Baccalauréat STL 2002

L'intégrale de juin à septembre 2002

∽ Baccalauréat STL Antilles–Guyane juin 2002 ∾
Biochimie–Génie biologique

Calculatrice autorisée

Durée de l'épreuve : 2 heures — Coefficient : 2

EXERCICE 1 — **12 points**

Évolution d'une population de levures

Soit la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{650}{1+64\text{e}^{-0,5t}}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant en donnant les valeurs arrondies à 1 unité près.

t	0	4	8	12	16	20	24	28	30
$f(t)$									

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(1+64\text{e}^{-0,5t}\right)$; en déduire $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$. Donner l'interprétation graphique de ce résultat.

3. **a.** Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie sur $[0~;~+\infty]$ par

$$f'(t) = \frac{20\,800\text{e}^{-0,5t}}{\left(1+64\text{e}^{-0,5t}\right)^2}.$$

b. Étudier le signe de f' suivant les valeurs de t.

c. Dresser le tableau de variations de f.

4. Déterminer une équation de la droite T tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

5. Tracer, dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ l'asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$, la tangente T et la courbe $\mathcal{C}_f$. On prendra en abscisse 1 cm pour 2 unités et en ordonnée 1 cm pour 50 unités.

6. On étudie l'évolution d'une population de levures cultivées dans un milieu non renouvelé. On admet que $f(t)$ est une bonne évaluation du nombre d'individus, par cm^3, t heures après le début de l'observation.

a. Décrire l'évolution de la population de levures dans le temps.

b. Quel était le nombre d'individus au début de l'observation ?

c. Déterminer graphiquement le temps au bout duquel la population dépassera 500 individus.

EXERCICE 2 — **8 points**

Lors d'une mission de Médecins Sans Frontières, on a analysé le sang de la population d'une ville sur un échantillon représentatif de 8 000 personnes. Les résultats concernant la répartition selon les Rhésus + et Rhésus − et selon les quatre groupes sanguins A, B, AB et O sont les suivants :

— Il y a 70 % de ces 8 000 personnes qui sont Rhésus +. Parmi les personnes de Rhésus +, 33 % sont de groupe A, 48 % de groupe O et 260 personnes sont de groupe AB.

— Parmi les Rhésus négatifs, il y a 17 % qui sont de groupe B, $\dfrac{1}{12}$ de groupe AB et il y a autant de personnes de groupe A que de groupe O.

1. Compléter le tableau suivant des effectifs :

Rhésus / Groupe Sanguins	A	B	AB	O	TOTAL
+					
−					
TOTAL					

2. On choisit au hasard une personne de l'échantillon.
On considère les évènements suivants :
E_1 : « La personne observée est de Rhésus − » ;
E_2 : « La personne observée est de groupe O ».

a. Définir par une phrase en français les évènements suivants :

$$\overline{E_2}\ ; \qquad E_1 \cap E_2$$

b. Déterminer la probabilité, à 10^{-2} près, des évènements suivants :

$$E_2 \quad ; \quad \overline{E_2} \quad ; \quad E_1 \cap E_2 \quad ; \quad E_1 \cup E_2$$

c. Définir par une phrase en français, l'évènement $\overline{E_1} \cup \overline{E_2}$ et calculer sa probabilité.

3. Si l'on choisit une personne de groupe O, déterminer à 10^{-2} près la probabilité qu'elle soit de Rhésus +.

Baccalauréat STL Biochimie, Génie Biologique
Métropole juin 2002

EXERCICE 1 **8 points**

Des étudiants en agronomie procèdent au croisement de deux variétés de pois, l'une ayant des graines jaunes et lisses, l'autre des graines vertes et ridées.
En première génération, F_1, les graines obtenues sont toutes semblables entre elles, elles sont jaunes et lisses.
L'expérience est poursuivie. Les étudiants croisent entre eux les individus de la génération F_1, pour obtenir la génération F_2.
L'observation de 5 431 graines issues de la génération F_2 montre que :

- 4 069 graines sont jaunes dont 3 057 lisses ;
- 341 graines sont vertes et ridées.

Dans les questions 2 *à* 4*, les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie à* 10^{-3} *près.*

1. Reproduire et compléter le tableau suivant (on ne justifiera pas les résultats) :

	graines jaunes	graines vertes	Total
graines lisses			
graines ridées			
Total			5 341

2. On tire au hasard une graine parmi les 5 431 de cet échantillon, tous les tirages étant équiprobables. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   A : « La graine est jaune » ; B : « La graine est lisse ».
3. On considère les évènements suivants : $A \cap B$; $A \cup B$; $\overline{A}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ où $\overline{A}$ et $\overline{B}$ désignent les évènements contraires respectifs de A et B.
   Définir chacun de ces évènements par une phrase, puis calculer leur probabilité.
4. On prend, au hasard, une graine jaune. Quelle est la probabilité de l'évènement C « la graine est ridée » ?

EXERCICE 2 **12 points**

PROTOZOAIRE : être vivant unicellulaire, classé traditionnellement dans le règne animal. (dictionnaire *Le Petit Robert*)
On étudie l'évolution d'une colonie de protozoaires placés dans un milieu limité.
Le nombre $f(t)$ de protozoaires dépend du temps, exprimé en heures, selon la relation :

$$f(t) = \frac{10^3}{1 + 4\mathrm{e}^{-0,5t}}.$$

pour t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
$\mathscr{C}$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal, d'unités graphiques :

- 1 cm pour 1 heure sur l'axe des abscisses ;
- 1 cm pour 100 protozoaires sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Étudier la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
   b. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on précisera une équation.
2. On note f' la dérivée de f.

a. Démontrer que pour tout nombre réel positif t :

$$f'(t) = \frac{2\,000\mathrm{e}^{-0,5t}}{\left(1+4\mathrm{e}^{-0,5t}\right)^2}.$$

b. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0~;~+\infty[$.

c. Établir le tableau de variations de f.

3. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant. Les valeurs de $f(t)$ seront arrondies à l'unité près.

t	0	1	2	4	6	8	9	10
$f(t)$								

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et son asymptote.

5. Calculer l'instant t_0 où le nombre de protozoaires sera égal à 500. Donner une valeur approchée de t_0 à une minute près.

6. Déterminer graphiquement au bout de combien de temps, cette colonie de protozoaires dépassera 95 % de son taux de saturation qui s'élève à 1 000 individus.

(*On fera apparaître sur la figure les construction utiles.*)

∽ Baccalauréat STL Chimie de laboratoire ∾ Métropole juin 2002

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 3 cm.
On appelle i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On appelle notation exponentielle du nombre complexe z l'écriture de z sous la forme $z = r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est le module de z et θ un argument de z.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - z + 1 = 0.$$

2. On pose $z_\text{A} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$ et $z_\text{E} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$.

a. Écrire z_A et z_E en notation exponentielle.

b. Construire les points A et E d'affixes respectives z_A et z_E.

3. On définit les quatre nombres complexes suivants :

$$z_\text{B} = z_\text{A}^2 \quad ; \quad z_\text{C} = z_\text{A}^3 \quad ; \quad z_\text{D} = z_\text{A}^4 \quad ; \quad z_\text{F} = z_\text{A}^6.$$

a. Écrire ces quatre nombres complexes en notation exponentielle.

b. Démontrer que les points A, B, C, D, E et F sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. Construire les points B, C, D et F. On justifiera la construction.

EXERCICE 2 **4 points**

Au cours d'une réaction chimique, on appelle $C(t)$ la concentration du réactif (en moles par litre) à l'instant t (en minutes). On admet que la fonction $C : t \mapsto C(t)$ définie sur l'intervalle $\text{I} = [0\,;\,+\infty[$ est solution de l'équation différentielle (E) :

$$C'(t) = -aC(t).$$

où a est une constante donnée liée à la réaction.

1. a. Résoudre l'équation (E).

b. Déterminer la solution de (E) vérifiant : $C(0) = 0,1$ mol.L^{-1}($C(0)$ est la concentration initiale à l'instant $t = 0$).

2. On donne $a = 9,9 \times 10^{-3}$ min^{-1} et on suppose désormais que la fonction C est définie sur par :

$$C(t) = 0,1 \times \text{e}^{-9,9\times 10^{-1}t}.$$

a. Déterminer le temps de demi-réaction noté $t_{1/2}$, c'est à dire la valeur de t pour laquelle la concentration est égale à la moitié de la concentration initiale $C(0)$. On donnera d'abord la valeur exacte de t puis celle arrondie à la minute.

b. La courbe représentative de la fonction C est donnée en annexe. L'axe des abscisses est graduée en minutes. Déterminer graphiquement la valeur de t pour laquelle la concentration est égale à 10 % de la concentration initiale.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\text{I} =]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 - 2\ln x.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite en 0 de la fonction f . Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

   b. En écrivant $f(x)$ sous la forme $f(x) = x\left(1 - \dfrac{1}{x} - 2\dfrac{\ln x}{x}\right)$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle I.
   Calculer $f'(x)$, étudier son signe puis construire le tableau de variations de f.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ en son point A d'abscisse 1.

4. Calculer $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ puis en donner les valeurs approchées à 10^{-1} près.
   En utilisant les résultats précédents et le tableau de variations de la fonction f.

   a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution autre que 1.

   b. Donner un encadrement de cette solution par deux entiers consécutifs.

5. Construire dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathcal{C}$, et la tangente T.

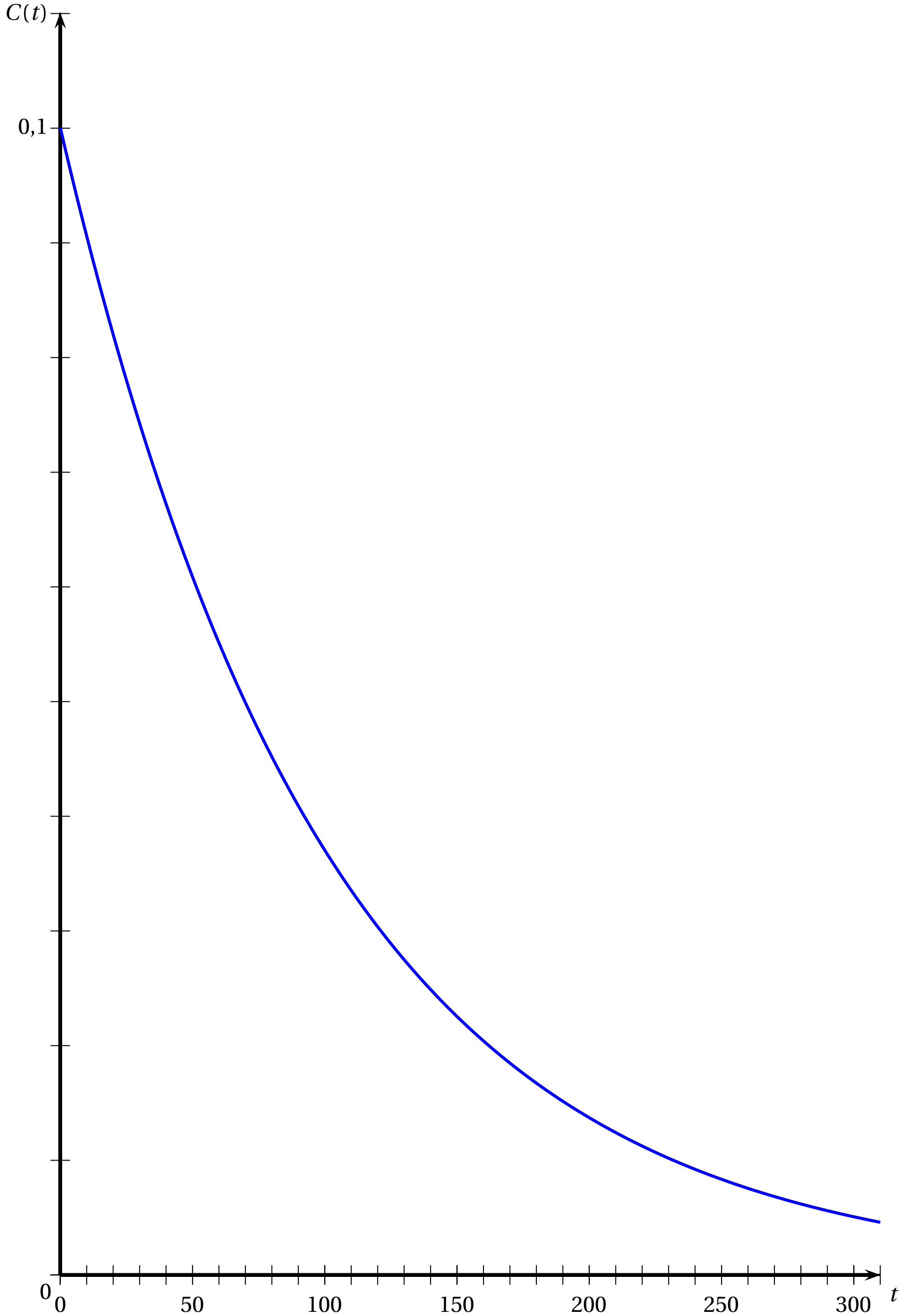
6. Soit F la fonction définie sur l'intervalle I par

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2x\ln x.$$

   a. Démontrer que F est une primitive de f sur l'intervalle I.

   b. On appelle S l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 4$ et $x = 6$.
   Calculer la valeur exacte en cm^2 de S, puis une valeur approchée au mm^2 près.

Courbe représentative de la fonction C



Baccalauréat série STL Métropole septembre 2002
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient 4**

EXERCICE 1 — 5 points

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1}.$$

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_1, puis le module et un argument du nombre complexe z_2.
2. Résoudre le système d'inconnues complexes z et z' :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z - 2z' & = & 3\sqrt{3} \\ 2z - 2z' & = & 9\mathrm{i} - 3\sqrt{3} \end{array}\right.$$

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_1,\ z_2,\ 3\mathrm{i} \quad \text{et}\ \frac{3}{2}\left(-\sqrt{3} + \mathrm{i}\right).$$

   a. Placer les points A, B, C et D.
   b. Démontrer que ces quatre points sont sur un cercle Γ de centre O et de rayon à préciser.
   c. Construire Γ puis justifier que le triangle BCD est rectangle.

EXERCICE 2 — 4 points

Après des violents orages, des eaux de ruissellement contenant 4 % de pesticides se déversent dans un bassin aménagé pour la baignade.
Le système d'évacuation du bassin permet d'y maintenir un volume constant de 30 000 litres.
On admet que le volume de pesticides en litres dans ce bassin est une fonction du temps définie par : $g(t) = f(t) + 1200$, t étant le temps en minutes et f étant une solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad : \quad y' + 5 \times 10^{-3} y = 0.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
En déduire l'expression générale de $g(t)$.
2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le volume des pesticides dans l'eau est nul.
Déterminer la fonction g satisfaisant à cette condition.
3. Le corps médical considère que des affections cutanées peuvent survenir dès que le taux de pesticides dans le bassin atteint 2 %.
Au bout de combien de minutes ce taux est-il atteint ? (on donnera d'abord le résultat exact puis une valeur approchée à une minute près).

PROBLÈME **11 points**

A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + (x-1)\mathrm{e}^x$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. **a.** En utilisant l'écriture de $f(x)$ sous la forme :
$f(x) = x + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x$,
déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

c. Étudier la position relative de D par rapport à $\mathscr{C}$ (on précisera les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et D).

3. **a.** Calculer $f'(x)$.

b. On admet que le tableau de variations de f' est le suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	

Justifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f'(x) > 0$.
En déduire le sens de variation de f, puis dresser le tableau de variation de f.

4. Tracer $\mathscr{C}$ et D.

B.

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x$.

a. Calculer $H'(x)$.

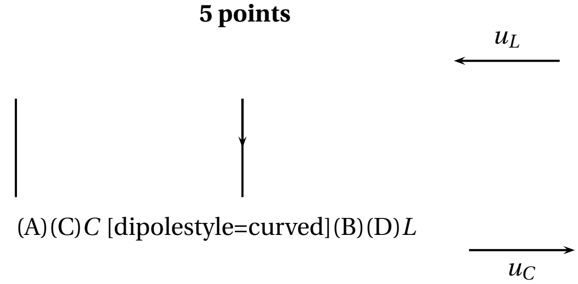
b. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer la valeur exacte en cm^2 de l'aire S de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
Donner la valeur arrondie de S au mm^2 près.

∽ Baccalauréat STL France juin 2002 ∾
Physique de laboratoire et de procédés industriels

EXERCICE 1 **5 points**

Un condensateur de capacité C est associé en série avec une bobine d'inductance L. Les tensions aux bornes du condensateur et aux bornes de la bobine à l'instant t exprimé en secondes sont respectivement notées $u_C(t)$ et $U_L(t)$. On désigne par $i(t)$ l'intensité du courant à l'instant t.
À chaque instant, on a :



$$i(t) = Cu_C'(t) \quad \text{et} \quad u_L(t) = Li'(t).$$

On admet que la tension u est solution sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle

$$u_C''(t) + \frac{u_C(t)}{LC} = 0. \qquad \text{(E)}$$

On prendra $C = 16 \times 10^{-6}$ F (farads) et $L = 1$ H (henry).

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Le condensateur est initialement chargé sous une tension de 15 V (volts) et, à cet instant initial, l'intensité du courant est nulle. Ceci se traduit par les deux conditions initiales

   $$u_C(0) = 15 \qquad \text{et} \qquad u(0) = 0.$$

   Montrer alors que la solution u correspondante s'écrit : $u_C(t) = 15\cos\omega t$, où ω est un réel positif dont on précisera la valeur.
3. Soit I_m la valeur moyenne de la fonction i entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega}$.

   Montrer que $I_m = -\dfrac{0,12}{\pi}$.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z :

   $$z^2 + 2z\sqrt{3} + 4 = 0. \qquad \text{(E)}$$

   On notera :
   - z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive ;
   - z_2 la solution dont la partie imaginaire est négative.
2. Écrire les complexes z_1, z_2, z_1^2 et z_2^2 sous forme trigonométrique.
3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_1, z_2, z_1^2 et z_2^2.
   a. Placer, très précisément, les points A, B, C et D (on se servira des résultats de la question **2.**).
   b. Démontrer que le triangle AOD est un triangle rectangle.

c. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,2[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{(x-2)^2}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

1. Résoudre dans l'intervalle $]0\,;\,2[$ l'équation : $1 + 2\ln x = 0$.
2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,2[$ par :

$$g(x) = x - 2 - 2x\ln x.$$

   a. Déterminer la dérivée g' de la fonction g et étudier son signe sur l'intervalle $]0\,;\,2[$.

   b. Démontrer que la fonction g admet en $\dfrac{1}{\sqrt{\text{e}}}$ un maximum égal à $\dfrac{2}{\sqrt{\text{e}}} - 2$.

   c. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,2[$.

Partie B - Étude et représentation graphique de la fonction *f*

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0\,;\,2[$. En déduire l'existence de deux asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,2[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(x-2)^3}.$$

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,2[$.
3. **a.** Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

   b. Tracer T et $\mathscr{C}$.

Partie C - Calcul d'aire

1. Soit la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;\,2[$ par :

$$F(x) = \frac{\ln x}{2-x} + \frac{1}{2}\left[\ln(2-x) - \ln x\right].$$

   Déterminer sa fonction dérivée F'.
2. On appelle $\mathscr{S}$ l'aire, en cm^2, de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \dfrac{3}{2}$.
   Calculer la valeur exacte de $\mathscr{S}$ puis la valeur arrondie au centième.