Baccalauréat L 2001

L'intégrale de juin à septembre 2001

Baccalauréat L Antilles juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Au 1er janvier 2000, l'abonnement à internet pour un forfait de 20 heures était proposé par une société au tarif de 90 F par mois.
Le tarif est révisé au 1er janvier de chaque année.
On note P_n le prix mensuel (non arrondi) de l'abonnement en francs, au 1er janvier de l'année $(2000 + n)$.
P_0 est donc égal à 90.
Une étude de marché envisage 3 scénarii d'évolution de ce prix.
On donnera tous les résultats demandés arrondis au centime.
Question 1 : Premier scénario
Le prix mensuel de l'abonnement subit une diminution de 10 % chaque année.
a. Calculer P_1 et P_2.
b. Exprimer le terme général P_n en fonction de n et calculer P_{10}.
Question 2 : Deuxième scénario
On prend comme hypothèse que la suite (P_n) est arithmétique.
Calculer alors P_{10} sachant que P_1 est égal à 85.
Question 3 : Troisième scénario
On suppose que la suite (P_n) vérifie pour tout entier naturel n la relation suivante

$$P_{n+1} = 0,8P_n + 6.$$

a. Calculer P_1 et P_2.
b. La suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_n = P_n - 30$.
Montrer que (U_n) est une suite géométrique de raison 0,8.
c. En déduire P_n en fonction de n et calculer P_{10}.
Question 4 :
Quel scénario conduit à l'abonnement mensuel le moins cher en 2010 ?

EXERCICE 2 **5 points**

Une urne contient 4 boules en or et 3 boules en acier indiscernables au toucher.
Un joueur tire au hasard simultanément 3 boules dans cette urne.
Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit O l'évènement : « le candidat tire 3 boules en or ».
   Déterminer la probabilité $p(\mathrm{O})$ de cet évènement.
2. Dans cette question, chaque boule en or rapporte 100 F, chaque boule en acier rapporte 10 F.
   Soit X la variable aléatoire qui désigne le gain d'un tirage.
   a. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$. Donner l'espérance de gain arrondie au franc.
3. **Dans cette question :**
   • Si le joueur tire 3 boules en or, il gagne 1 000 F puis il doit répondre à une question.
   S'il donne la bonne réponse, il double son gain sinon il repart avec 1 000 F.
   On estime que le candidat a 7 chances sur 10 de donner la bonne réponse.

a. Calculer la probabilité pour que le candidat gagne 2 000 F.

b. La probabilité pour que le joueur gagne 1 000 F étant égale à $\frac{6}{175}$ (on ne demande pas de le vérifier), calculer l'espérance de gain dans cette question. On arrondira le résultat au franc.

PROBLÈME **11 points**

Les deux tracés demandés en partie I question **6.** et en partie II question **4.** seront effectués sur des figures séparées. On prendra un repère orthonormal, l'unité graphique étant 1 cm.

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{8x}{x^2+4}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.

1. Montrer que l'origine du repère est centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.
   c. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à cette asymptote pour les points d'abscisses positives.
3. **a.** Montrer que pour tout réel x on a $f'(x) = \dfrac{8(4-x^2)}{(x^2+4)^2}$.
   b. Étudier le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
4. **a.** Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
   b. Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $f(x) < 2x$.
   c. En déduire la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (T) pour les points d'abscisse positives.
5. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite d'équation $y = 1$ puis en donner les valeurs arrondies au centième.
6. Tracer la droite (T) et la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie II

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = 4\ln\left(\frac{x^2+4}{4}\right).$$

1. Calculer la limite de F en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Montrer que F est la primitive de f qui s'annule en 0.
   En déduire les variations de la fonction F sur $[0 ; +\infty[$.
3. Montrer que l'équation $F(x) = 1$ admet une solution unique α dont on donnera une approximation au centième près.
4. Construire la représentation graphique de la fonction F sur $\mathbb{R}$ et placer le réel α.
5. Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la surface limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

Baccalauréat L France juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Lors d'une fête foraine, une loterie est organisée toutes les heures. À chaque fois, trente billets sont vendus parmi lesquels dix sont gagnants (on admet que tous les billets ont la même probabilité d'être achetés).
On donnera pour chaque résultat la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au millième.

1. Luc achète un billet. Quelle est la probabilité que ce billet soit gagnant ?

2. Marc participe à trois loteries consécutives pour lesquelles il prend à chaque fois un billet (on admet que les loteries sont indépendantes).
Quelle est la probabilité que Marc ait au moins un billet gagnant ?

3. Pierre participe à une loterie, il achète simultanément trois billets.

a. Quelle est la probabilité que Pierre n'ait pas de billet gagnant ?

b. Quelle est la probabilité que Pierre ait au moins un billet gagnant ?

4. Qui de Pierre ou de Marc a le plus de chances d'avoir au moins un billet gagnant ?

5. La publicité annonce « *Un billet sur trois est gagnant ! Achetez trois billets !* »
Ce texte suggère que, en achetant trois billets, on est sûr de gagner.
Que pensez-vous de l'énoncé de la publicité ?

Exercice 2 **5 points**

On considère la suite définie pour tout entier naturel n par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & -\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{2}{3}u_n - 1 \end{array}\right.$$

1. a. Calculer u_1 et u_2.

b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ? géométrique ?

2. On pose $v_n = u_n + 3$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique ; déterminer sa raison et son premier terme.

3. Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

4. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. On pose $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.
Exprimer s_n en fonction de n et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

PROBLÈME **11 points**

On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats présentés.
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe $\mathscr{C}$ tracée sur la feuille annexe représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^{-2x} - 4\text{e}^{-x} - 2x + 4.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra factoriser e^{-x} et utiliser la pro-

2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Soit la droite Δ d'équation $y = -2x + 4$. Tracer la droite Δ sur la feuille annexe, qui sera remise avec la copie, et montrer que Δ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   c. Calculer les coordonnées de A, point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de Δ.
   Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et de Δ.

3. Montrer que $f'(x) = -2\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)^2$. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ une unique solution α.
   Soit K le point de la courbe qui a pour abscisse α ; placer ce point sur la figure.

5. **a.** Déterminer une équation de la tangente D au point B d'abscisse 0.

   b. Déterminer les coordonnées du point E de $\mathscr{C}$ où la tangente D$'$ à la courbe est parallèle à la droite Δ.

   c. Placer les points B et E sur la feuille annexe et construire les droites D et D$'$.

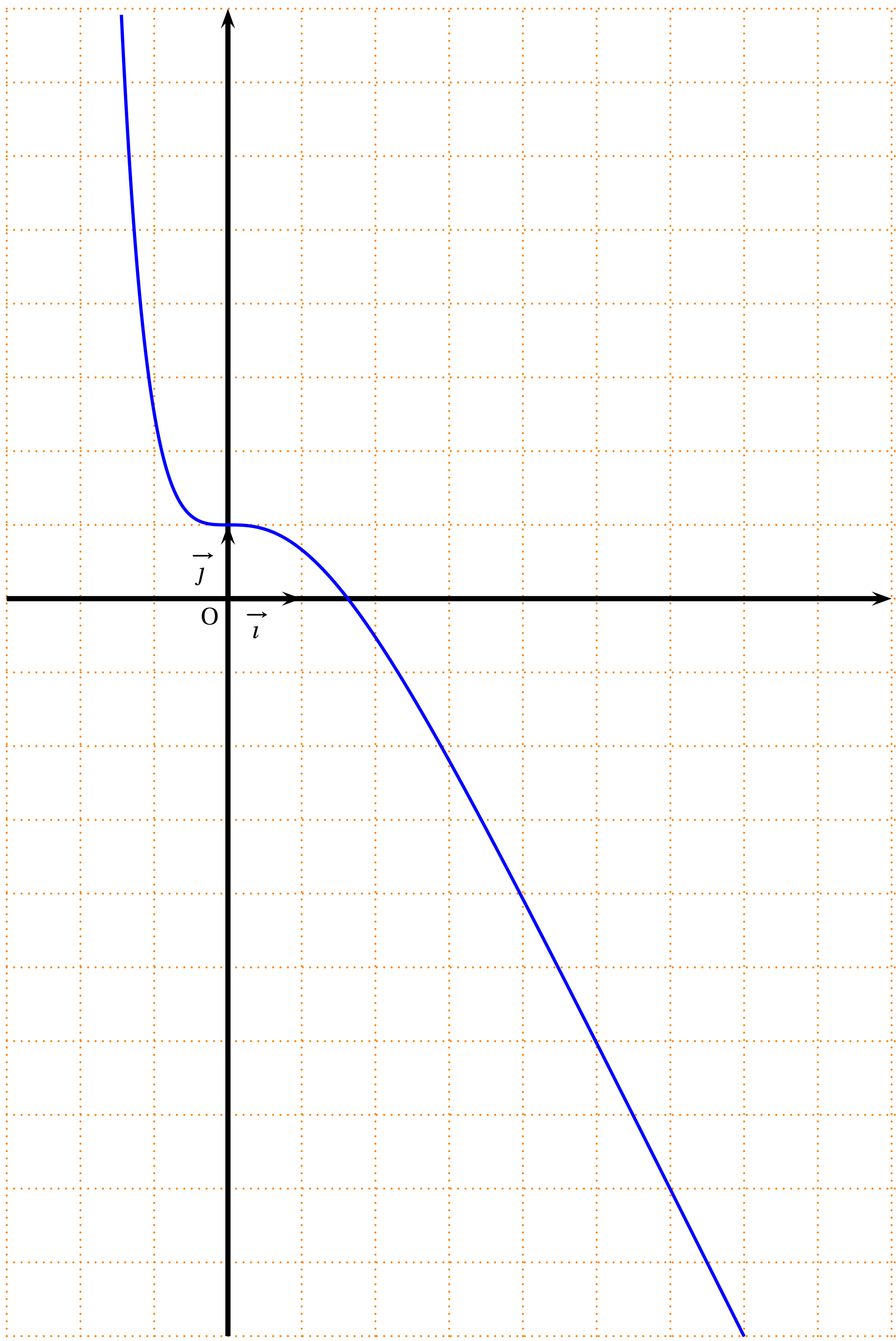
6. Soit g la fonction définie pour tout réel x par

$$g(x) = -2x + 4 - f(x).$$

   Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\ln 4}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x$. Donner une interprétation graphique de ce résultat en illustrant la réponse à l'aide de la feuille annexe.

Feuille annexe à rendre avec la feuille

Problème : courbe représentative de la fonction f.



∽ Baccalauréat L Métropole septembre 2001 ∾

Durée de l'épreuve : 3 heures Coefficient : 4

Une feuille de papier millimétré, qui sera utilisée dans le problème, est remise au candidat avec le sujet.
L'usage des calculatrices est autorisé.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} u+\dfrac{1}{2}v &=& 0\\ u-\dfrac{1}{4}v &=& \dfrac{3}{2}\end{array}\right.$ (u et v réels).
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = a\mathrm{e}^x + \frac{b}{\mathrm{e}^x+1} \quad (a \quad \text{et} \quad b \quad \text{réels}).$$

   Trouver les valeurs des réels a et b, sachant que la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ passe par O et que la tangente à la courbe en ce point est parallèle à la droite Δ d'équation $y = \dfrac{3}{2}x - 2$.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - \frac{2}{\mathrm{e}^x+1}.$$

   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) \geqslant 1$.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans cet exercice, les questions 1, 2 et 3 *sont indépendantes.*
Une urne A contient trois pièces de monnaie en cuivre et deux pièces en argent. Une urne B contient quatre pièces de monnaie en cuivre et une pièce en argent. On considère que dans chaque urne, toutes les pièces étant indiscernables au toucher, chaque pièce a la même probabilité d'être tirée.

1. On enlève une pièce de l'urne A et une pièce de B. Quelle est la probabilité pour que, à l'issue de ces deux opérations, les deux urnes aient la même composition ?
2. Les urnes ont la composition donnée au début de l'exercice.
   On tire simultanément trois pièces de l'urne A ; ces pièces sont ensuite placées dans B. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de pièces en cuivre contenues dans B à l'issue de ces opérations.

   a. Montrer que la valeur minimale prise par X est 5.

   b. Déterminer la loi de probabilité de X.

   c. Calculer l'espérance mathématique de X.
3. Les urnes ont à nouveau la composition donnée au début de l'exercice. On tire une pièce de A, que l'on place dans B, puis on enlève une pièce de B. Quelle est la probabilité pour que l'urne B ne contienne que des pièces en cuivre à l'issue de ces opérations ?

PROBLÈME **11 points**

On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats présentés.

On considère la fonction f définie sur $]1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 2x + \ln(x-1) - \ln x.$$

Le plan étant rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

Partie A : étude de la fonction f et de la courbe $\mathscr{C}$

1. Montrer que $f'(x) = 2 + \dfrac{1}{x(x-1)}$ et en déduire le sens de variations de f sur $]1~;~+\infty[$.
2. **a.** Calculer la limite de f en 1.

   b. Vérifier que $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
5. Montrer que, sur l'intervalle $[2~;~3]$, l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α. Donner une valeur approchée de α au centième près.
6. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ sur une feuille de papier millimétré (on prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).
7. **a.** Montrer que la fonction F définie par $F(x) = x^2 + (x-1)\ln(x-1) - x\ln x$ est une primitive de f sur $]1~;~+\infty[$.

   b. En déduire l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ de terme général $u_n = f(n) - 2n$ (n entier naturel supérieur ou égal à 2).

1. Étudier le signe de u_n en fonction de n.
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $S_n = u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.
3. **a.** Montrer que $S_n = \ln \dfrac{1}{n}$.

   b. Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$.