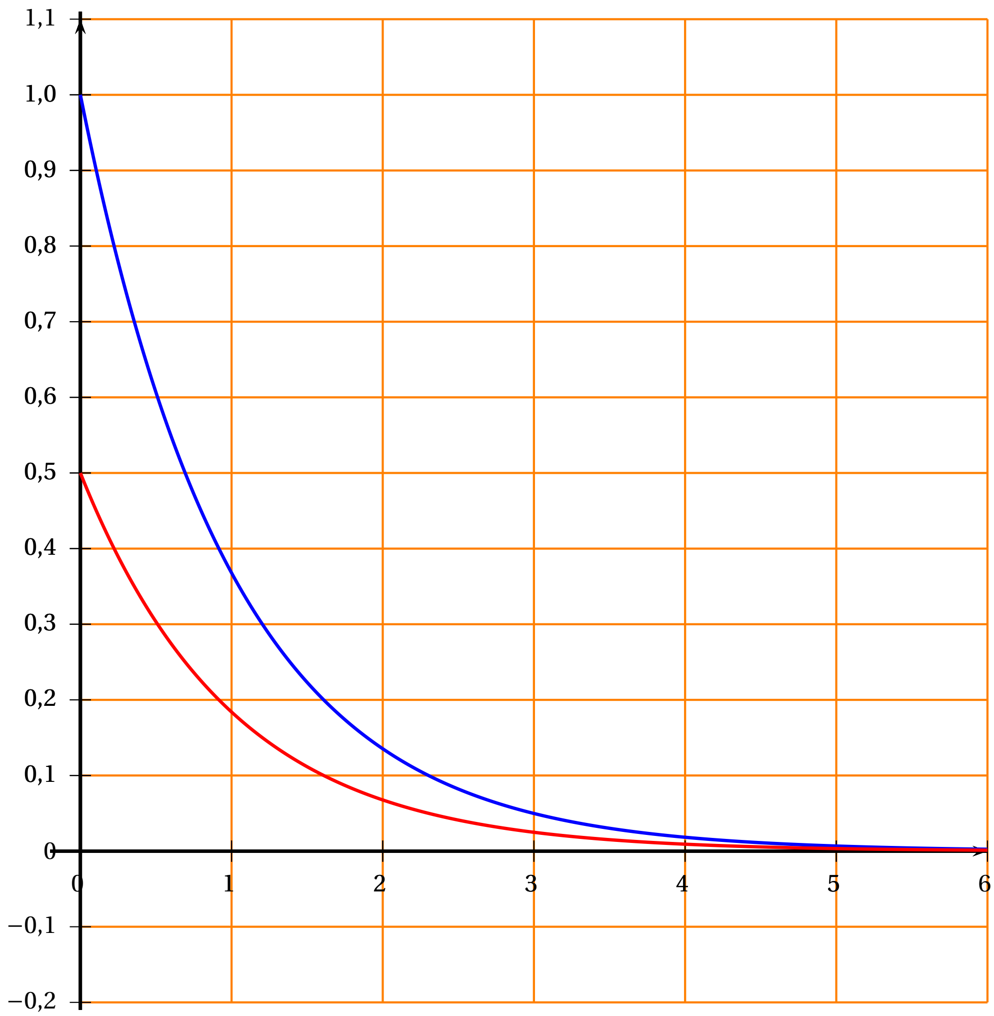
Cette page sera complétée et remise avec la copie



Annexe du problème

Cette page sera complétée et remise avec la copie

Courbes Γ_1 et Γ_2



∽ Baccalauréat Nouvelle-Calédonie S ∾ novembre 2003

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale; on estime que l'espérance mathématique de S_n notée $\text{E}(S_n)$ est égale à 10.

Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité $\text{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\left(\dfrac{10}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{10}{n}\right)^{n-k}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. **a.** Établir l'égalité $\ln[\text{P}(S_n = 0)] = -10 \times \dfrac{\ln\left(1-\frac{10}{n}\right)}{\frac{-10}{n}}$ où ln désigne la fonction logarithme népérien; en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{P}(S_n = 0) = \text{e}^{-10}$.

   b. Démontrer que $\text{P}(S_n = k+1) = \text{P}(S_n = k) \times \dfrac{n-k}{n-10} \times \dfrac{10}{k+1}$, où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

   c. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{P}(S_n = k) = \text{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, alors on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{P}(S_n = k+1) = \text{e}^{-10}\dfrac{10^{k+1}}{(k+1)!}$ pour $0 \leqslant k+1 \leqslant n$.

   d. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{P}(S_n = k) = \text{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $\text{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $\text{P}(S_n = k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$; on considère les points A(3 ; 0 ; 10), B(0 ; 0 ; 15) et C(0 ; 20 ; 0).

1. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

   b. Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point E(9 ; 0 ; 0).

   c. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC

   a. Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH). En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH).

c. Vérifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne

$$20x + 9y + 12z - 180 = 0.$$

d. Montrer que le système $\begin{cases} x & = & 0 \\ 4y - 3z & = & 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 & = & 0 \end{cases}$ a une solution unique. Que représente cette solution ?

e. Calculer la distance OH, en déduire que EH = 15 et l'aire du triangle EBC.

3. En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre OEBC, déterminer la distance du point O au plan (ABC). Pouvait-on prévoir le résultat à partir de l'équation obtenue en **2. c.** ?

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres p, $p + 10$ et $p + 20$, et l'un seulement est divisible par 3.

b. Les entiers naturels a, b et c sont dans cet ordre les trois premiers terme d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.

2. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs $(u\ ;\ v\ ;\ w)$ tels que

$$3u + 13v + 23w = 0.$$

a. Montrer que pour un tel triplet $v \equiv w \pmod{3}$

b. On pose $v = 3k + r$ et $w = 3k' + r$ où k, k' et r sont des entiers relatifs et $0 \leqslant r \leqslant 2$.

Montrer que les éléments de E sont de la forme :

$$(-13k - 23k' - 12r\ ;\ 3k + r\ ;\ 3k' + r).$$

c. L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine O et soit P le plan d'équation $3x + 13y + 23z = 0$.

Déterminer l'ensemble des points M à coordonnées $(x,\ y,\ z)$ entières relatives appartenant au plan P et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

PROBLÈME — 11 points

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.

Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction numérique f_n par :

$$f_0(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ et pour } n \text{ entier naturel non nul } f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2}.$$

On note Γ_n, la courbe représentative de f_n, dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 4 cm.

On désigne par I_n l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie A

1. **a.** Étudier les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$. Quelle est la conséquence graphique de ces résultats ?
   b. Étudier les variations de f_1.
   c. Tracer la courbe Γ_1.
   d. Calculer I_1.
2. **a.** Étudier les limites de f_3 en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f_3.
   c. Tracer la courbe Γ_3 sur le même dessin qu'au **1. c.**.
3. Calculer $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_3$. En déduire la valeur de I_3.
4. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine limité par les courbes Γ_1, Γ_3 et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

Pour cette partie, on dessinera la figure demandée dans un nouveau repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 4 cm.

1. **a.** Étudier les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Étudier les variations de f_0.
2. Soit (a_n) la suite définie, pour n entier naturel non nul, par $a_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
   a. Interpréter graphiquement a_n.
   b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.
   c. Montrer que pour tout réel t : $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$ et en déduire que $a_1 \leqslant 1$.
   d. Montrer que pour tout réel t non nul : $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et en déduire que pour tout entier naturel non nul, $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.
   e. Montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n \leqslant 2$. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (a_n) ?

Partie C

Soit F la fonction telle que :

$$F(0) = 0,\ F \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } F'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. On pose, pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = F[\tan(x)]$.
   a. Calculer $H(0)$.
   b. Montrer que H est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$.
   c. En déduire que, pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $H(x) = x$.
   d. Montrer que $F(1) = \dfrac{\pi}{4}$.
2. On pose, pour tout x réel positif ou nul, $k(x) = F\left(\dfrac{1}{x+1}\right) + F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$.
   a. Montrer que la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer $k'(x)$.
   b. En déduire la valeur de $F\left(\dfrac{1}{2}\right) + F\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2004

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le quadrilatère ABCD tel que :

$$\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \alpha \quad [2\pi], \left(\overrightarrow{\text{CD}}, \overrightarrow{\text{CB}}\right) = \beta \quad [2\pi],\ 0 < \alpha < \pi,\ 0 < \beta < \pi.$$

On construit les triangles équilatéraux DCP, DAQ, BAM et BCN tels que :

$$\left(\overrightarrow{\text{DC}}, \overrightarrow{\text{DP}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \left(\overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DQ}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{\text{BA}}, \overrightarrow{\text{BM}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\text{BC}}, \overrightarrow{\text{BN}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D, m, n, p et q les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Démontrer les relations suivantes :

$$m = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(a-b)+b, \qquad n = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(c-b)+b,$$

$$p = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(c-d)+d, \qquad q = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(a-d)+d.$$

2. En utilisant les relations précédentes :
   a. Démontrer que MNPQ est un paralélogrammme.
   b. Démontrer que l'on a :

$$\left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{QP}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \text{AC} = \text{QP}$$

$$\left(\overrightarrow{\text{NP}}, \overrightarrow{\text{BD}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \text{et} \quad \text{NP} = \text{BD}.$$

3. Démontrer que MNPQ est un carré si, et seulement si, les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD vérifient :

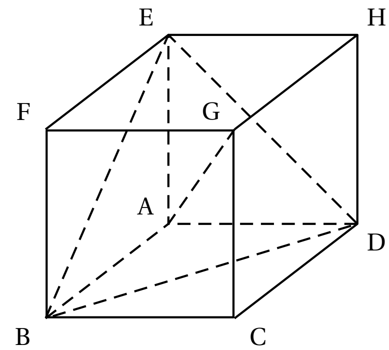
$$\text{AC} = \text{BD} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{BD}}\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

   où k est un entier relatif.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre. O_1 et O_2 sont les centres des carrés ABCD et EFGH, et I est le centre de gravité du triangle EBD.
Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés :

$\{(\mathrm{E}\ ;\ 1),\ (\mathrm{B}\ ;\ 1-m),\ (\mathrm{G}\ ;\ 2m-1),\ (\mathrm{D}\ ;\ 1-m)\}$



Partie A

1. Justifier l'existence du point G_m.
2. Préciser la position du point G_1.
3. Vérifier que $G_0 = A$. En déduire que les points A, I et G sont alignés.
4. Démontrer que $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.
5. **a.** Vérifier que les points A, G_m, E et O_1, sont coplanaires.
   b. Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m se trouve sur la droite (EI).

Partie B

Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (EBD). En déduire une équation cartésienne du plan ABD.
2. Déterminer les coordonnées du point G_m.
3. Pour quelles valeurs de m, la distance de G_m au plan (EBD) est-elle égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$?

EXERCICE 3 **11 points**

Partie A étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x] = 1 + \mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-2x}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, (unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 8 cm sur l'axe des ordonnées).

1. **a.** Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(X) = 1 + X - 2X^2$.
   Étudier le signe de $P(X)$.
   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Qu'en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
3. Vérifier que $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2\right)$, puis déterminer la limite de f en $-\infty$.
4. **a.** Soit f' la fonction dérivée de la fonction f, calculer $f'(x)$.

b. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $(4 - \mathrm{e}^{x})$, puis étudier le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de f. On montrera que Ie maximum est un nombre rationnel.

5. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ n'ont qu'un point d'intersection A dont on déterminera les coordonnées.

b. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport a la droite $\mathscr{D}$.

6. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

7. Tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B étude d'une suite

1. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$ l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$.

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_{(n-1)+\ln 2}^{n+\ln 2} \left[f(x) - 1\right]\,\mathrm{d}x.$$

a. Démontrer que la suite (u_n) est à termes positifs.

b. Donner une interprétation géométrique de (u_n).

3. **a.** En utilisant le sens de variation de f, montrer que, pour tout $n \geqslant 2$:
si $x \in [(n-1)+\ln 2\ ;\ n+\ln 2]$ alors

$$f(n+\ln 2) - 1 \leqslant f(x) - 1 \leqslant f[(n-1)+\ln 2] - 1.$$

b. En déduire que, pour tout $n,\ n \geqslant 2$, on a :

$$f(n+\ln 2) - 1 \leqslant u_n \leqslant f[(n-1)+\ln 2] - 1.$$

c. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 2.

d. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. Soit la suite (S_n) définie pour $n > 0$, par

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

a. Écrire S_n à l'aide d'une intégrale.

b. Interpréter géométriquement S_n.

c. Calculer S_n et déterminer la limite de la suite (S_n).