Baccalauréat STI 2007

L'intégrale de juin à novembre 2007

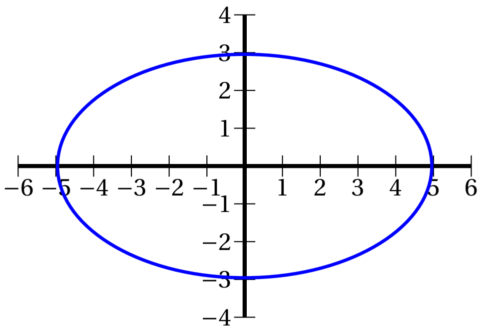
Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat STI Arts appliqués – Métropole juin 2007

EXERCICE 1 **8 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. On indiquera sur la copie, pour chaque question, la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Toutes les questions sont indépendantes. Les réponses exactes aux questions 2 et 3 rapportent deux points, les autres un point.

1. On considère l'ellipse tracée dans un repère orthonormé sur la figure ci-dessous :



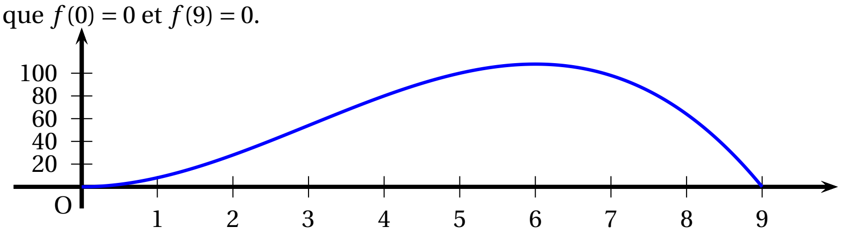
a. Une équation de cette ellipse est :

A : $25x^2+9y^2=225$	B : $9x^2+25y^2=225$	C : $3x^2+5y^2=15$	D : $9x^2-25y^2=225$

b. Un de ses foyers est le point F de coordonnées :

A : (4 ; 0)	B : (5 ; 0)	C : (0 ; 3)	D : (2 ; 0)

2. Soit la fonction f définie sur [0 ; 9] par $f(x)=-x^3+9x^2$ dont la courbe représentative dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. On remarquera que $f(0)=0$ et $f(9)=0$.



L'aire du domaine compris entre la courbe de f et l'axe des abscisses est, en unités d'aire :

A : 0	B : 546,75	C : 81	D : impossible à calculer

3. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\ln x+4x$. Une primitive de f est la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

A : $\dfrac{1}{x}+4$	B : $\dfrac{1}{x}+2x^2$	C : $\ln x+2x^2$	D : $x\ln x+2x^2-x$

4. On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées. La probabilité de tirer une carte qui ne soit ni un roi ni un cœur est :

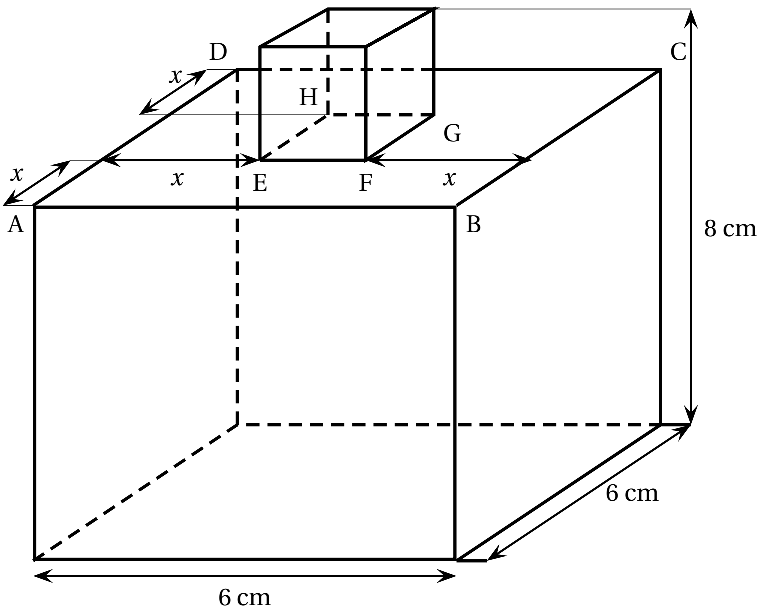
A : $\frac{35}{52}$	B : $\frac{17}{52}$	C : $\frac{9}{13}$	D : $\frac{2}{13}$

5. On donne la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + x$; l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ vaut :

A : $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} + 1$	B : $\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} + 1$	C : $3 - 2$

EXERCICE 2 **12 points**

Un graphiste designer a conçu un flacon pour un parfum. Il s'agit d'un parallélépipède rectangle de base carrée surmonté d'un cube, comme le montre la figure ci-dessous :



Le cube de base EFGH est placé au centre du carré supérieur ABCD. La variable x désigne la distance entre les côtés du carré de base EFGH du cube et les côtés du carré ABCD. Le flacon a une hauteur totale de 8 cm et les côtés du carré ABCL) mesurent 6 cm. On admettra que l'on a : $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Partie A.

1. Démontrer que le volume du petit cube est $U(x) = -8x^3 + 72x^2 - 216x + 216$.
2. En déduire que le volume total du flacon est $V(x) = -8x^3 + 72x^2 - 144x + 288$.

Partie B.

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,3]$ par $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 36$.
   Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentant la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   (unités graphiques : 5 cm en abscisses et 0,5 cm en ordonnées).
   a. f' désignant la dérivée de la fonction f, calculer $f'(x)$.
   b. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ dans l'intervalle $[0\,;\,3]$. On appelle α la valeur exacte de son unique solution. Déterminer α puis sa valeur arrondie au dixième.
   c. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;\,3]$ et dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\,3]$.
   d. Pour quelle valeur de x cette fonction admet-elle un minimum ?
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 1.
3. **a.** Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivant en arrondissant les valeurs calculées au centième.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$							

   b. Construire la tangente T et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur la feuille de papier millimétré.

Partie C.

1. Vérifier que le volume du flacon vérifie $V(x) = 8f(x)$.
2. À l'aide de la partie B de ce problème, déterminer la valeur en cm^3, arrondie à l'unité, du volume minimal V_m.

∽ Baccalauréat STI Arts appliqués – Métropole ∽ septembre 2007

EXERCICE 1 **8 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des réponses proposées est correcte. Donner la lettre correspondant à cette réponse sur le tableau de la feuille annexe. Chaque réponse exacte rapporte un point.

Question 1
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{e}^{-2x}$ admet pour dérivée la fonction f' définie par $f'(x) =$

A. e^{-2x} B. 2e^{-2x} C. -2e^{-2x} D. $-\text{e}^{-2x}$

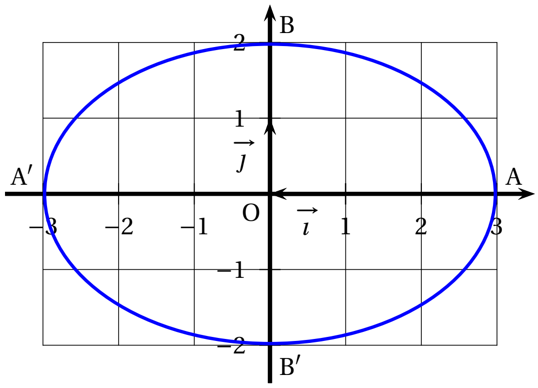
Question 2
L'équation, d'inconnue réelle x, $\ln x + 2 = 0$ admet pour solution :

A. e^{-2} B. -2 C. $-\text{e}^{-2}$ D. aucune

Question 3
Le nombre $\text{e}^{-\ln 3}$ est égal à :

A. -3 B. $\dfrac{1}{3}$ C. $-\dfrac{1}{3}$ D. n'existe pas

Question 4



La courbe dessinée ci-dessus admet pour équation :

A. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ B. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ C. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 0$ D. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Question 5
Un des foyers de l'ellipse précédente est le point F de coordonnées :

A. $\text{F}\left(0\,;\,\sqrt{13}\right)$ B. $\text{F}\left(\sqrt{13}\,;\,0\right)$ C. $\text{F}\left(\sqrt{5}\,;\,0\right)$ D. $\text{F}\left(0\,;\,\sqrt{5}\right)$

Les trois dernières questions portent sur les données suivantes :

Une municipalité propose à ses habitants de choisir entre deux investissements possibles :
choix X : une médiathèque.
choix Y : un complexe sportif.
La municipalité a reçu 1 000 fiches réponses de ses électeurs. On a classé les électeurs par tranches d'âge :

Tranche A : 18 à 30 ans Tranche B : 30 à 50 ans Tranche C : Plus de 50 ans

Qn a obtenu les résultats suivants :

	A	B	C	Total
X	138	214	172	524
Y	176	188	112	476
Total	314	402	284	1 000

On tire la fiche d'un électeur au hasard :

Question 6
La probabilité $p(\text{X})$ qu'il vote pour X vaut :

A. $0,314$ B. $0,138$ C. $0,524$ D. $\dfrac{524}{476}$

Question 7
La probabilité $p(\text{B}\cap\text{X})$ est égale à :

A. $0,214$ B. $\dfrac{214}{402}$ C. $\dfrac{214}{524}$ D. $0,712$

Question 8
La probabilité $p(\text{B}\cup\text{X})$ est égale à :

A. $0,926$ B. 0,214 C. $\dfrac{214}{524}$ D. $0,712$

EXERCICE 2 **12 points**

Archibald Nikolaüs veut faire graver et dorer ses initiales $\mathscr{A}\mathscr{N}$ sur les volumes reliés de sa bibliothèque. Pour cela, il établit un modèle que l'on a reproduit en partie sur la feuille annexe, dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

PARTIE 1

Étude d'une première courbe $\mathscr{C}_1$

$\mathscr{C}_1$ est la représentation graphique d'une fonction g, définie sur l'intervalle $[5~;~9]$, par

$$g(x) = -x^2 + bx + c$$

où b et c sont des réels à déterminer.

1. Écrire les conditions que doivent vérifier les réels b et c pour que la courbe $\mathscr{C}_1$ passe par les points A(5 ; 1) et B(9 ; 5).
2. On admet que $g(x) = -x^2 + 15x - 49$.
   a. On désigne par g' la dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. En déduire les variations de la fonction g sur l'intervalle $[5~;9]$.
   b. Déterminer pour quelle valeur de x la fonction g admet un maximum. En déduire les coordonnées du sommet C de la courbe $\mathscr{C}_1$ et le placer sur le graphique de la feuille annexe.

PARTIE 2
Étude et tracé de la courbe $\mathscr{C}_2$
$\mathscr{C}_2$ désigne la courbe représentant la fonction f définie, pour tout x de l'intervalle $[1~;5]$, *par* :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - 4\ln x.$$

1. a. f' désignant la dérivée de la fonction f calculer $f'(x)$.
   b. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x}$.
   c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1~;5]$.

2. Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1~;5]$.
3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en donnant des résultats arrondis au dixième.

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$					1,1				7,1

4. Tracer $\mathscr{C}_2$ avec soin sur la feuille annexe, dans le même repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

PARTIE 3

Archibald Nikolaüs veut faire dorer à la feuille d'or la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_2$ les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$.

1. Hachurer sur le graphique de la feuille annexe la partie à dorer.
2. **a.** Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[1~;~5]$ par

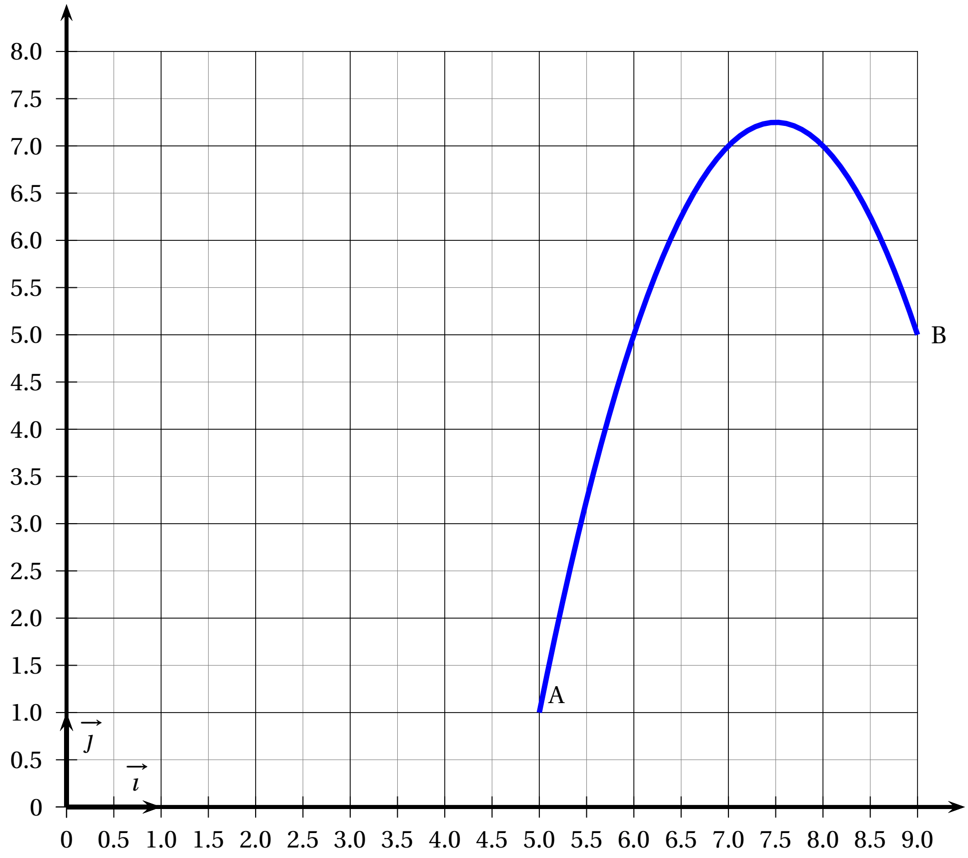
$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 - 4x\ln x + 5x$$

est une primitive de f.

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\text{I} = \displaystyle\int_1^5 f(x)\,\text{d}x$.

c. Quelle est l'aire de la partie hachurée ? (On donnera un résultat en unités d'aire, arrondi au dixième).

FEUILLE ANNEXE à rendre avec la copie



Question numéro	1	2	3	4	5	6	7	8
Réponse								

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion 15 juin 2007
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z\sqrt{3} + 16 = 0.$$

2. Le plan est rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A et B d'affixes respectives $z_\text{A} = 2\sqrt{3} - 2\text{i}$ et $z_\text{B} = 2\sqrt{3} + 2\text{i}$.

   a. Déterminer le module et un argument de z_A et de z_B.

   b. En déduire une construction des points A et B dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   c. Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}}\right)$.

   d. Déterminer la nature du triangle AOB.

   e. Soit I le point d'affixe $z_\text{I} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
   Démontrer que I est le centre du cercle circonscrit au triangle AOB.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit l'équation différentielle (E) :

$$\frac{1}{4}y'' + 9y = 0,$$

où y est une fonction deux fois dérivable de la variable réelle x.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Trouver la fonction f, solution particulière de (E), vérifiant les conditions suivantes :

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}.$$

3. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \cos\left(6x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

   b. En déduire les solutions, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, de l'équation $f(x) = 0$.

4. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{5\pi}{36}\ ;\ \dfrac{\pi}{36}\right]$.

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = 2\text{e}^{-2x} - 8\text{e}^{-x} - 4x + 6.$$

1. Soit g' la fonction dérivée de g. Montrer que, pour tout nombre réel x, $g'(x) = -4\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)^2$.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction g. On ne donnera pas les limites en -1 et $+1$.

3. **a.** Calculer $g(0)$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} - 8\mathrm{e}^{-x} + 6.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

b. Donner l'interprétation graphique des solutions trouvées à la question précédente.

2. **a.** Étudier la limite de f en $+1$. En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$.

On donnera une équation de $\mathscr{D}$.

b. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(2 - 8\mathrm{e}^{x} + 6\mathrm{e}^{2x}\right)$.

En déduire la limite de f en -1.

3. **a.** Déterminer la dérivée f' de f. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ est du même signe que $\left(-\mathrm{e}^{-x} + 2\right)$.

b. Dresser le tableau de variation de f. On précisera la valeur exacte de $f(-\ln 2)$.

c. Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

d. En utilisant les résultats de la partie A, étudier les positions relatives de la droite $\mathscr{T}$ et de la courbe $\mathscr{C}$.

e. Tracer les droites $\mathscr{T}$ et $\mathscr{D}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : primitive et calcul d'aire

1. Déterminer une primitive F de la fonction f.

2. Hachurer la partie $\mathscr{E}$ du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$, et les droites d'équations $x = -\ln 3$ et $x = 0$.

3. Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de la partie $\mathscr{E}$; en donner une valeur approchée au mm^2 près par défaut.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole ∽ juin 2007

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **4 points**

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + \pi^2 y = 0$ où y est une fonction numérique deux fois dérivable de la variable réelle x.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la fonction g, solution de cette équation, dont la courbe représentative dans un repère du plan passe par le point N de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et qui, en ce point, admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
3. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $g(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. Calculer la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

EXERCICE 2 **5 points**

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$z^2 + 2z + 10 = 0.$$

2. Déterminer les nombres complexes c et d vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} -2c + d & = & 1 + 13\text{i} \\ -c + d & = & 4 + 8\text{i} \end{array}\right.$$

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
   a. Placer sur une figure les points A, B, C et D dont les affixes respectives sont :

$$-1 + 3\text{i},\ -1 - 3\text{i},\ 3 - 5\text{i}\ \text{ et } 7 + 3\text{i}.$$

   b. Démontrer que le triangle BAD est rectangle en A.
   c. Démontrer que le triangle BCD est rectangle en C.
   d. En déduire que les quatre points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on déterminera le centre Ω et le rayon. Tracer le cercle sur la figure.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \text{e}^x \ln x + \frac{\text{e}^x}{x}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

L'objet de cette première partie est l'étude des limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. a. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x,
   $f(x) = \dfrac{\text{e}^x}{x}(x\ln x + 1)$.
   On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$. En déduire la limite de f en 0.
   b. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote $\mathcal{D}$ dont on donnera une équation.

Partie B : étude d'une fonction intermédiaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

1. a. On désigne par g' la dérivée de la fonction g.
   Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x,
   $g'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$.
   b. Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. L'étude des limites n'est pas demandée.
2. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.
   b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déduire des questions B 1 et B 2 le signe de $g(x)$, pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie C : étude des variations de la fonction *f* et construction de la courbe associée

1. a. f' désignant la dérivée de f, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \text{e}^x g(x)$, pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   b. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de $f(\alpha)$, en prenant $0,6$ pour valeur approchée de α.
3. a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

x	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5
$f(x)$ à 10^{-1} près										

   b. Construire l'asymptote $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,2,5]$.

Partie D : calcul d'aire

1. Montrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \text{e}^x \ln x$ est une primitive de f.
2. On désire calculer l'aire de la partie $\mathcal{E}$ du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.
   a. Hachurer la partie $\mathcal{E}$ sur le dessin.
   b. Déterminer la valeur exacte de l'aire de $\mathcal{E}$ en unités d'aires, puis en cm^2.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie juin 2007 ∽ Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

On note i nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$P(z) = z^3 + \left(2\sqrt{2} - 4\right) z^2 + \left(8 - 8\sqrt{2}\right) z + 16\sqrt{2}.$$

a. Calculer $P(-2\sqrt{2})$.

b. Déterminer une factorisation de $P(z)$ sous la forme :
$P(z) = \left(z + 2\sqrt{2}\right)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$ où α et β sont deux nombres réels que l'on déterminera.

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $P(z) = 0$.

2. On note A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 2 + 2\text{i}$, $b = 2 - 2\text{i}$ et $c = -2\sqrt{2}$.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Démontrer que A, B, C sont sur un même cercle Γ de centre O, dont on donnera le rayon.

b. Déterminer un argument du nombre complexe a puis un argument du nombre complexe b.
En déduire une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)$.

c. Déterminer alors une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right)$..

d. Démontrer qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$ est $\dfrac{3\pi}{8}$.

e. En déduire l'égalité : $\tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon.

Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2 %.

On note u_n (n entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après n frappes de marteau pilon.

On a donc $u_0 = 20$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats arrondis au centième de millimètre.

2. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique, et préciser sa raison.

3. Déterminer u_n en fonction de l'entier n.

4. Quelle est l'épaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes ?

5. On considère que la pièce est terminée dès que son épaisseur est inférieure à 14 millimètres.
   Quel est le temps minimal pour que la pièce soit terminée ?

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (L'unité graphique est 2 cm).
Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln(x)}{x}$$

puis de calculer une aire.

I. Étude d'une fonction auxiliaire *g*

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 4 + 2\ln(x).$$

1. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g. (On ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$).
3. Résolution de l'équation $g(x) = 0$.
   a. Démontrer que sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α.
   b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de ce nombre α.
4. Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x, dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

II. Étude de la fonction *f*

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la limite de f en 0. Qu'en déduit-on pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Etude en $+\infty$.
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   c. Déterminer les coordonnées du point A commun à la courbe $\mathscr{C}$ et à la droite $\mathscr{D}$.
   d. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
3. Étude des variations de f.
   a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f. Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, où g est la fonction étudiée dans la partie I.
   b. En utilisant les résultats de la partie I, dresser le tableau des variations de la fonction f
4. On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e^2. Montrer que $\mathscr{T}$ est parallèle à l'asymptote $\mathscr{D}$.
5. Dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. tracer la droite $\mathscr{D}$, la tangente $\mathscr{T}$ et la courbe $\mathscr{C}$ à l'aide de l'étude précédente. (On prendra $f(\alpha) \approx 1,25$.)

III. Calcul d'une aire

On définit sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction H par :

$$H(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln x - (\ln x)^2$$

.

1. Démontrer que H est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Soit la région du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

a. Hachurer la région sur votre figure.

b. On note S l'aire, exprimée en unité d'aire, de la région S. Déterminer la valeur exacte de S.

c. Donner la valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole ∾ septembre 2007

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à une repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 1 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 4z + 16 = 0.$$

2. On note A, B, C, D et E les points du plan d'affixes respectives :

$$a = -2 + 2\text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad b = \overline{a} \quad ; \quad c = 7 + \text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad d = 7 + 5\text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad e = -\frac{1}{2}a.$$

a. Démontrer que $b - a = c - d$; en déduire que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

b. Calculer le module et un argument de chacun des nombres a, b et c.

c. Démontrer l'égalité : $e - c = \dfrac{2}{3}(b - c)$. En déduire que les points B, C et E sont alignés.

3. Utiliser les résultats précédents pour placer les points A, B et E dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, puis terminer la construction du quadrilatère ABCD en laissant apparents les traits de construction,

4. On note F le point d'affixe : $f = -2 - 6\text{i}\sqrt{3}$.
Démontrer que le point B est le milieu du segment [AF].
En déduire le centre de gravité du triangle ACF.

EXERCICE 2

Soit (E) l'équation différentielle :

$$9y'' + 4y = 0,$$

où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Déterminer la fonction g, solution de (E), qui satisfait aux conditions suivantes :

— la courbe représentative de g passe par le point P de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \sqrt{3}\right)$;

— la tangente à cette courbe en P a pour coefficient directeur $-\dfrac{2}{3}$.

3. Vérifier que, pour tout nombre réel x :

$$g(x) = 2\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right).$$

4. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ L'équation $g(x) = 0$.

b. Parmi les solutions trouvées à la question précédente, énumérer celle(s) qui appartient (appartiennent) à l'intervalle $[0~;~2\pi]$.

PROBLÈME

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x + 1 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$;
2. Démontrer qu'il existe une solution unique α de l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $[0,1~;~0,5]$.
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Étudier le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B. Étude de la fonction *f*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x\ln x}{x+1} + 2.$$

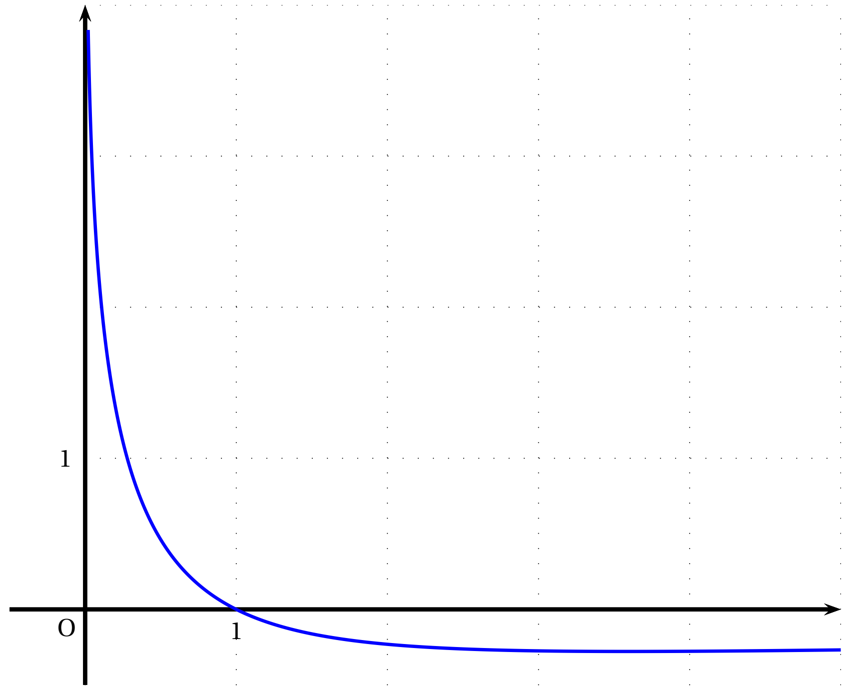
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$. Déterminer la limite de f en 0.
2. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + \frac{1}{x}} + 2.$$

   En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Soit f' la dérivée de f. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.
4. Étudier, en utilisant les résultats de la partie A, le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
5. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   (On indiquera une valeur approchée de $f(\alpha)$ en prenant $\alpha \approx 0,28$.)
6. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
7. On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la fonction h définie dans la partie C. Sur le graphique, tracer la tangente T ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.



(Ce graphique n'est pas à l'échelle.)

Partie C. Aire comprise entre deux courbes

On considère dans cette partie la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = -\frac{\ln x}{x+1}.$$

1. On pose, pour tout nombre réel strictement positif x : $u(x) = f(x) - h(x)$.
   Montrer que $u(x) = \ln x + 2$.
2. Montrer que la fonction U définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

   $$U(x) = x\ln x + x$$

   est une primitive de la fonction u.
3. **a.** Étudier le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. En déduire les positions relatives des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sur l'intervalle $[1\ ;2]$.
4. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.
5. Déterminer alors l'aire exacte du domaine $\mathcal{D}$ en unités d'aire, puis en cm^2.
   Donner une valeur approchée de cette aire au mm^2 près.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie septembre 2007
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
$$z^2 + 4z + 16 = 0.$$
2. On note A, B, C, D et E les points du plan d'affixes respectives :
$$a = -2 + 2\text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad b = \overline{a} \quad ; \quad c = 7 + \text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad d = 7 + 5\text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad e = -\frac{1}{2}a$$
   a. Démontrer que $b - a = c - d$; en déduire que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
   b. Calculer le module et un argument de chacun des nombres a, b et e.
   c. Démontrer l'égalité : $e - c = \dfrac{2}{3}(b - c)$. En déduire que les points B, C et E sont alignés.
3. Utiliser les résultats précédents pour placer les points A, B et E dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, puis terminer la construction du quadrilatère ABCD en laissant apparents les traits de construction.
4. On note F le point d'affixe : $f = -2 - 6\text{i}\sqrt{3}$.
Démontrer que le point B est le milieu du segment [AF].
En déduire le centre de gravité du triangle ACF.

EXERCICE 2 **4 points**

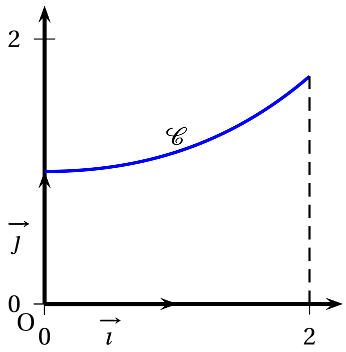
On considère l'équation différentielle
$$\text{(E)} : \quad y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2},$$
où y est une fonction inconnue de la variable x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' - \dfrac{1}{2}y = 0$.
2. On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x.$$

Vérifier que f est solution de l'équation (E)
3. On a dessiné ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f, précédemment définie, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, pour les valeurs de x comprises entre 0 et 2.

On note $\mathscr{K}$ le solide engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses.



   a. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, et H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : H(x) $= 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}(x-2)$.

   Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer la valeur exacte du volume $\mathscr{V}$ du solide $\mathscr{K}$, exprimée en unités de volume.

   (On rappelle que $\mathscr{V} = \pi \displaystyle\int_0^2 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.)

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté au repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (Unités graphiques : 3 cm en abscisses et 2 cm en ordonnée.)

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2},$$

et de calculer une aire.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

I. Étude du comportement asymptotique de la fonction *f*

1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{3x+2}{x^2+2x+1}.$$

   a. Vérifier que, pour tout réel x non nul appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$:

$$h(x) = \frac{3+\dfrac{2}{x}}{x+2+\dfrac{1}{x}}.$$

b. En déduire la limite de h en $+\infty$.

2. Mise en évidence d'une asymptote oblique.

a. Vérifier que,pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-1~;~+\infty[$:
$f(x) = x - 2 + h(x)$, où h est la fonction définie dans la question précédente.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. Montrer que la droite (Δ), d'équation : $y = x - 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

d. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (Δ).

3. Déterminer la limite de f en -1 et en déduire que $\mathscr{C}$ a une asymptote (Δ') dont on donnera une équation.

II. Étude des variations de f et tracé de $\mathscr{C}$

1. Montrer que le point O appartient à $\mathscr{C}$.

2. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-1~;~+\infty[$:
$f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$.
En déduire le sens de variations de f sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$.

3. Donner une équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point O.

4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et les deux asymptotes (Δ) et (Δ') dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

III. Calcul d'aire

1. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$ par :

$$H(x) = \frac{1}{x+1} + 3\ln(x+1).$$

Montrer que H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$.

2. On désigne par $\mathscr{S}$ le domaine limité par $\mathscr{C}$, (Δ), et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

a. Hachurer le domaine $\mathscr{S}$ sur le dessin.

b. Calculer, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{S}$.

c. En déduire l'aire en cm^2, arrondie au mm^2, du domaine $\mathscr{S}$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Novembre 2007
Génie Mécanique - Génie Énergétique - Génie Civil
Nouvelle-Calédonie

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet. Une feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 3 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère le point A d'affixe $a = 2$ et le point B d'affixe $b = \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2}$.

1. On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right) z + \left(2 + \sqrt{2}\right).$$

Déterminer les solutions de l'équation : $P(z) = 0$.

Dans la suite de l'exercice, on note C le point du plan d'affixe $c = \dfrac{2 + \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2}}{2}$.

2. Étude du triangle AOB.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

b. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe b.

c. En déduire la nature du triangle AOB, ainsi que la mesure de l'angle $\widehat{\text{AOB}}$.

3. Étude du triangle AOC.

a. Démontrer que C est le milieu du segment [AB].

b. En déduire la nature du triangle AOC, ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{\text{AOC}}$

c. En déduire un argument du nombre complexe c.

4. Calcul de la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

a. Démontrer que : $|c| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

b. Déduire des questions précédentes que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Une entreprise produit en série des objets qu'elle destine à la vente. Ces objets peuvent présenter deux types de défauts :

- le défaut S de nature esthétique ;
- le défaut F de fonctionnement.

Un objet est déclaré parfait s'il ne présente aucun des deux défauts.

1. On prélève un lot de 200 objets sur la production et on constate que :

- le défaut S est observé sur 16 objets ;
- le défaut F est observé sur 12 objets ;
- 180 objets sont déclarés parfaits.

Recopier et compléter le tableau suivant :

	Avec le défaut F	Sans le défaut F	Total
Avec le défaut S			16
Sans le défaut S			
Total			200

On admet que la répartition des deux types de défauts, observée dans le lot de 200 objets prélevés, reflète celle de l'ensemble de la production. On admet également que tout objet produit est vendu. On sait en outre que le coût de fabrication d'un objet est de 200 €.

2. Dans cette question, le prix de vente de l'objet est fixé à 250 €.

Si l'objet présente le seul défaut S, l'entreprise accorde au client une réduction de 15 % du prix.

Si l'objet présente le seul défaut F, l'entreprise réalise les réparations, à ses frais, pour un coût de 45 €.

Si l'objet présente les deux défauts, l'entreprise réalise les réparations, à ses frais, pour un coût de 58 €.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard dans la production, associe le bénéfice algébrique, en euro, réalisé par l'entreprise à la vente de cet objet.

a. Justifier le fait que X prend les valeurs (exprimées en euro) : 50 ; 12,50 ; 5 et -8.

b. Démontrer que la probabilité pour qu'un objet présente le seul défaut S est $0,04$.

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X (On pourra représenter les résultats dans un tableau.)

d. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X. Que représente E(X) pour l'entreprise ?

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté au repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
(Unités graphiques : 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

I. Résolution d'une équation différentielle

On note (E) l'équation différentielle :

$$y' + y = 3\text{e}^{-x} + x + 1$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' + y = 0$.

2. Vérifier que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 3x\text{e}^{-x} + x$, est une solution de l'équation différentielle.

3. On admet que toute solution f de l'équation (E) est de la forme $f(x) = u(x) + C\text{e}^{-x}$ où C est une constante réelle et u la fonction définie à la question 2.
Déterminer la solution f de l'équation (E) telle que : $f(0) = 2$.

II. Étude d'une fonction auxiliaire *g*

On note g la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = \text{e}^{-x}(-3x + 1) + 1.$$

1. Calculer la dérivée g' de la fonction g.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variations (On ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.)
3. Calculer $g\left(\frac{4}{3}\right)$ et en déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

III. Étude de la fonction f déterminée en I.

On rappelle que f est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(3x+2) + x.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Étude des limites.
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Étude des variations de f.
   a. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et démontrer que, pour tout réel $x : f'(x) = g(x)$.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$, et préciser la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$. (On notera A leur point d'intersection.)
4. Déterminer l'abscisse du point B de la courbe $\mathcal{C}$ où la tangente $\mathcal{T}$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.
5. Tracer, dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$. Placer les points A et B puis tracer la courbe $\mathcal{C}$.

IV. Calcul d'une aire

1. Démontrer que la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = -f(x) - 3\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2} + x,$$

   est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, et l'axe des abscisses. (On donnera un résultat arrondi au mm^2.)

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie électronique ∽ Antilles-Guyane juin 2007

EXERCICE 1 **4 points**

On rappelle que i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 6z + 10 = 0.$$

2. Soit P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 - 12z^2 + 46z - 60.$$

  a. Calculer $P(6)$.

  b. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout complexe z, on ait $P(z) = (z-6)\left(az^2 + bz + c\right)$.

  c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm ; soient A, B et C les points de ce plan d'affixes respectives $3 + \text{i}$, $3 - \text{i}$ et 6.
Placer les points A, B et C.

4. Démontrer que le quadrilatère OACB est un parallélogramme.

5. Comparer les longueurs OA et OB. En déduire la nature du parallélogramme OACB.

EXERCICE 2 **6 points**

Une personne a 5 jetons indiscernables au toucher dans sa poche : un jeton d'une valeur de 2 €, deux jetons d'une valeur de 1€ chacun et deux jetons d'une valeur de 0,50 € chacun.

Partie I

Cette personne choisit au hasard, *successivement et sans remise*, deux jetons dans sa poche. On s'intéresse à la somme S des valeurs des deux jetons choisis.

1. Construire un arbre ou un tableau décrivant cette expérience. En déduire les valeurs possibles de la somme S.

2. Soit A l'évènement : « la somme S est égale à 1,5 » et B l'évènement : « la somme S est égale à 1 ».

  a. Vérifier que la probabilité de l'évènement A est égale à $0,4$.

  b. Déterminer la probabilité de l'évènement B.

3. Déterminer la probabilité pour que la somme S soit supérieure ou égale à 2.

Partie II

Cette personne introduit les deux jetons choisis dans un appareil de stationnement. Le coût est de 0,50 € pour une heure de stationnement. Soit X la variable aléatoire qui à chaque choix de deux jetons associe la durée maximale de stationnement autorisé, exprimée en heures.

1. Déterminer, en utilisant la partie I, la probabilité pour que X prenne la valeur 3.

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

PROBLÈME **10 points**

Les parties II *et* III *peuvent être traitées indépendamment de la partie* I.

Partie I

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

2. Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = \text{e}^x$ où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

a. Soit a un nombre réel et u la fonction définie pour tout réel x par $u(x) = a\text{e}^x$.
Déterminer a pour que la fonction u soit une solution de l'équation différentielle (E).

b. Soit b un nombre réel. On admet que la fonction w définie pour tout réel x par $w(x) = b\text{e}^{2x} - \text{e}^x$ est une solution de l'équation différentielle (E). Déterminer b pour que la fonction w vérifie $w(0) = 0$.

Partie II

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \text{e}^{2x} - \text{e}^x.$$

On appelle f' la fonction dérivée de f et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm. On remarquera que, pour tout réel x, on a $\text{e}^{2x} - \text{e}^x = \text{e}^x\left(\text{e}^x - 1\right)$.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et étudier son signe.

b. Calculer $f(-\ln 2)$. On détaillera les calculs.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

3. Tracer la droite T et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie III

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.

2. Calculer $\text{I} = \displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,\text{d}x$.

3. On considère la partie $\mathscr{D}$ du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

a. Hachurer la partie $\mathscr{D}$ sur le graphique.

b. Déterminer l'aire de $\mathscr{D}$. On exprimera le résultat en centimètres carrés.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI La Réunion juin 2007 ∾ Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 3z + 9 = 0.$$

2. On considère les points A et B du plan d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = \frac{3}{2} + \text{i}\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad z_{\text{B}} = \frac{3}{2} - \text{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

   a. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_{A} et z_{B}, puis les écrire sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

   b. Placer les points A et B dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

   c. Justifier que les points A et B sont symétriques par rapport à l'axe $\left(\text{O}\,;\, \vec{u}\right)$.

3. On considère la rotation R de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ et M un point du plan d'affixe z.
On note M' le point d'affixe z' image du point M d'affixe z par cette rotation.

   a. Exprimer z' en fonction de z.

   b. Démontrer que le point B est l'image du point A par la rotation R.

4. On considère les points C et D du plan $\mathscr{P}$, d'affixes respectives $z_{\text{C}} = -3$ et $z_{\text{D}} = 4$.

   a. Placer les points C et D sur le graphique précédent.

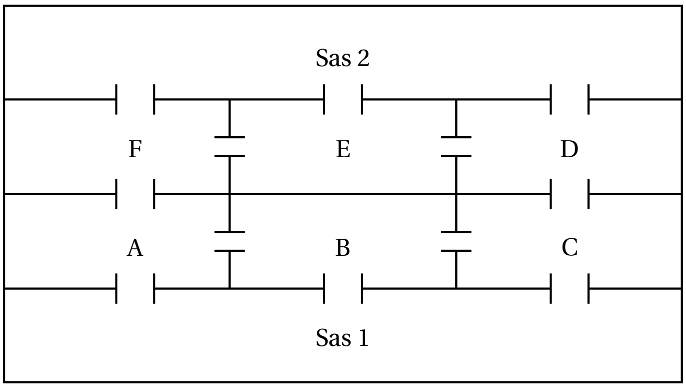
   b. Calculer les distances OD, DC et AB.

   c. On note I le milieu du segment [AH].
   Calculer la distance IB et déduire la valeur exacte $\mathscr{A}_1$ de l'aire du triangle CBD.

   d. On note $\mathscr{A}_2$ l'aire du triangle AOD. Calculer la valeur du quotient $\dfrac{\mathscr{A}_1}{\mathscr{A}_2}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Un établissement est composé de deux sas, notés 1 et 2, et de six salles de travail, notées A, B, C, D, E et F. Les communications entre ces différentes salles se font par le moyen de 12 portes représentées par le schéma suivant :



On remarquera que les salles B et E ne communiquent pas directement.

— Un robot, rangé dans le sas 1, est programmé pour nettoyer exactement trois salles différentes parmi les salles A, B, C, D, E et F.
— Le robot commence toujours son parcours par l'une des salles A, B ou C.
— Dès que le robot entre dans une salle, il la nettoie systématiquement.
— Il lui est impossible de franchir la même porte plus d'une fois ou de nettoyer deux fois la même salle.
— Une fois les trois salles nettoyées, le robot ressort :
  — Soit par le sas 1,
  — Soit par le sas 2. Dans ce cas, il retourne plus tard dans le sas 1 par un couloir non représenté sur le schéma.

On appelle « trajet » une suite ordonnée de 3 salles constituant un parcours possible pour le robot.

Exemples :

— ABC et BCD sont des trajets.
— CBA et ABC sont deux trajets différents.
— ABE n'est pas un trajet (les salles B et E ne communiquent pas directement).
— DEF n'est pas un trajet (le robot ne peut pas commencer par la salle D).

1. Déterminer les six trajets possibles (on pourra s'aider d'un arbre).
Dans toute la suite, on admet que les six trajets obtenus sont équiprobables.

2. **a.** Calculer la probabilité p_1 de l'évènement « la salle E est la troisième salle nettoyée par le robot ».

b. Calculer la probabilité p_2 de l'évènement « le robot sort par le sas 2 ».

3. Le tableau suivant donne le temps de nettoyage du robot dans chacune des salles en minutes :

Salles	A	B	C	D	E	F
Temps de nettoyage du robot	20 min	24 min	30 min	14 min	22 min	14 min

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque trajet, associe le temps de nettoyage des 3 salles exprimé en minutes.

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance E(X) de la variable aléatoire X. Que représente ce nombre ?

d. Calculer la probabilité p_3 de l'évènement « le robot effectue le nettoyage des 3 salles en moins de 60 minutes » ?

4. On appelle $\sigma(X)$ l'écart type de la variable aléatoire X.

a. Déterminer la valeur arrondie au centième de $\sigma(X)$

b. Le robot effectue un parcours par jour, 7 jours sur 7. Soit n un entier naturel non nul. On admet qu'il est acceptable d'utiliser le robot durant n jours d'affilée sans révision si le nombre :

$$n \times \mathrm{E(X)} + 1,5 \times \sigma(\mathrm{X}) \times \sqrt{n}$$

est inférieur à 500 heures. Est-il acceptable de ne faire réviser le robot qu'une fois par an ?

PROBLÈME **10 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x(1 + \ln x)$$

où ln désigne le logarithme népérien.

1. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.
Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, on a :

$$g'(x) = 2 + \ln x.$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
En déduire les variations de la fonction g sur cet intervalle.

3. Calculer la valeur exacte du minimum de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, puis en donner la valeur décimale arrondie au dixième.

4. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B : étude de la fonction f

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = (x+1)\ln x$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan $\mathscr{P}$.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$?

b. Déterminer la limite de la fonction f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Montrer que, pour tout x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}$$

b. En utilisant le résultat obtenu dans la partie A, question 4, dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique, notée α, dans l'intervalle $[1~;2]$.
Donner la valeur décimale arrondie au dixième du nombre réel α.

5. Tracer dans le plan $\mathscr{P}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0~;\mathrm{e}]$.

Partie C : calcul d'une aire

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)(\ln x - 1) + \frac{x^2}{4}.$$

1. Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** Hachurer, sur le graphique obtenu dans la partie B, la partie $\mathscr{E}$ du plan, limitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \text{e}$.

b. Déterminer la valeur exacte de l'aire de la partie $\mathscr{E}$ en cm^2.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie électronique ∾ Génie électrotechnique, optique Métropole juin 2007

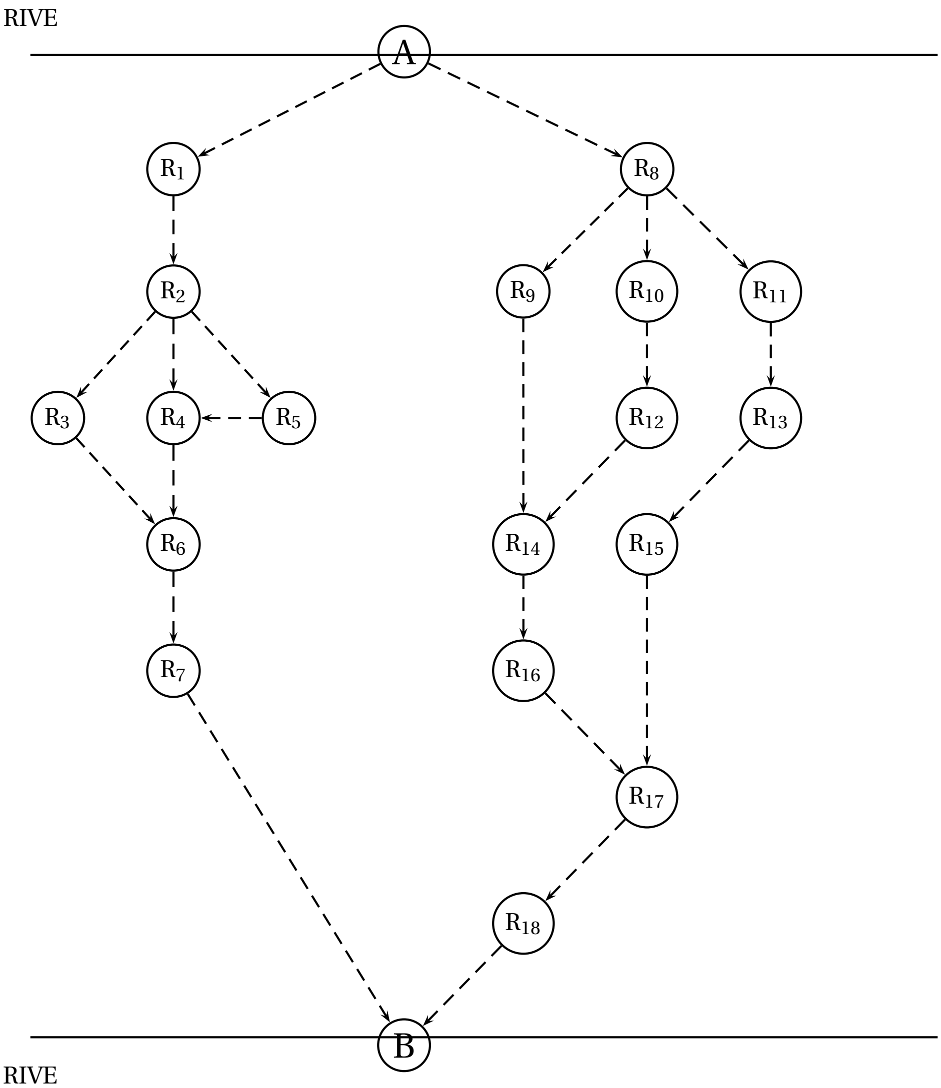
EXERCICE 1 **6 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2+4z+16=0$.
2. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z)=z^3-64$.
   a. Calculer $P(4)$.
   b. Trouver les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z,
   $P(z)=(z-4)\left(az^2+bz+c\right)$.
   c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z)=0$.
3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_{\text{A}}=-2+2\text{i}\sqrt{3}$, $z_{\text{B}}=\overline{z_{\text{A}}}$ et $z_{\text{C}}=4$.
   a. Établir que $z_{\text{A}}=4\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.
   Écrire z_{B} sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
   b. Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   c. Déterminer la nature du triangle ABC.
4. On appelle D l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$, et on appelle z_{D}, l'affixe du point D.
   a. Déterminer le module et un argument de z_{D}.
   b. En déduire la forme algébrique de z_{D}.
   c. Placer le point D sur le graphique précédent

EXERCICE 2 **4 points**

Le personnage virtuel d'un jeu électronique doit franchir un torrent en sautant de rocher en rocher.
Le torrent se présente de la manière suivante (les disques R_1, R_2, ..., R_{17}, R_{18}, représentent les rochers) :



Le personnage virtuel part de A pour aller en B. Il ne peut choisir que les trajets matérialisés par des pointillés et avancer uniquement dans le sens des flèches. On appelle « parcours » une suite ordonnée de lettres représentant un trajet possible.
Par exemple : $AR_1R_2R_3R_6R_7B$ est un parcours qui nécessite 6 bonds.
Toute probabilité demandée sera donnée sous forme de fraction.

1. Déterminer les six parcours possibles.

2. Le joueur choisit au hasard un parcours. On admet que les différents parcours sont équiprobables.

- **a.** Quelle est la probabilité p_1 de l'évènement « le personnage virtuel passe par le rocher R_7 » ?
- **b.** Quelle est la probabilité p_2 de l'évènement « le personnage virtuel passe par le rocher R_{14} » ?

3. Chaque bond du personnage virtuel nécessite 2 secondes.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque parcours, associe sa durée en secondes.

- **a.** Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
- **b.** Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
- **c.** Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

4. Quelle devrait être la durée d'un bond du personnage virtuel pour que la durée moyenne d'un parcours soit égale à 10 secondes ?

Problème **10 points**

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan $\mathscr{P}$.
On note ln la fonction logarithme népérien.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln x.$$

On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. Calculer $g(1)$ et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B : détermination de l'expression de la fonction *f*

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f(x) = ax + b - \dfrac{\ln x}{x}$.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
Calculer $f(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées $(1~;~0)$ et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b.

Partie C : étude de la fonction *f*

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$,

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}.$$

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. a. Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$,
$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

3. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 1$.

a. Justifier que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

b. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

c. Tracer la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ dans le plan $\mathscr{P}$ muni du repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie D : calcul d'aire

On note $\mathscr{A}$ la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie du plan $\mathscr{P}$ comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.
On désigne par H' la fonction dérivée de la fonction H.

   a. Calculer $H'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. **a.** Calculer $\mathscr{A}$.

   b. Donner la valeur de $\mathscr{A}$ arrondie au mm^2.

∽ Baccalauréat STI Génie électronique Polynésie ∾ juin 2007

EXERCICE 1 **5 points**

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z on ait : $z^3 - 8 = (z-2)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - 8 = 0$.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité 2 cm), on considère les points A d'affixe $z_{\text{A}} = 2$, B d'affixe $z_{\text{B}} = -1 + \text{i}\sqrt{3}$ et C d'affixe $z_{\text{C}} = -1 - \text{i}\sqrt{3}$.
   a. Placer les points A, B et C
   b. Déterminer la nature du triangle ABC. Justifier la réponse.
3. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et on appelle A′, B′ et C′ les images respectives de A, B et C par R.
   a. Déterminer les formes exponentielles de z_{A}, z_{B}, et z_{C} puis de $z_{\text{A}'}$, $z_{\text{B}'}$, et $z_{\text{C}'}$.
   b. Placer A′, B′ et C′ sur la figure précédente.
   c. Vérifier que $z_{\text{A}'}$, $z_{\text{B}'}$, et $z_{\text{C}'}$ sont solutions de l'équation $z^3 = 8\text{i}$.

Exercice 2 **4 points**

Partie A

En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise A s'élevait à 230 000 euros.
Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 15 000 euros.

1. Calculer le chiffre d'affaires u_1 en 1991.
2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année $1990 + n$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser le premier tenue u_0 et la raison a de cette suite.
3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise A.

Partie B

En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise B s'élevait à 150 000 euros.
Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. Calculer le chiffre d'affaires v_1 en 1991.
2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année $1990 + n$.
   Justifier que (v_n) est une suite géométrique de raison $1,074$.
3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise B.

Partie C

1. Que constate-t-on en 2006 pour les entreprises A et B ?
2. En 2006, le chef de l'entreprise B affirme qu'à ce rythme son entreprise aura dans 15 ans, un chiffre d'affaires pratiquement double de celui de l'entreprise A. A-t-il raison ? Justifier.

Problème **11 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x.$$

1. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. Soit g' la dérivée de g. Montrer que $g'(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 4}{x}$.
3. Dresser le tableau de variations de g sur $]0~;~+\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0~;~+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + 3\ln(x) - \frac{4\ln(x)}{x}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité 3 cm).

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en 0 ; on remarquera que $f(x) = x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x$.

   Que peut-on en déduire ?
2. **a.** Montrer que pour tout x strictement positif $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b. En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f(x) = x + \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x$.

   Donner les solutions dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$ de l'équation $f(x) = x$.
4. Tracer $(\mathcal{C})$ et la droite d'équation $y = x$.
5. Interpréter graphiquement le résultat de la question 3.

Partie C

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

   $$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3x\ln x - 2(\ln x)^2$$

   est une primitive de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. On considère dans le plan le domaine $(\mathcal{D})$ délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

   a. Hachurer le domaine $(\mathcal{D})$.

   b. Calculer l'aire du domaine $(\mathcal{D})$ en unités d'aires puis en cm^2. On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au mm^2 près.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie électronique ∾ Génie électrotechnique, optique Métropole septembre 2007

EXERCICE 1

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On désigne par i le nombre complexe de module 1, d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

2. Dans le plan complexe $\mathscr{P}$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 3 + \text{i}\sqrt{3}$ et $z_{\text{B}} = 3 - \text{i}\sqrt{3}$.
   a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{A} et z_{B}.
   b. Placer les points A et B dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
3. On considère le point C, image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$.
   a. Placer le point C dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   b. Déterminer la forme algébrique de l'affixe z_{C} du point C.
   c. Démontrer que OC = BC,
   d. En déduire la nature du quadrilatère OABC.
4. On considère le point D, image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   a. Placer le point D dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   b. Déterminer la forme algébrique de l'affixe z_{D} du point D.
   c. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze ayant deux côtés opposés de même longueur.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, les trois questions peuvent être traitées de manière indépendante.
On désigne par y une fonction de la variable réelle t, définie et 2 fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et par y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 9y = 0.$$

2. On désigne par (E) l'équation différentielle :

$$y'' + 9y = 8\sin t.$$

a. On désigne par A un nombre réel quelconque.
Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = -\frac{1}{3}\sin(3t) + A\cos(3t) + \sin t.$$

est une solution de l'équation différentielle (E).

b. Déterminer le nombre réel A tel que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

3. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = -\frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{2}{3}\cos(3t) + \sin t.$$

Calculer la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$.

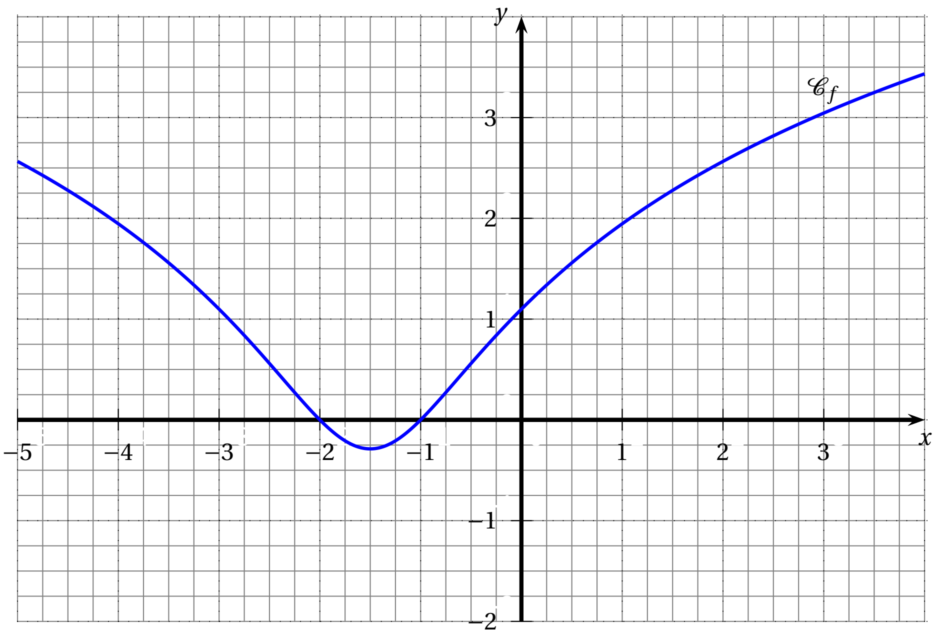
PROBLÈME

Ce problème a pour but d'étudier la position relative des courbes représentatives de deux fonctions. On note ln la fonction logarithme népérien.

Partie A. Détermination d'une fonction *f*

On donne ci-dessous, dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
On suppose que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A de coordonnées (0 ; ln 3), B de coordonnées (−1 ; 0) et C de coordonnées (−2 ; 0).

1. On admet qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que, pour x réel, $f(x) = \ln\left(ax^2 + bx + c\right)$.
Calculer a, b et c.



(Ce graphique n'est pas à l'échelle.)

2. On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + 3x + 3\right)$ et on désigne par f' sa fonction dérivée.

a. Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.

b. Démontrer que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminer la valeur exacte de ce minimum.

Partie B. Étude d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x)=\ln\left(\frac{10x+11}{x+2}\right).$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, du plan $\mathcal{P}$ et g' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$

1. a. Calculer $g(-1)$.

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
En déduire que la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote D dont on donnera une équation.

2. a. En remarquant que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$:

$$g(x)=\ln(10x+11)-\ln(x+2),$$

justifier que :

$$g'(x)=\frac{9}{(10x+11)(x+2)}.$$

b. Établir le tableau de variations de la fonction g.

Partie C. Étude des positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

1. On pose, pour tout x réel, $P(x)=x^3+5x^2-x-5$.

a. Vérifier que, pour tout x réel, $P(x)=\left(x^2-1\right)(x+5)$. tout

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$.

c. Étudier le signe de $P(x)$ pour tout x réel.

2. On rappelle que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln\left(x^2+3x+3\right)$ et que la fonction g est définie sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\ln\left(\dfrac{10x+11}{x+2}\right)$.

a. En utilisant les résultats de la question C. 1. b., résoudre dans l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x)=g(x)$.

b. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$.

3. a. En utilisant les résultats de la question C. 1. c, résoudre dans l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(x)\geqslant g(x)$.

b. En déduire selon les cas la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$;

4. Sur le graphique de la partie A, tracer la droite D et la courbe $\mathcal{C}_g$.

Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat STI Novembre 2007 ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique
Nouvelle-Calédonie

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité 4 cm).

On considère les trois nombres complexes suivants :

$z_1 = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{12}}$; $z_2 = 1 - \text{i}$; $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire z_2 sous forme exponentielle.
2. **a.** Écrire z_3 sous forme exponentielle.

   b. En déduire que $z_3 = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. **a.** En remarquant que $z_1 = z_2 \times z_3$, donner l'écriture de z_1 sous forme algébrique,

   b. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
4. **a.** Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

   b. On désigne par I le point d'affixe 1.
   Placer le point I et préciser la nature du triangle OIB.
5. On désigne par R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   a. Quelles sont les images respectives des points I et B par R ?

   b. En déduire la nature du triangle OAC.

EXERCICE 2 **4 points**

Lors d'une fête, le comité d'organisation a prévu une animation qui consiste à lancer un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

La partie est organisée selon les règles suivantes :

On mise 3 euros puis on lance le dé ;

— pour la sortie du 6, on reçoit 10 euros ;

— pour la sortie du 5, on reçoit 4 euros ;

— pour la sortie du 4, on reçoit 1 euro ;

— dans les autres cas on ne reçoit rien.

On appelle gain algébrique d'une partie la différence entre la somme reçue et la mise initiale.

Partie A

1. On note X la variable aléatoire qui à l'issue d'une partie associe le gain algébrique.

   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

   b. Établir la loi de probabilité de X.

   c. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$.

d. Le comité d'organisation prévoit la réalisation de 150 parties réalisées lors de cette fête.

Quelle bénéfice peut-il espérer tirer de ce jeu ?

2. Un joueur se présente, il dispose de 4 euros.

Déterminer la probabilité P que ce joueur puisse jouer deux parties.

Partie B

Le comité d'organisation a décidé en dernière minute de rendre ce jeu équitable.
La règle du jeu reste identique, seule la mise est changée.
Déterminer cette nouvelle mise x qui rend le jeu équitable.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x - 2.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.
Cette courbe est donnée sur la feuille annexe.

1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que pour tout réel x on a l'égalité suivante :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 + 2x\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{x}\right).$$

b. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ (on utilisera le fait que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$).

3. Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{x} - 1}{\mathrm{e}^{x}}$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} :

5. On considère le point A de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse $-\ln 3$.

a. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A.

b. On note (T)la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.

Montrer que le coefficient directeur de la droite (T) vaut -1.

6. Sur le graphique donné (feuille annexe), tracer les droites (D) et(T).

Partie B

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = -\mathrm{e}^{x} + x^{2} - 2x$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

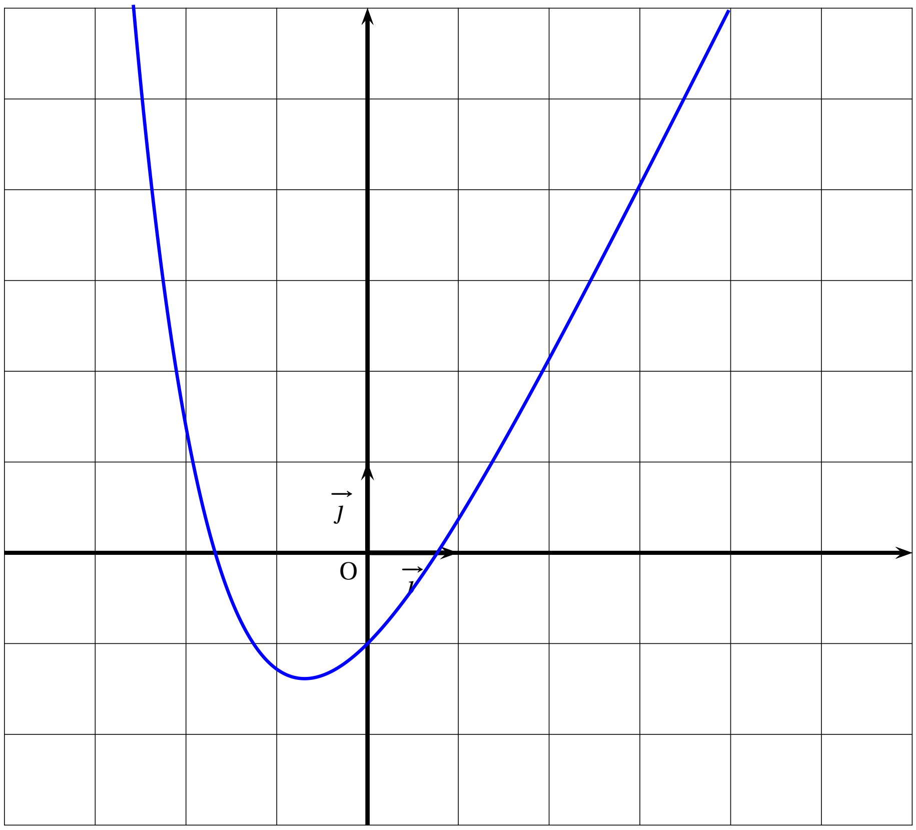
2. Soit $(\mathscr{E})$ le domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

   Hachurer le domaine $(\mathscr{E})$. Soit $(\mathscr{A})$ l'aire du domaine $(\mathscr{E})$ en unités d'aire, calculer la valeur exacte de $(\mathscr{A})$.

   Donner une valeur approchée de $(\mathscr{A})$ à 10^2 près.

3. Calculer la valeur moyenne μ de f sur $[1\,;\,3]$. Interpréter graphiquement cette valeur.

Annexe à rendre avec la copie



∽ Baccalauréat STI Métropole juin 2007 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **4 points**

Une entreprise fabrique des plaquettes de métal. Pour cela elle utilise deux machines, une qui les ajuste en longueur et une autre qui les ajuste en largeur.
Les machines sont programmées pour donner des plaquettes de 2,5 cm sur 1,5 cm.
Des erreurs de manipulation peuvent conduire à des dimensions non conformes : une longueur de 2,6 cm au lieu de 2,5 cm ; une largeur de 1,6 cm au lieu de 1,5 cm.

Afin de vérifier la conformité de ces plaquettes, on procède à deux tests : un test sur la longueur et un test sur la largeur. On effectue les deux tests sur 100 plaquettes et on obtient :

- 20 plaquettes ont une longueur de 2,6 cm ;
- 18 plaquettes ont une largeur de 1,6 cm ;
- 5 plaquettes ont une dimension de 2,6 cm sur 1,6 cm.

On prélève au hasard une plaquette parmi les 100. Elles ont donc toutes la même probabilité d'être choisies.

1. Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant :

	Largeur conforme 1,5	Largeur non conforme 1,6	Total
Longueur conforme 2,5			
Longueur non conforme 2,6		5	20
Total			100

2. a. Quelle est la probabilité qu'une plaquette prélevée au hasard soit conforme à ce que veut l'entreprise ?

b. Quelle est la probabilité qu'une plaquette prélevée au hasard ait exactement une de ses dimensions non conforme ?

3. Soit X la variable aléatoire qui à chaque plaquette prélevée au hasard associe le nombre de ses dimensions non conformes.

a. Donner les valeurs possibles de X.

b. Donner la loi de probabilité de X.

EXERCICE 2 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique puis, pour chacune d'elles, le module et un argument.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On note A, B et C les points du plan ayant pour affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 1 - \text{i}\sqrt{3}, \quad z_{\text{B}} = 2 \text{ et } z_{\text{C}} = 1 + \text{i}\sqrt{3}.$$

a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

b. Montrer que les triangles OAB et OBC sont équilatéraux.

c. Soient D, E et F les points tels que le polygone ABCDEF soit un hexagone régulier. Construire les points D, E et F sur la figure commencée dans la question 2 a.

On rappelle qu'un hexagone est un polygone à 6 *côtés.*

d. Calculer le produit des affixes des 6 sommets de cet hexagone régulier.

Problème **11 points**

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x - 3.$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Limites aux bornes

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
On pourra établir au préalable que. pour tout nombre réel x,
$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 + 2x\mathrm{e}^{x} - 3\mathrm{e}^{x}\right)$.

2. Asymptote oblique

a. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

b. Étudier la position relative de la droite $(\mathscr{D})$ par rapport à la courbe $(\mathscr{C})$.

3. Étude des variations de la fonction $\boldsymbol{f}$

a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{x} - 1}{\mathrm{e}^{x}}$ où f' est la dérivée de la fonction f.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x, $f(x) = 0$.

c. Étudier le signe de la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Établir le tableau de variations de la fonction f.

e. Calculer $f(1)$ et déterminer le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

4. Tracer la droite $(\mathscr{D})$ et la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

5. Calculer l'aire $(\mathscr{A})$ en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On donnera la valeur exacte de $(\mathscr{A})$, puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

6. Contrôler l'ordre de grandeur du résultat de la question précédente en calculant l'aire en cm^2 de la surface d'un ou deux trapèzes que l'on précisera.

∽ Baccalauréat STI Antilles–Guyane septembre 2007 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

Exercice 1 **6 points**

Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 produisent le même type de pièces.

La machine M_1 fournit les $\frac{4}{5}$ de la production.

Parmi les pièces produites, certaines sont défectueuses. C'est le cas pour 5 % de celles produites par M_1 et 4 % de celles produites par M_2.

1. L'atelier produit 1 000 pièces par jour. Reproduire et compléter le tableau d'effectif suivant.

	Nombre de pièces produites par M_1	Nombre de pièces produites par M_2	Total
Nombre de pièces défectueuses	40	8	
Nombre de pièces non défectueuses			
Total			1 000

2. On choisit au hasard une pièce parmi la production totale de l'atelier d'un jour donné. Calculer la probabilité des évènements suivants

- **a.** A : « la pièce choisie est produite par M1 ».
- **b.** B : « la pièce choisie est défectueuse ».
- **c.** On sait que la pièce choisie a été produite par M_1. Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas défectueuse ?

3. En sortie de chaîne de production chaque pièce coûte 38 € à l'atelier. Les pièces qui sont défectueuses doivent être réparées pour être mises sur le marché. La réparation coûte 4,30 € pour une pièce fabriquée par M_1 et 4,50 € pour une pièce fabriquée par M_2.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque pièce associe son coût de revient.

- **a.** Quelles sont les trois valeurs prises par X ?
- **b.** Donner la loi de probabilité de X.
- **c.** Calculer E(X), espérance mathématique de X.
- **d.** Quel doit être, au centime près, le prix minimal de vente d'une pièce pour que l'atelier ne vende pas à perte ?

Exercice 2 **4 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} - e^{x} - 6.$$

On note f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a pour tout nombre réel x, $f'(x) = e^{x}\left(2e^{x} - 1\right)$.

b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ (on pourra mettre en facteur le nombre e^{x} dans l'expression de $f(x)$).

3. **a.** Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant les limites de f.

b. Écrire le calcul qui montre que le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est égal à $\dfrac{-25}{4}$.

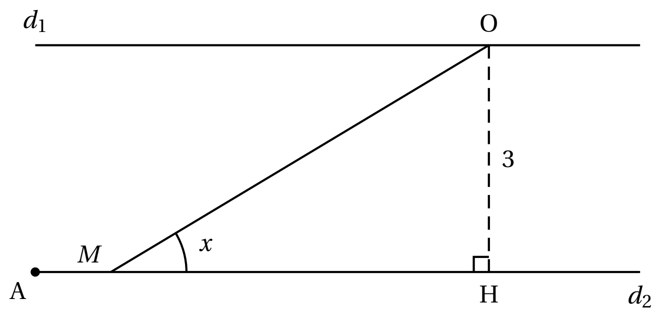
c. D'après le tableau de variation de la fonction f, quel est le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_1) suivante :

$$(E_1) \quad : \quad f(x) = 0.$$

PROBLÈME **10 points**

On considère deux droites parallèles d_1 et d_2. Le point O appartient à la droite d_1 et le point A appartient la droite d_2 comme indiqué sur la figure ci-dessous. On note H le point d'intersection de la droite d_2 et de la perpendiculaire à la droite d_2 passant par le point O (on dit que le point H est le projeté orthogonal du point O sur la droite d_2). La distance OH vaut 3 (OH = 3).

On considère un point M, distinct du point H, sur la demi-droite [HA) d'origine H et on note x l'angle variable $\widehat{\text{H}M\text{O}}$.
Le nombre x appartient donc à l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.



Partie I : conjecture puis vérification

1. Selon vous, comment varie la longueur OM en fonction de l'angle x ? (aucune justification mathématique n'est demandée)
2. Calculer OM lorsque $x = \dfrac{\pi}{3}$.
3. Exprimer OM en fonction de x pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{3}{\sin x}$.
   Vérifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \dfrac{-3\cos x}{\sin^2 x}$.
   Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations. (*On ne demande pas de préciser la limite en* 0.)
5. Recopier puis compléter le tableau de valeurs de la fonction f arrondies au dixième près.

x	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	1	$\dfrac{\pi}{2}$
$f(x)$				

6. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Prendre 2 cm pour unité graphique.

Partie II : Calcul d'un volume

On veut calculer la valeur exacte du volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe $\mathscr{C}$ autour de l'axe des abscisses.
On rappelle que le volume V de ce solide, en unités de volume, est donné par la formule :

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

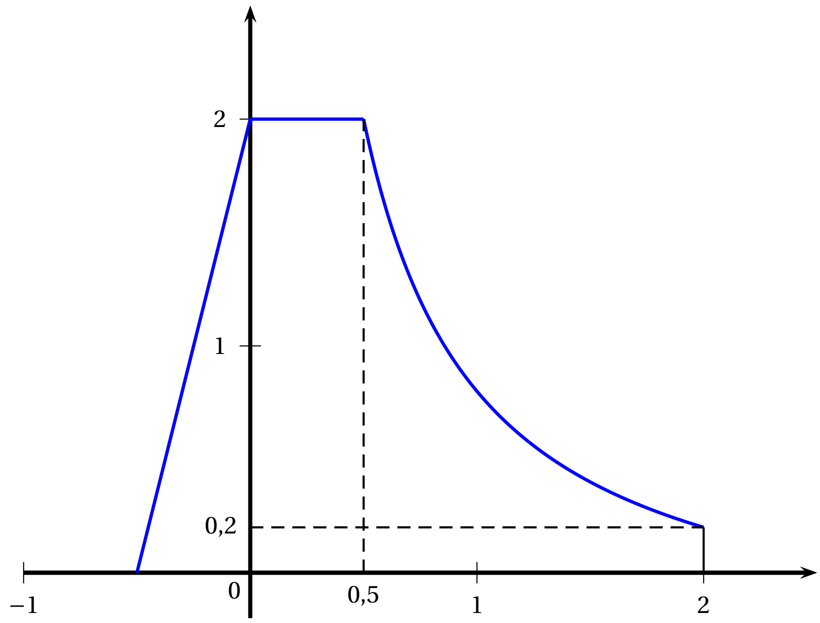
1. Calculer la dérivée de la fonction g définie sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = -\dfrac{\cos x}{\sin x}$.
   En déduire une primitive H sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ de la fonction h définie par

$$h(x) = [f(x)]^2.$$

2. Calculer la valeur exacte du volume V en cm^3, puis une valeur arrondie au mm^3.

∽ Baccalauréat STI Métropole septembre 2007 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

PROBLÈME



Une entreprise veut réaliser les deux montants latéraux d'un toboggan. La courbe qui modélise le toboggan est définie comme une partie de la représentation graphique $(\mathscr{C})$ d'une fonction f dans un repère orthonormé adapté.

Question préliminaire

La partie utile de la courbe $(\mathscr{C})$ qui modélise le toboggan est délimitée par les points de coordonnées (0,5 ; 2) et (2 ; 0,2) comme le suggère le schéma ci-dessus.
La fonction f est définie, pour tout nombre réel x strictement positif, par

$$f(x) = a + \frac{b}{x},$$

où a et b sont deux nombres réels.
Déterminer a et b.

Partie A. Étude de fonction
On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle [0,5 ; 2] par :

$$f(x) = -0,4 + \frac{1,2}{x}.$$

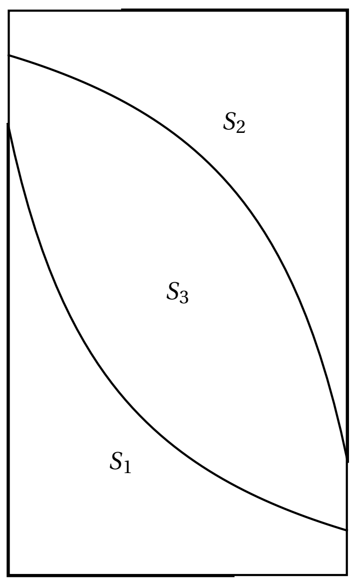
On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle [0,5 ; 2].
2. Étudier le sens le variation de la fonction f sur l'intervalle [0,5 ; 2].
3. Déterminer une équation de la tangente T_1 à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0,5 et une équation de la tangente T_2 à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2.

4. Tracer, dans le repère indiqué, les droites T_1 et T_2, ainsi que la courbe $(\mathscr{C})$.
5. a. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\,;\ 2]$.
   b. Montrer que l'aire exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0,5$ et $x = 2$, vaut $2,4\ln 2 - 0,6$.

Partie B. Étude de la masse perdue en production

Les montants sont réalisés dans des plaques de métal rectangulaires de 2,5 m sur 1,5 m.
On suppose que chaque plaque a une masse de 500 kg.
Chaque plaque permet de fabriquer deux montants comme indiqué sur le dessin ci-après. Les surfaces S_1 et S_2 de taille identique, correspondent aux deux montants latéraux d'un toboggan et la surface S_3 restante est perdue.
D'après la partie A, la valeur exacte, en m^2, de l'aire de la surface S_1 est $2,4\ln 2 - 0,6$.



1. Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-4} près de l'aire en m^2 de la surface restante S_3 est égale à 1,622 9.
2. Déterminer la masse de la partie inutilisée de la plaque correspondant à la surface S_3.