Baccalauréat STL 2001

L'intégrale de juin à septembre 2001

Baccalauréat STL Antilles–Guyane juin 2001
Biochimie–Génie biologique

Calculatrice autorisée

Durée de l'épreuve : 2 heures | Coefficient : 2

EXERCICE 1 **10 points**

On procède à l'hydrolyse alcaline du nitrobenzoate d'éthyle. Au cours de cette réaction, le nitrobenzoate d'éthyle se dégrade en nitrobenzoate et en éthanol. On a mesuré en fonction du temps la concentration du nitrobenzoate d'éthyle, notée $C(t)$.
On a obtenu le tableau de valeurs suivant dans lequel t est exprimé en minutes et $C(t)$ en millimoles par litre (mmol.L^{-1}).

t	0	1	2	3	4	6	8	10	12	14
$C(t)$	50	32,5	27,6	21,3	17,2	14,1	10,0	8,2	7,7	7,2

Le nuage de points $(t\ ;\ C(t))$ associé à cette série est donné en annexe. Un ajustement affine de ce nuage ne semblant pas adapté, on pose maintenant $y(t) = \dfrac{100}{C(t)}$.

1. **a.** Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en arrondissant si nécessaire les résultats à 10^{-2}, près.

t	0	1	2	3	4	6	8	10	12	14
$y(t)$										

   b. Construire le nuage de points $(t\ ;\ y(t))$ dans un repère orthonormal. (On prendra 1 cm pour unité).

2. **a.** On appelle G le point moyen de ce nuage. Calculer ses coordonnées.

   b. Soit A le point du nuage d'abscisse 0. On admet que la droite (AG) constitue un bon ajustement du nuage.
   Construire cette droite.

   c. Déterminer une équation de la droite (AG) (on arrondira si nécessaire les coefficients à 10^{-2} près) et en déduire que $C(t) = \dfrac{100}{2+0,92t}$.

3. En utilisant l'ajustement précédent :

   a. Calculer la concentration en nitrobenzoate d'éthyle au bout de 7 minutes 30 secondes. Le résultat sera arrondi au dixième.

   b. Déterminer graphiquement au bout de combien de temps la concentration en nitrobenzoate d'éthyle a diminué de moitié. Le résultat sera donné avec un chiffre après la virgule.

   c. Déterminer par le calcul à quel moment il reste 5 mmol.L^{-1} de nitrobenzoate d'éthyle en solution. On donnera un résultat final exprimé en minutes et secondes arrondi à 1 seconde près.

EXERCICE 2 **10 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1} - 2.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées).
Les tracés demandés se feront sur papier millimétré.

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   b. En déduire l'existence d'une asymptote D à $(\mathcal{C})$. Donner une équation de D.

2. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[0~;~+\infty[$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$.

   c. Dresser le tableau complet des variations de f.

3. Déterminer une équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 2.

4. **a.** Tracer les droites D et T dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0~;8]$.

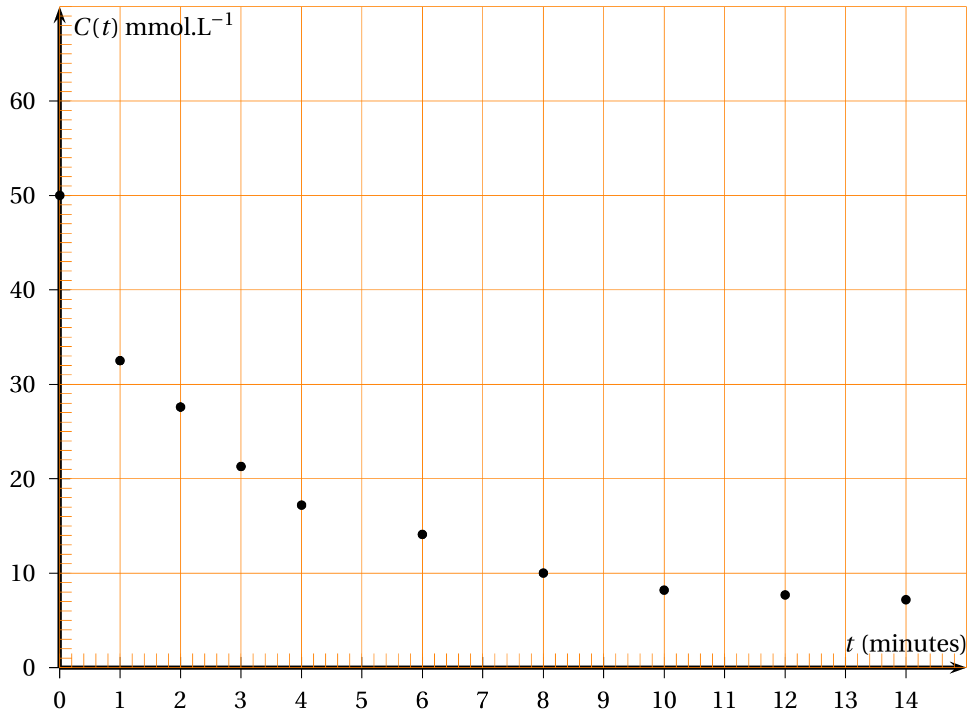
   b. Construire avec soin la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

5. **a.** Déterminer graphiquement une estimation à 10^{-1} près de la solution α de l'équation $f(x) = 0$.

   b. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 0$. On donnera la valeur exacte de la solution.

ANNEXE

Nuage de points de coordonnées $(t\ ;\ C(t))$



Baccalauréat STL Biochimie génie biologique
Métropole juin 2001

EXERCICE 1 **8 points**

Une station pompe l'eau d'une rivière pour la transformer ensuite en eau potable. Lors d'une pollution, elle doit interrompre ses prélèvements le temps que la vague de pollution soit évacuée par le courant. On suppose qu'à partir de l'alerte, donnée à l'instant 0, la concentration en polluant P, exprimée en milligrammes par litre (mg/l), dépend du temps t, exprimé en heures, suivant la relation :

$$P(t) = 100t\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{pour } t \text{ appartenant à l'intervalle } [0\,;\,5].$$

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous en donnant des valeurs arrondies à l'entier le plus proche :

t en heures	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$P(t)$ en mg/l	0		37							5	

2. Montrer que la dérivée P' est définie sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ par :

$$P'(t) = 100\mathrm{e}^{-t}(1-t).$$

3. Étudier le signe de la dérivée P' et dresser le tableau de variation de la fonction P pour t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,5]$.

4. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_P$ de la fonction P dans un repère orthogonal en prenant en abscisse 2 cm pour une heure et en ordonnée 2 cm pour 5 mg/l de pollution.

5. Les normes en vigueur indiquent que ce polluant devient dangereux pour la santé si sa concentration dépasse 5 mg/l.

a. Déterminer graphiquement à partir de quel instant t_0 la station peut reprendre son pompage sans risque pour la santé (on laissera les constructions apparentes).

b. Entre le début de l'alerte et l'arrêt effectif du pompage, il s'est écoulé exactement 6 minutes. Peut-on affirmer que l'eau prélevée a toujours été conforme aux normes en vigueur vis-à-vis de ce polluant ? On justifiera la réponse à l'aide d'un calcul.

EXERCICE 2 **12 points**

Données scientifiques concernant le brochet
La croissance observée en centimètres suivant l'âge est indiquée dans le tableau cidessous :

âge du brochet en années	1	2	3	4	5
taille en centimètres	23	36	43	55	62

La longévité de l'espèce (âge maximal) est évaluée à neuf années.
Très nombreux à la naissance, les brochets se font plus rares à l'âge adulte, les spécimens très âgés devenant exceptionnels. Ainsi sur 1 000 brochets qui viennent de naître, seuls 10 parviendront à l'âge de 8 ans.
Le graphique de la page suivante représente le nuage de points correspondant aux données du tableau.

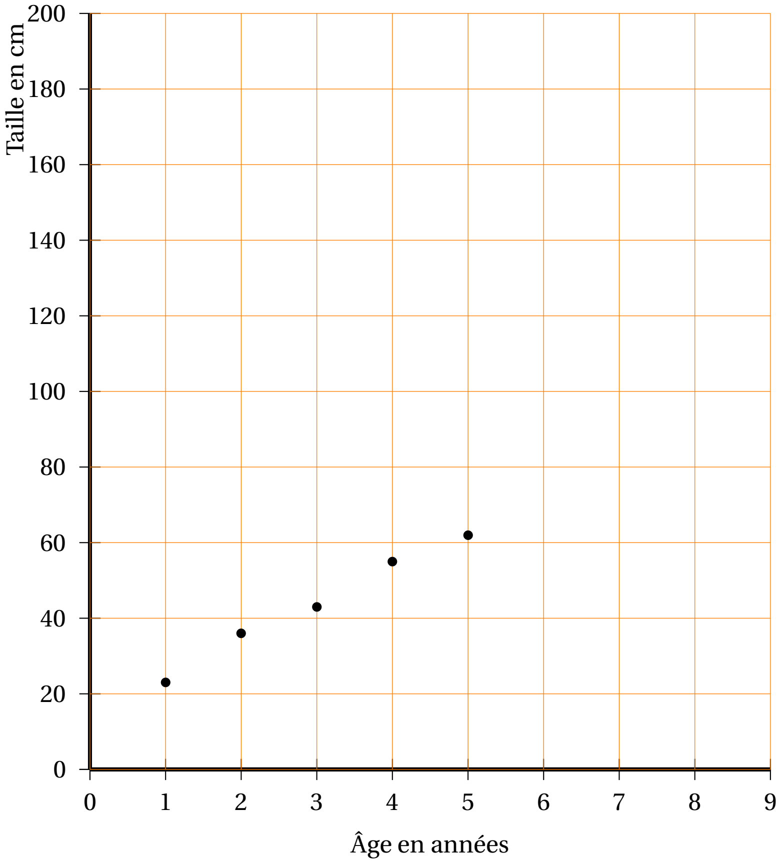
1. Un ajustement linéaire du nuage semble-t-il justifié ?
2. On désigne par G_1 le point moyen du trois premiers points du nuage et par G_2 celui des deux derniers
   a. Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2 et tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.
   b. Montrer que la droite (G_1G_2) admet pour équation réduite :
   $y = 9,8x + 14,4$.
   c. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et montrer qu'il appartient bien à la droite (G_1G_2).
   Placer le point G sur le graphique.
3. On admet que cette droite constitue une bonne modélisation de la taille du brochet en fonction de son âge.
   a. Résoudre algébriquement l'inéquation $9,8x + 14,4 > 200$. Est-il vraisemblable qu'un brochet dont la taille dépasse 200 centimètres puisse être observé ?
   b. Résoudre graphiquement l'équation $9,8x + 14,4 = 100$.
   En déduire l'âge d'un brochet mesurant 100 centimètres. (On donnera la valeur entière la plus proche et on laissera apparents les traits de construction).
4. On souhaite construire un tableau indiquant le nombre de brochets U_n, présents dans un lac, en fonction de leur âge n, en adoptant comme modèle une suite géométrique décroissante de raison $q = 0,565$ et de premier terme $U_0 = 1\,000$.
   a. Calculer les nombres U_1 et U_2 (on donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche).
   b. Recopier et compléter le tableau suivant dans lequel les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche :

âge n en années	1	2	3	4	5	6	7	8	9	nombre total de brochets U_n
nombre de brochets U_n	565	319	180						6	1 291

5. On pêche un des 1 291 brochets âgés de un an et plus présents dans le lac. On suppose que tous ont la même probabilité d'être capturés
   a. Pour une bonne gestion piscicole, on ne peut conserver, après capture, qu'un poisson âgé de quatre ans et plus. On capture un brochet : quelle probabilité a-t-on de pouvoir le garder ? (On donnera un résultat à un dixième près)
   b. Montrer que la probabilité de capturer un poisson dont la taille est un mètre, est d'environ 5 sur 1 000.

À REMETTRE AVEC LA COPIE

Évolution de la taille d'un brochet en fonction de son âge



∽ Baccalauréat STL Biochimie, génie biologique ∾
Métropole septembre 2001

EXERCICE 1 **12 points**

Une réserve d'eau naturelle est aménagée pour la baignade. Un système d'évacuation permet de maintenir dans ce bassin, en toutes circonstances, un volume d'eau constant égal à 50 000 litres. À la suite de pluies torrentielles, des eaux de ruissellement, polluées par des pesticides, se déversent dans ce bassin.
On a déterminé le volume y_i (en litres) de pesticides contenus dans le bassin à l'instant t_i (exprimé en heures). Les résultats figurent dans le tableau suivant :

t_i	0	20	40	60	80	100
y_i	0	173	375	502	688	778

On pose $z_i = -7 + \ln(2000 - y_i)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en donnant les valeurs de z_i à 10^{-2} près.

t_i	0	20	40	60	80	100
z_i			0,39			

2. Dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, représenter le nuage de points M_i $(t_i\ ;\ z_i)$.
(On prendra 0,1 cm pour unité en abscisses, et 20 cm pour unité en ordonnées).

3. **a.** Calculer les coordonnées du point moyen G_1 des trois premiers points du nuage et celles du point moyen G_2 des trois derniers points du nuage.

b. Placer les points G_1 et G_2 sur le graphique et tracer la droite (G_1G_2).

c. Déterminer une équation de la droite (G_1G_2).

4. On considère que la droite (G_1G_2) constitue un ajustement affine convenable du nuage de points M_i $(t_i,\ z_i)$. À l'aide du résultat obtenu en **3. c.**, montrer que l'on peut choisir comme expression approchée de y en fonction de t :

$$y = 2000\left(1 - \text{e}^{-0,005t}\right).$$

5. La baignade devient dangereuse dès que le taux de pesticides contenus dans l'eau atteint 2 %.

a. Pour quel volume de pesticides ce taux est-il atteint ?

b. Résoudre l'inéquation :

$$2000\left(1 - \text{e}^{-0,005t}\right) \geqslant 1000.$$

c. En déduire au bout de combien de jours la baignade sera dangereuse (on arrondira le résultat à l'entier le plus proche).

d. Comment peut-on vérifier graphiquement ce résultat ?

EXERCICE 2 **8 points**

Le but de l'exercice est la détermination puis l'étude de quelques propriétés d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la représentation graphique $(\mathscr{C})$, ainsi que la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0, figurent ci-dessous.

Partie A : détermination de la fonction f

1. À l'aide du graphique, déterminer $f(0)$ et $f'(0)$, où f' désigne la dérivée de la fonction f.
2. On suppose que l'expression de f est donnée pour tout nombre réel x par :

   $f(x) = \alpha + \beta x\mathrm{e}^{-x}$, où α et β sont des nombres que l'on se propose de déterminer.

   a. En utilisant un résultat du **1.** déterminer la valeur de α.

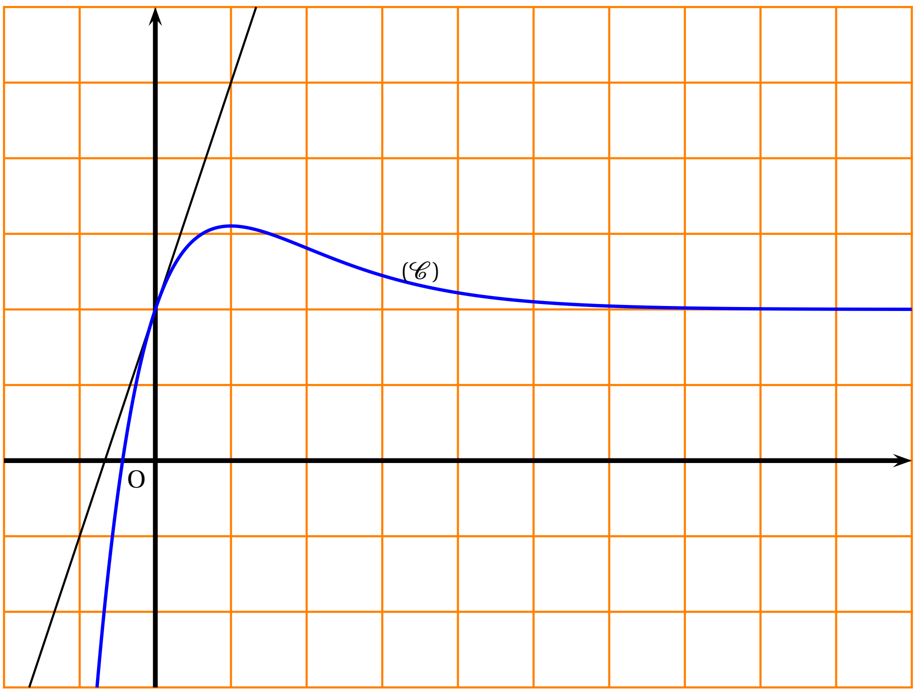
   b. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \beta\mathrm{e}^{-x}(1-x)$.
   À l'aide de l'autre résultat du **1.** en déduire β.-

Partie B : étude de quelques propriétés de la fonction f

On admet dans cette partie que l'expression de f est

$$f(x) = 2 + 3x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. En utilisant l'expression de la dérivée obtenue dans la partie **A 2. b.**, étudier les variations de la fonction f , et préciser les coordonnées exactes du point correspondant au maximum de cette fonction.
2. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Pour quelles valeurs du nombre réel x a-t-on $f(x) < 2$?



∽ Baccalauréat STL Métropole juin 2001 ∾
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

L'usage des calculatrices et des instruments de calcul est autorisé.

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne contient trois boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 3.
Un jeu consiste à extraire successivement deux boules de l'urne, la première boule étant remise avant d'extraire la seconde.
On appelle tirage, tout couple $(a,\ b)$ où a est le numéro de la première boule extraite et b celui de la seconde.
On admet que tous les tirages sont équiprobables.

1. Préciser l'ensemble des neuf tirages possibles (on pourra s'aider d'un tableau).

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage $(a,\ b)$, associe le produit ab.

 a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

 b. Établir la loi de probabilité de X.

 c. Calculer l'espérance mathématique E(X).

EXERCICE 2 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 ayant pour argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes $z_1 = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1 puis de z_2.

2. On considère le nombre complexe $Z = z_1 z_2^2$.

 a. Écrire Z sous forme trigonométrique.

 b. Vérifier que $Z = \left(-2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}\right) + \mathrm{i}\left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}\right)$.

 c. Déduire des deux résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\dfrac{13\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{13\pi}{12}$.

PROBLÈME **11 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} + x + 2.$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

 b. Démontrer que la droite D d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

 c. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite D.

2. Vérifier que pour tout réel x :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 3 + \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} + \frac{2}{\mathrm{e}^{x}}\right);$$

en déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. **a.** Calculer $f'(x)$.

b. Vérifier que $f'(x) = \left(2\text{e}^x - 1\right)\left(\text{e}^x - 1\right)$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$ puis déterminer le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de f.

4. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$. Que peut-on dire des droites T et D ?

b. Tracer, dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les droites D, T et la courbe $\mathcal{C}$.

c. Calculer l'aire, en cm^2, de la partie du plan limité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite D et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 3$.

Baccalauréat STL Métropole juin 2001
Physique de laboratoire et de procédés industriels

L'usage des calculatrices et des instruments de calcul est autorisé.

EXERCICE 1 **5 points**

À l'instant $t = 0$, un corps dont la température est de 100° est placé dans une salle à 20°. On désigne par $\theta(t)$ la température du corps à l'instant t, l'unité de temps étant l'heure et l'unité de température le degré Celsius.
On suppose que la vitesse de refroidissement $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence de température entre la température du corps et la température de la salle (loi de Newton) (on négligera l'élévation de température de la salle) et on admettra donc qu'il existe un nombre réel k tel que

$$\theta'(t) = k[\theta(t) - 20].$$

1. On pose $y(t) = \theta(t) - 20$.

a. Montrer que la fonction y est solution de l'équation différentielle $y' = ky$ où k est défini ci-dessus.

b. Résoudre cette équation différentielle.

c. En déduire que $\theta(t) = C\mathrm{e}^{kt} + 20$ où C est un nombre réel que l'on calculera.

2. **a.** Sachant qu'au bout de 20 minutes le corps s'est refroidi de 100° à 60°, montrer que

$$\theta(t) = 80\mathrm{e}^{(-3\ln 2)t} + 20.$$

b. Quelle est la température du corps, arrondie au degré, au bout de 30 minutes ?

c. En combien de temps la température tombera-t-elle à de 100° à 30° ?

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. **a.** Vérifier que le nombre complexe $\left(2 + \sqrt{3}\right) - \mathrm{i}$ est solution de l'équation :

$$Z^2 - 2\left(2 + \sqrt{3}\right)Z + 4\left(2 + \sqrt{3}\right) = 0.$$

b. Donner l'autre solution de cette équation.

2. On considère les nombres complexes :

$$Z_1 = \left(2 + \sqrt{3}\right) + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad Z_2 = \left(2 + \sqrt{3}\right) - \mathrm{i}.$$

a. Placer dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ le point A d'affixe Z_1 et le point B d'affixe Z_2.

b. Vérifier que $\dfrac{Z_2}{Z_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

c. Déterminer le module et un argument du complexe $\dfrac{Z_2}{Z_1}$.

d. Déduire du résultat précédent l'angle de la rotation de centre O qui transforme A en B.

3. **a.** Déterminer l'affixe Z_3 du point C milieu du segment [AB].
   b. Quelle est la nature du triangle OCA ?
4. **a.** Calculer $|Z_1|$ et $|Z_3|$.
   b. Déduire des résultats précédents que :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

PROBLÈME **10 points**

Le but du problème est l'étude de la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 - \frac{\ln x}{x},$$

où $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique : 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de la fonction g. Les limites aux bornes ne sont pas demandées.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0~;~+\infty[$. En déduire l'existence d'une droite asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ que l'on précisera.
2. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{x^2}{2} + 1.$$

   Sa courbe représentative $\mathscr{P}$ dans le repère $\left(\text{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$ est donnée ci-après.
   a. Déterminer la limite de $[f(x) - h(x)]$ en $+\infty$.
   b. Déterminer le signe de $[f(x) - h(x)]$. Que peut-on en déduire pour la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$?
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille ci-après (à rendre avec la copie).

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{x}\ln x.$$

   sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. On appelle S l'aire en cm^2, de la partie du plan limitée par les deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

Donner la valeur exacte de S puis la valeur arrondie au mm^2.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE