Baccalauréat L spécialité 2005

L'intégrale d'avril à novembre 2005

∽ Baccalauréat L Pondichéry avril 2005 ∾

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 HEURES

EXERCICE 1 **5 points**

Sophie et Marc s'envoient régulièrement des messages qu'ils codent afin de ne pas en révéler la teneur à n'importe qui. Sophie utilise le procédé suivant :
• Tout d'abord, à chaque lettre de l'alphabet, elle associe son rang dans l'alphabet (ainsi 1 est associé à A, 2 à B, etc.). À chaque lettre, elle associe donc un nombre entier x.
• Elle associe ensuite à x un nouveau nombre entier y, en posant :

$$y \equiv 3x+5 \quad \text{(modulo 26) avec } 0 \leqslant y \leqslant 25.$$

• Elle envoie enfin le message crypté sous forme d'une suite de lettres en associant de nouveau au nombre y la lettre qui lui correspond dans l'alphabet (à zéro elle associera la lettre Z, à 1 la lettre A, à 2 la lettre B, etc. et à 25 la lettre Y).

1. Vérifier qu'avec la méthode de Sophie :
   a. le nombre y associé à la lettre E est 20,
   b. la lettre P est codée par la lettre A.
2. Compléter le tableau de la feuille annexe n°1 à rendre avec la copie (aucune justification n'est demandée).
3. Décrypter ensuite à l'aide de cette méthode le message :

S F S T O T J R H M C T R H M F D P T J.

EXERCICE 2 **7 points**

Partie I

Sur la feuille annexe n° 2 à rendre avec la copie, la figure 1 représente un triangle ABD rectangle isocèle en A. Construire sur cette figure le point C tel que ABCD soit un carré, le point E symétrique de C par rapport à D et le point J milieu du segment [AD].

Partie II

Sur la figure 2 de la feuille annexe n° 2, sont représentés le tracé en perspective à points de fuite du triangle ABD rectangle isocèle en A et la ligne d'horizon Δ du plan de ce triangle.
Toutes les constructions demandées devront être effectuées sur cette feuille et justifiées sur la copie.

1. Placer le point de fuite F_1, de la direction de la droite (AB), le point de fuite F_2 de la direction de (BD) et F_3, celui de la direction de (AD).
2. Construire le point C tel que ABCD soit un carré.
3. Construire le point E, symétrique du point C par rapport au point D.
4. Construire le point J, milieu du segment [AD].

EXERCICE 3 **8 points**

Le but de cet exercice est l'étude du comportement d'une balle de golf en fonction de sa vitesse, de la résistance de l'air, de la texture de la balle. Les mesures ont été faites avec un champion, d'où la nature exceptionnelle des réponses.

Partie A

On appelle t le temps (en secondes) écoulé depuis la frappe de la balle par le joueur, et $h(t)$ la hauteur (en mètres) de la balle par rapport au sol à l'instant t, avant qu'elle ne retombe. Dans un premier temps, on considère que la fonction h est définie pour t réel positif ou nul, de la manière suivante

$$h(t) = -0,008t^2 + t.$$

1. À quel instant t la balle retombera-t-elle sur le sol ?
2. Sur quel intervalle est-il utile d'étudier la fonction h ? Justifier la réponse.
3. Calculer la fonction dérivée de la fonction h.
4. En déduire le tableau de variations de h sur l'intervalle $[0 ; 125]$.
5. À quel instant la balle atteint-elle sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ?

Partie B

Si on tient compte de la résistance de l'air et de la nature de la balle, la hauteur de la balle en fonction du temps est exprimée plus précisément par la fonction g définie pour t réel positif ou nul, par :

$$g(t) = -0,008t^2 + t - \ln(t+1).$$

1. Calculer $g(0)$. Donner la signification du résultat.
2. En utilisant le fait que la dérivée de la fonction $t \longmapsto \ln(t+1)$ est la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t+1}$, montrer que la dérivée de g est donnée par :
$$g'(t) = \frac{-0,016t^2 - 0,016t + t}{t+1}.$$
3. **a.** Étudier les variations de la fonction g.
   b. À quel instant t la balle atteint-elle sa hauteur maximale ? Donner une valeur approchée de la hauteur atteinte, arrondie au mètre.
4. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée, arrondie à la seconde, de l'instant où la balle retombe sur le sol.

FEUILLE ANNEXE N° 1 À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 1

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
rang x dans l'alphabet	1	2	3	4	5								
nombre y associé					20								
lettre envoyée													

lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
rang x dans l'alphabet			16	4	5								
nombre y associé													
lettre envoyée			A										

FEUILLE ANNEXE N° 2 À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2

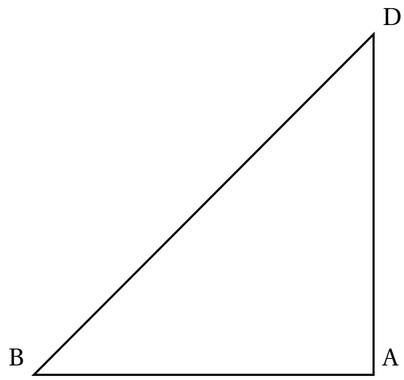


Figure 1

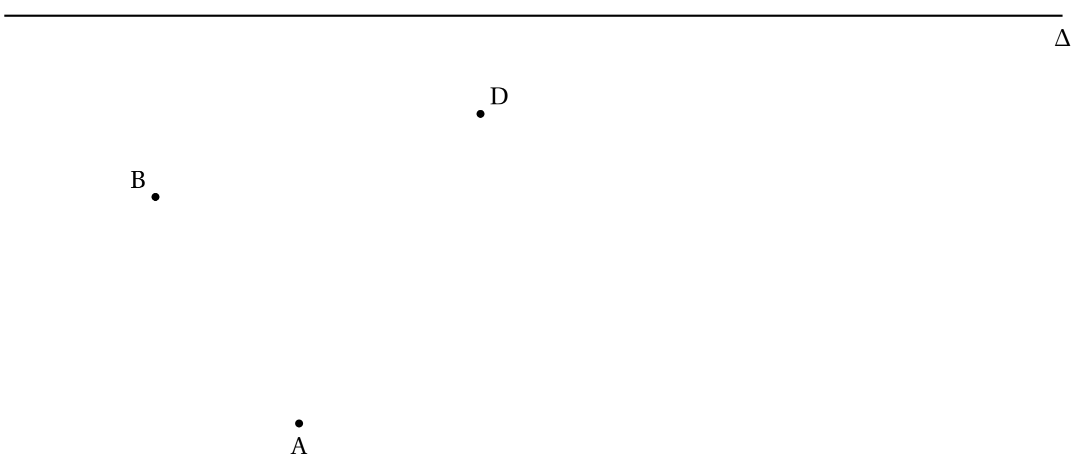


Figure 2

∽ Baccalauréat L spécialité Métropole juin 2005 ∾

L'usage d'une calculatrice est autorisé 3 heures

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

EXERCICE 1 OBLIGATOIRE **3 points**

Arthur et Wilson sont deux jumeaux qui ont l'habitude de communiquer à l'aide de messages codés. Ils réalisent toujours leur cryptage de la façon suivante :
Chaque lettre de l'alphabet munie de son numéro d'ordre n est remplacée par la lettre de l'alphabet munie du numéro d'ordre p $(1 \leqslant p \leqslant 26)$ obtenu à l'aide de la formule

$$p \equiv 3 \times n + 7 \quad (\text{modulo } 26).$$

Par exemple la forme cryptée de L est Q car $3 \times 12 + 7 = 43$ et $43 \equiv 17 \quad (\text{modulo } 26)$.

1. Compléter la table de cryptage donnée sur la feuille annexe à rendre avec la copie (aucune justification n'est demandée).
2. Arthur a envoyé le message suivant à Wilson : MIJUZ CZRI OJ IVRLLHOV.
   Retrouver la forme décryptée du message.
3. Wilson désire lui répondre : MERCI.
   Donner la forme cryptée de ce message.

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **5 points**

On rappelle que le nombre d'or noté Φ est tel que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
On appelle rectangle d'or tout rectangle dont le rapport de la longueur sur la largeur est égal au nombre d'or.
Soit ABCD un carré. On considère :
- le milieu I du segment [DC],
- le cercle $\mathscr{C}$ de centre l et de rayon [lA],
- le point d'intersection E de la demi-droite [DC) et du cercle $\mathscr{C}$,
- le point F tel que AFED soit un rectangle.

1. Compléter la figure donnée sur la feuille annexe à rendre avec la copie.
2. Exprimer DI en fonction de AD.
3. Montrer que $\text{IA}^2 = \dfrac{5}{4}\text{AD}^2$, et en déduire l'expression de IE en fonction de AD.
4. Déduire des deux questions précédentes que $\text{DE} = \Phi \cdot \text{AD}$, et que le rectangle AFED est un rectangle d'or.

EXERCICE 3 OBLIGATOIRE **6 points**

Soit la fonction t définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = 4x^2 - 5x + 1$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $t(x) = (4x-1)(x-1)$. En déduire le signe de $t(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x(2x-5) + \ln x$.
   - **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$ et la limite de f en 0.
   - **b.** Déterminer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{t(x)}{x}$.
   - **c.** En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
   - **d.** Sur une feuille de papier millimétré, tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

EXERCICE 4 OBLIGATOIRE **6 points**

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats arrondis à 10^{-4}.
Les résultats d'une enquête concernant les véhicules circulant en France montrent que :

- 88 % des véhicules contrôlés ont des freins en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins en bon état, 92 % ont un éclairage en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins défectueux, 80 % ont un éclairage en bon état.

On choisit au hasard un des véhicules concernés par l'enquête. Il y a équiprobabilité des choix.
On note F l'évènement « le véhicule contrôlé a des freins en bon état ».
On note E l'évènement « le véhicule contrôlé a un éclairage en bon état ».
$\overline{\text{E}}$ et $\overline{\text{F}}$ désignent les évènements contraires de E et de F.

1. Décrire cette situation à l'aide d'un arbre.

2. a. Déterminer la probabilité $P\left(\overline{\text{F}}\right)$ de l'évènement $\overline{\text{F}}$.

b. Quelle est la probabilité $P_{\overline{\text{F}}}\left(\overline{\text{E}}\right)$, probabilité que l'éclairage ne soit pas en bon état, sachant que les freins ne sont pas en bon état.

c. Montrer que la probabilité $P(\text{E} \cap \text{F})$ de l'évènement $\text{E} \cap \text{F}$ est égale à 0,809 6.

d. Quelle est la probabilité pour que le véhicule ait un éclairage en bon état ?

Tout conducteur d'un véhicule concerné par l'enquête ayant des freins ou un éclairage défectueux, doit faire réparer son véhicule. Calculer la probabilité pour qu'un conducteur ait des réparations à effectuer sur ses freins ou son éclairage.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 1

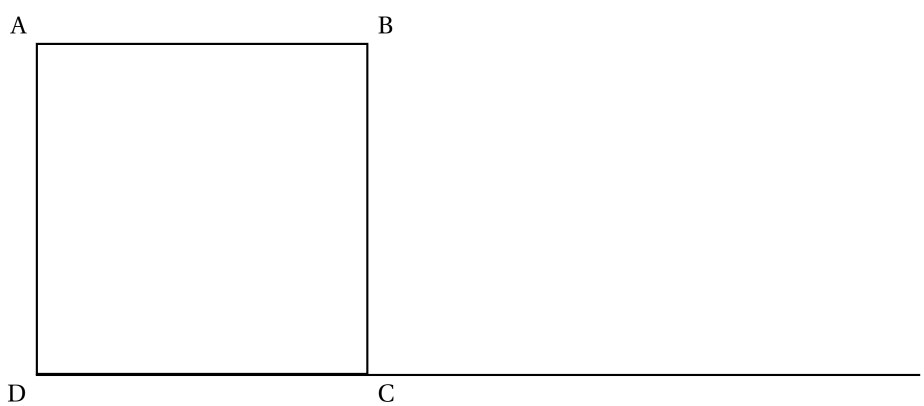
Table de cryptage à compléter :

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
p	10											17	
forme cryptée	J											Q	

lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
p											1		
forme cryptée											A		

Exercice 2

Figure à compléter :



Baccalaurat L spécialité La Réunion juin 2005

L'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

EXERCICE 1 **5 points**

Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée.
Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est exacte.
Une bonne réponse rapporte 1 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,5 *point.*
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

N°	Questions	A	B	C
1	f est une fonction dérivable en -1 telle que $f(-1) = 3$ et $f'(-1) = -2$. Une équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse -1 est	$y = 2x + 3$	$y = 3x + 1$	$y = -2x + 1$
2	$\ln 54 - 2\ln 3$ est égal à	$\ln 9$	$\ln 3$	$\ln 6$
3	Dire que deux évènements A et B sont indépendants signifie que	$P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B})$	$P(\text{A} \cap \text{B}) = 0$	$P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B})$
4	À une tombola, 100 billets sont mis en vente parmi lesquels un billet sur deux est gagnant. Xavier achète 2 billets. La probabilité qu'il achète au moins 1 billet gagnant est	$\dfrac{1}{50}$	$\dfrac{149}{198}$	$\dfrac{4949}{4950}$
5	A et B sont deux évènements tels que $P(\text{A}) \neq 0$. Alors $P(\text{A} \cap \text{B}) =$	$P_{\text{A}}(\text{B}) \times P(\text{A})$	$P_{\text{A}}(\text{B}) \times P(\text{B})$	$P_{\text{B}}(\text{A}) \times P(\text{A})$

EXERCICE 2 **7 points**

Pierre et Jean collectionnent des cartes postales.
À ce jour Pierre en possède 5 000 et Jean 3 000.
Pierre a remarqué que sa collection augmentait de 500 chaque année, et Jean pense qu'il peut voir sa collection augmenter de 15 % annuellement.
Dans toute la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel non nul.

1. On note a_n le nombre de cartes postales que possédera Pierre dans n années.

   a. Justifier que la suite (a_n) est une suite arithmétique de premier terme $a_0 = 5000$ et de raison 500.

   b. Exprimer a_n en fonction de n.

   c. Représenter graphiquement cette suite pour $0 \leqslant n \leqslant 10$. On prendra un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ dans lequel 1 cm représente une année sur l'axe (Ox) et 1 cm représente 1 000 cartes postales sur l'axe (Oy).

2. On note b_n le nombre de cartes postales que possédera Jean dans n années.

   a. Démontrer que la suite (b_n) est une suite géométrique de premier terme $b_0 = 3000$ et préciser sa raison.

   b. Exprimer b_n en fonction de n.

   c. Représenter graphiquement cette suite pour $0 \leqslant n \leqslant 10$ sur le graphique précédent.

3. À partir de quelle année, la collection de Jean est-elle plus importante que celle de Pierre ?

EXERCICE 3 **8 points**

Construction du nombre d'or

1. On appelle nombre d'or le réel noté $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Démontrer que ce nombre vérifie la relation (1) : $\Phi^2 = \Phi + 1$.

2. On appelle rectangle d'or, un rectangle dont le quotient de la longueur par la largeur est égal au nombre Φ.

On donne quatre points A, B, C et D tels que le rectangle ABCD soit un rectangle d'or. (voir figure ci-dessous).

On appelle respectivement E et F les point des segments [BC] et [AD] tels que le quadrilatère ABEF soit un carré.

On pose $\mathrm{AB} = \ell$.

a. Exprimer la longueur AD en fonction de jet de ℓ et de Φ.

b. Montrer que $\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FD}} = \dfrac{1}{\Phi - 1}$.

c. En utilisant la relation (1), montrer que $\Phi(\Phi - 1) = 1$, puis que $\dfrac{1}{\Phi - 1} = \Phi$.

d. Que peut-on en déduire pour le rectangle grisé FDCE ?

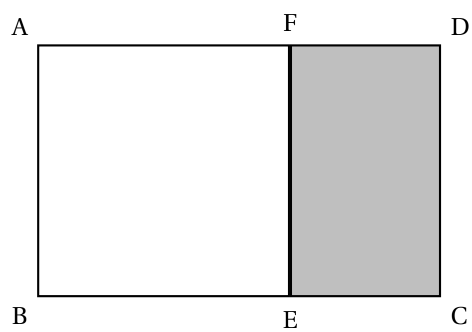
3. Soit K le milieu de [BE].

a. Exprimer KF en fonction de ℓ.

b. Montrer que $\mathrm{KC} = \left(\Phi - \dfrac{1}{2}\right) \times \ell$.

c. En déduire que KF = KC.

d. En déduire une construction géométrique d'un segment dont la longueur est le nombre d'or Φ (faire une figure et expliquer les étapes de la construction).



☙ Baccalauréat L Liban 6 juin 2005 ❧

Le candidat doit traiter les trois exercices

EXERCICE 1 **7 points**

Partie A

La production d'une entreprise peut être modélisée par une suite arithmétique (u_n) telle que, pour tout entier naturel non nul n, u_n désigne le nombre d'appareils produits l'année n.
La 1re année, la production est de 7 500 appareils ; on a donc $u_1 = 7500$.
La 6e année, la production est de 12 000 appareils ; on a donc $u_6 = 12000$.

1. Montrer que la raison de la suite (u_n) est 900.
2. Pour tout entier naturel non nul n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Au bout de combien d'années la production aura-t-elle dépassé le triple de la production initiale ?

Partie B

Une autre entreprise produit la 1re année 7 500 appareils. On notera, pour tout entier naturel non nul n, v_n, le nombre d'appareils produits l'année n. On a donc $v_1 = 7500$. La production annuelle de cette entreprise augmente de 10 % chaque année.

1. Calculer v_2 et v_3.
2. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison.
3. Pour tout entier naturel non nul n, exprimer v_n en fonction de n.
4. Au bout de combien d'années la production aura-t-elle dépassé le triple de la production initiale ?
5. Combien d'appareils l'entreprise aura-t-elle produit en 13 ans ?

Rappel : pour $q \neq 1$, $\quad 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

EXERCICE 2 **7 points**

Pour engager du personnel, une entreprise organise des tests de sélection.
Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves, il y a 60 % d'hommes.
Une étude statistique montre que l'entreprise engage 70 % des hommes candidats et 80 % des femmes candidates.
RAPPEL : La probabilité conditionnelle de A sachant B est $P_{\text{B}}(\text{A}) = \dfrac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})}$.

Partie A

À l'issue des tests, on interroge une personne au hasard parmi tous tes candidats.
On note

- H l'évènement « la personne est un homme » ;
- F l'évènement « la personne est une femme » ;
- E l'évènement « la personne est engagée » ;
- $\overline{\text{E}}$ l'évènement complémentaire (ou contraire) de E.

1. **a.** Quelle est la probabilité $p(\text{F})$ que la personne interrogée soit une femme ?
   b. Quelle est la probabilité que la personne interrogée ne soit pas engagée, sachant que c'est une femme ?
2. Construire un arbre de probabilité illustrant cette situation.

3. Calculer la probabilité $p\left(\overline{\text{E}} \cap \text{F}\right)$ que la personne interrogée soit une femme et qu'elle ne soit pas engagée.
4. Montrer que $p\left(\overline{\text{E}}\right) = 0,26$.

Partie B

Dans celle partie les résultats seront donnés sous forme de valeurs approchées arrondies au millième.
À l'issue des tests on interroge 4 personnes au hasard. On considérera que ces 4 choix sont deux à deux indépendants.

1. Quelle est la probabilité qu'aucune des 4 personnes ne soit engagée ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins une des 4 personnes ne soit pas engagée ?
3. Quelle est la probabilité que 2 personnes exactement soient engagées ?

EXERCICE 3 **6 points**

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 5 par 8 ?
   Quel est le reste de la division euclidienne de 5^2 par 8 ?
2. Quel est. le reste de la division euclidienne de 5^{86} par 8 ?
   Quel est le reste de la division euclidienne de 5^{87} par 8 ?
3. Quel est le reste de la division euclidienne de 965^{87} par 8 ?
4. Soit n un entier naturel.
   Montrer que $5^{2n+1} + 5^{2n} + 2$ est un multiple de 8.

Baccalaurat L Polynésie juin 2005

L'usage d'une calculatrice est autorisée 3 heures

EXERCICE 1 **3 points**

Pour chacune des questions suivantes, parmi les réponses proposées, ii y a toujours une réponse exacte et une seule.
Le candidat répond sur sa copie en rappelant le numéro de la question et la lettre qui correspond selon lui, à la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point et chaque mauvaise réponse enlève 0,25 point ; la note totale de l'exercice ne pouvant être inférieure à 0.

On rappelle que le nombre d'or, noté φ, est défini par $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Le nombre d'or φ vérifie une des 4 propositions suivantes, laquelle ?

$$\text{A : } \varphi^3 = \varphi^2 + 1 \quad \text{B : } \varphi = \varphi^2 + 1 \quad \text{C : } \varphi^2 = \varphi + 1 \quad \text{D : } \sqrt{\varphi} = \varphi - 1.$$

2. Dans un dessin en perspective **cavalière**.
   A : Les droites perpendiculaires sont toujours représentées par des droites perpendiculaires. B : Les droites parallèles sont toujours représentées par des droites parallèles. C : Les lignes de fuite se coupent. D : Les longueurs des segments sont toujours conservées

3. Dans un dessin en perspective à **points de fuite** :

A : Sur les plans frontaux, les parallèles sont concourantes.	B : Les points de fuite sont sur la ligne d'horizon.	C : Sur les lignes de fuite les proportions sont respectées.	D : Un angle droit est toujours représenté par un angle droit.

4. Dans un triangle équilatéral MNP de centre O :
   A : $\widehat{\text{MON}} = 115°$
   B : les médianes sont les bissectrices intérieures
   C : $\widehat{\text{MNP}} = 72°$
5. L'angle de deux côtés consécutifs d'un pentagone régulier vaut
   A : 100° B : 108° C :116° D : 122°
6. Si ABCDE est un pentagone régulier :
   A : AB/DE = φ B : AB/AC = φ C : AD/BC = φ D : AC/AD = φ

EXERCICE 2 **5 points**

Gaston hésite entre deux contrats d'embauche pour lesquels le salaire du premier mois est de 1 600 euros.
Contrat n° 1 : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire mensuel augmente de 10 euros.
Contrat n° 2 : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire augmente de 0,6 % par rapport au mois précédent.

1. Pour chacun des deux contrats, déterminer la nature de la suite des salaires mensuels, préciser le premier terme et la raison.
2. Pour chacun des deux contrats, calculer le total des salaires perçus pendant la première année.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel mois le salaire mensuel correspondant au contrat n°2 devient supérieur à celui du contrat n°1 Justifier correctement la réponse.

On rappelle que :
• La somme S des n premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q (q $\neq 1$) est :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

• La somme S' des n premiers termes d'une suite arithmétique (v_n) de raison r :

$$S' = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = nv_1 + r\frac{n(n-1)}{2}.$$

EXERCICE 3 **6 points**

Voici les premiers vers d'un poème de Jacques Prévert : « Le cancre ».

Il dit non avec la tête
Mais il dit oui avec le cœur
Il dit oui à ce qu'il aime
Il dit non au professeur

Chacun des 26 mots de ces vers est inscrit sur une carte. On obtient ainsi la répartition suivante :

mots	il	dit	non	avec	la	tête	mais	oui
effectif	5	4	2	2	1	1	1	2
mots	le	cœur	à	ce	qu	aime	au	professeur
effectif	1	1	1	1	1	1	1	1

On a ainsi un jeu de 26 cartes.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On tire successivement trois cartes au hasard parmi les 26.
   a. Les tirages s'effectuent sans remise, calculer la probabilité d'obtenir, dans l'ordre « il dit non ».
   b. Les tirages s'effectuent avec remise, calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois le mot « non ».
2. On tire au hasard et simultanément trois cartes au hasard parmi les 26.
   a. Calculer la probabilité d'obtenir trois verbes.
   b. Calculer la probabilité d'obtenir ensemble les trois mots « il », « dit » et « non ».
   c. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois le mot « non ».

EXERCICE 4 **6 points**

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

Pour effectuer un examen médical, on injecte par piqûre intramusculaire une dose de 3 cm^3 d'une substance médicamenteuse dans le sang d'un malade à l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heures). Celle-ci passe alors progressivement dans le sang. La diffusion atteint son maximum au bout d'une heure.
La courbe de l'annexe représente la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t.

1. Construire sur la feuille annexe la tangente à la courbe au point d'abscisse 2, sachant que son coefficient directeur est égal à $(-0,9)$.

2. À partir du graphique commenter l'évolution de la quantité de substance médicamenteuse contenue dans le sang.
3. Pour pouvoir effectuer l'examen, il faut que la quantité de substance médicamenteuse présente dans le sang soit supérieure ou égale à 0,5 cm^3. Déterminer graphiquement de combien de temps on dispose pour faire cet examen.

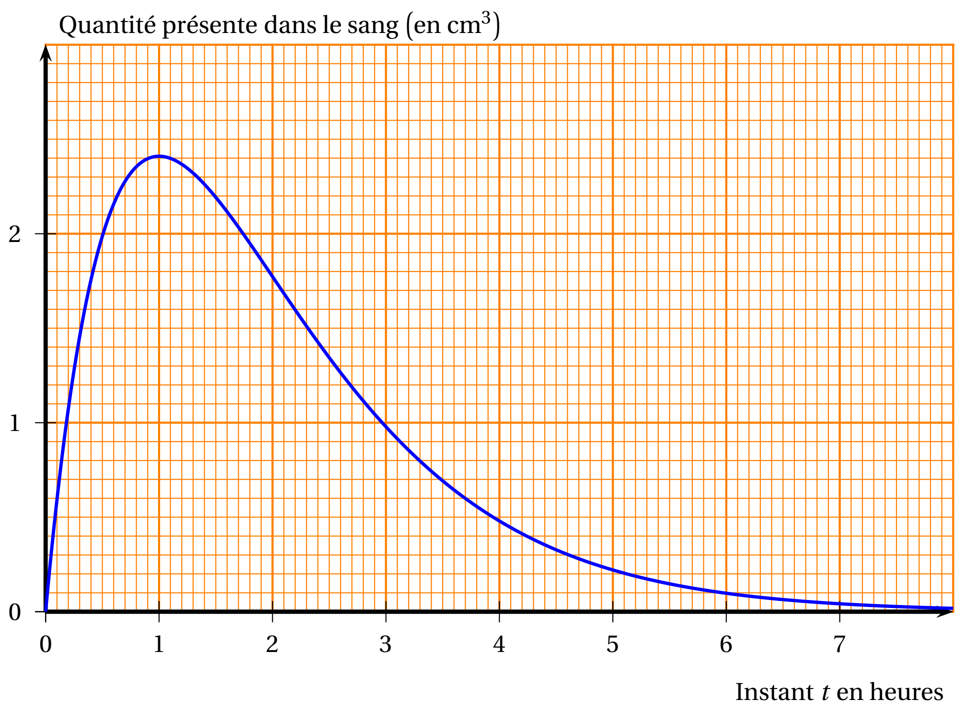
PARTIE B

On a injecté par piqûre intraveineuse 1 cm^3 de médicament à un malade à l'instant $t = 0$. La substance se répartit immédiatement dans le sang et elle est ensuite progressivement éliminée. Expérimentalement, on montre que la quantité $q(t)$ de substance présente dans le sang à l'instant t est donnée par la relation $q(t) = \mathrm{e}^{-0,15t}$ où t est exprimée en heures.

1. Quel volume de ce produit reste-t-il au bout de 90 minutes ?
2. Quel volume de ce produit le malade a-t-il éliminé au bout d'une demi-heure ? d'une heure ?
3. On donne $q'(t) = -0,15\mathrm{e}^{-0,15t}$ où q' désigne la fonction dérivée de la fonction q.

   Étudier les variations de la fonction q sur l'intervalle $[0 ; 9]$ puis tracer sa représentation graphique dans un repère orthogonal en prenant pour unités 2 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

FEUILLE ANNEXE à rendre avec la copie



∽ Baccalauréat L spécialité Centres étrangers ∾ juin 2005

L'usage d'une calculatrice est autorisé 3 heures

EXERCICE 1 **4 points**

Pour chaque question de cet exercice, il s'agit d'indiquer sur votre copie la lettre correspondant à l'unique bonne réponse : aucune justification n'est à rédiger.
Chaque bonne réponse rapporte 0,3 point. Chaque mauvaise réponse enlève 0,25 point. En cas de total négatif, la note de l'exercice est ramenée à zéro.

1. 49 359 est congru à :	**a.**	1 modulo 11
	b.	2 modulo 11
	c.	3 modulo 11
2. Si x est congru à 4 modulo 5 et si y est congru à 6 modulo 5 alors $x+y$ est congru à	**a.**	0 modulo 5
	b.	4 modulo 5
	c.	10 modulo 10
3. $6^{19}+4$	**a.**	est divisible par3
	b.	n'est pas un multiple de 5
	c.	est divisible par 5
4. 10^{11} est congru à :	**a.**	1 modulo 9
	b.	9 modulo 10
	c.	11 modulo 9
5. Si $U_1=2$ et si pour tout n $U_{n+1}=U_n+3$, alors :	**a.**	$U_{16}=50$
	b.	$U_{16}=86\,093\,442$
	c.	$U_{16}=47$
6. La limite de la suite définie par $U_n=0,9^n+2$ est égale à :	**a.**	0
	b.	2
	c.	$+\infty$
7. La suite définie par $U_0=5$ et $U_{n+1}=3U_n+2$ est :	**a.**	arithmétique
	b.	géométrique
	c.	ni géométrique ni arithmétique
8. La population d'un pays augmente de 3 % par an, cette progression est :	**a.**	géométrique de raison 0,03
	b.	arithmétique de raison 3
	c.	géométrique de raison supérieure à 1.

EXERCICE 2 **6 points**

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=2x+5-\mathrm{e}^{x}.$$

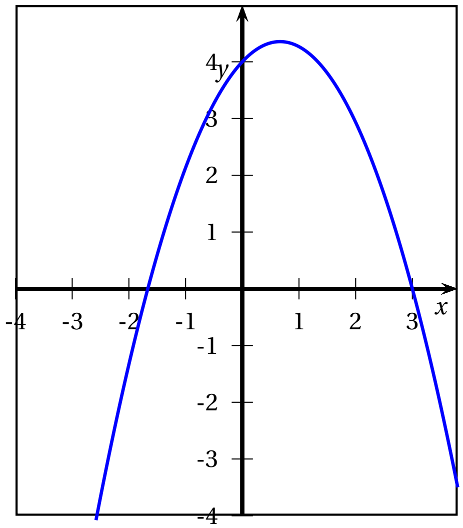
On note f' la fonction dérivée de f.
On appelle Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x :

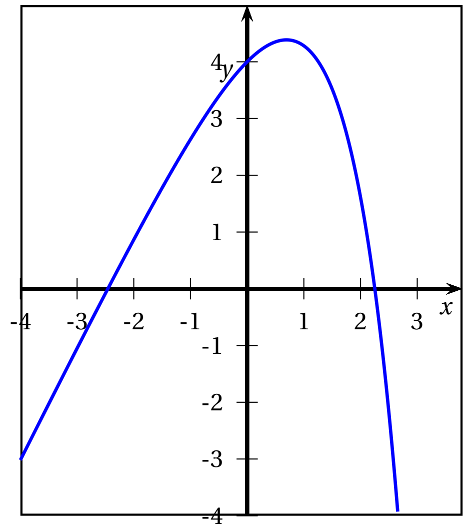
$$2-\mathrm{e}^{x}>0.$$

2. **a.** Calculer la valeur exacte de $f(\ln 2)$.
   b. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c. Calculer $f'(x)$.
   d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.
   e. Montrer que la courbe Γ admet pour asymptote en $-\infty$ la droite Δ d'équation $y=2x+5$.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point d'abscisse 0.
4. Parmi les deux courbes tracées ci-dessous, une seule représente la fonction f. Indiquer laquelle en justifiant votre choix.



Courbe n° 1



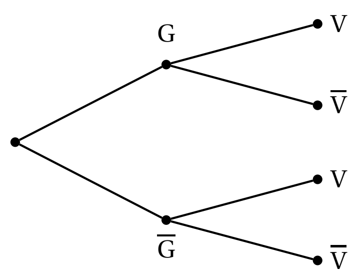
Courbe n° 2

EXERCICE 3 **6 points**

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près.*

58 % des élèves d'une école sont des garçons.
Parmi les garçons, 25 % viennent à l'école à vélo.
Cette proportion tombe à 15 % chez les filles.

1. On choisit au hasard un élève de l'école, on considère les évènements :
   G : « l'élève choisi est un garçon » ;
   V : « l'élève choisi vient à vélo ».
   L'évènement contraire de l'évènement A est noté $\overline{\text{A}}$.
   a. Reproduire et compléter l'arbre probabiliste :

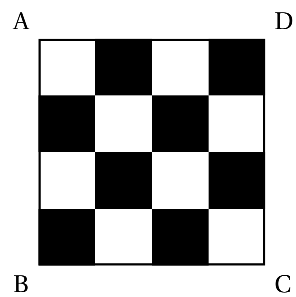


   b. Montrer que P(V) = 0,208.
   c. Calculer la probabilité conditionnelle $P_V(G)$.
2. On choit trois élèves au hasard dans l'école. On suppose que le nombre d'élèves est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilable à trois tirages indépendants avec remise.
   a. Calculer la probabilité que les trois élèves soient des garçons.
   b. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une fille parmi les trois élèves.
   c. Calculer la probabilité qu'au moins deux élèves soient venus à vélo.

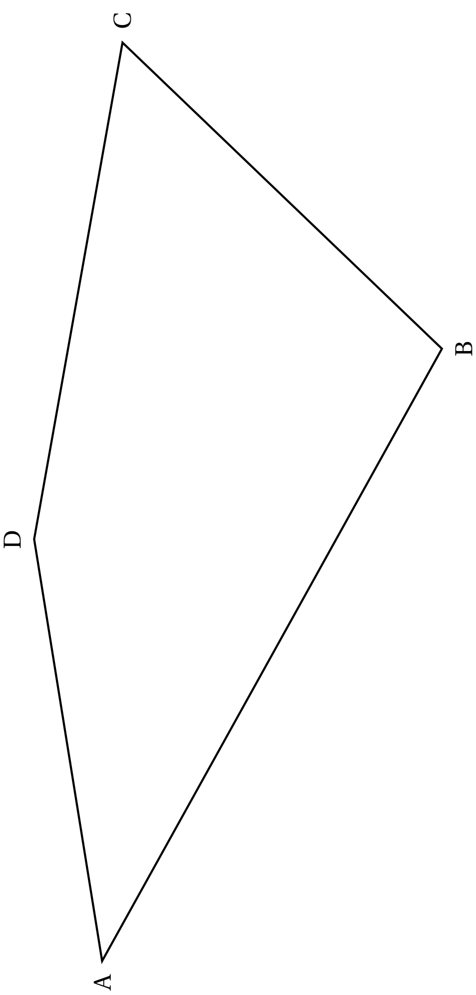
EXERCICE 4 **4 points**

Une plaque carrée ABCD a été dessinée en perspective à deux points de fuites sur l'annexe jointe.

1. Faire apparaitre sur le dessin de l'annexe la ligne d'horizon de cette perspective.
2. Dessiner sur cette plaque un damier de huit cases carrées comme indiqué sur la figure suivante (on pourra s'aider du point d'intersection des diagonales du carré ABCD et des deux points de fuite).



ANNEXE DE L'EXERCICE 4 (à rendre avec la copie)



∽ Baccalauréat L spécialité Métropole ∾ septembre 2005

L'usage d'une calculatrice est autorisé 3 heures

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

EXERCICE 1 **6 points**

Hector a participé de très nombreuses fois à une compétition qui se déroule en deux manches. Il a enregistré sur cassette vidéo chacune des compétitions auxquelles il a participé, et il a constaté les faits suivants :

- il a gagné la première manche dans 95 % des cas ;
- quand il a perdu la première manche, il a aussi perdu la deuxième 3 fois sur 10 ;
- quand il a gagné la première manche, il a aussi gagné la deuxième dans 90 % des cas.

On choisit au hasard une des cassettes vidéo enregistrées par Hector et on la visionne. Il y a équiprobabilité des choix. On note :

- M_1 l'évènement « sur cette cassette, on voit Hector gagner la première manche » ;
- M_2 l'évènement « sur cette cassette, on voit Hector gagner la deuxième manche ».

On notera $\overline{M_1}$ l'évènement contraire de M_1 et $\overline{M_2}$ l'évènement contraire de M_2.

1. À l'aide de l'énoncé donner :
   a. $P(M_1)$ la probabilité de l'évènement M_1,
   b. $P_{M_1}(M_2)$ la probabilité de l'évènement M_2 sachant que M_1 est réalisé.
2. Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilité et compléter cet arbre.
3. **a.** Montrer que la probabilité de voir Hector gagner les deux manches est de 0,855.
   b. Quelle est la probabilité de l'évènement M_2 sachant que M_1 n'est pas réalisé ?
4. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement M_2.
   b. Achille, arrivé en retard, voit Hector gagner la deuxième manche. Calculer à 10^{-2} près la probabilité que sur cette cassette, Hector ait aussi gagné la première manche.

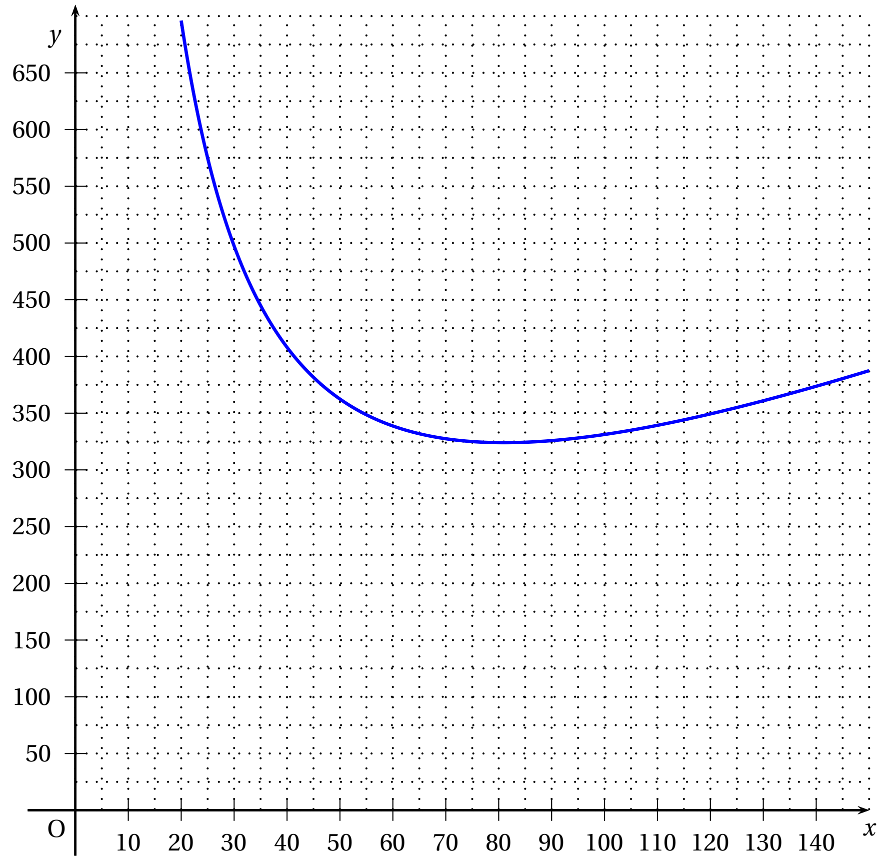
EXERCICE 2 **7 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\text{I} = [20\,;\,150]$ par

$$f(x) = 2x + \frac{13\,122}{x}.$$

1. Montrer que sur l'intervalle I , $f'(x) = \dfrac{2}{x^2}(x-81)(x+81)$. En déduire que sur l'intervalle I, $f'(x)$ est du signe de $(x-81)$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle I.
3. La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous :



Déterminer avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée des solutions de l'équation : $f(x) = 350$ (**le graphique n'est pas à rendre avec la copie.**)

Partie B

Un responsable de club doit organiser un déplacement. Le trajet total est de 600 km et le club dispose d'un bus dont la consommation en carburant, exprimée en litres par heure, est donnée par $\left(5 + \dfrac{v^2}{300}\right)$ où v représente la vitesse moyenne du véhicule en kilomètres par heure. Le prix du litre de carburant est de 1 € et le chauffeur est payé 16,87 € par heure.

1. On désigne par t la durée totale du trajet, exprimée en heures.
   a. Exprimer t en fonction de v.
   b. Démontrer que le coût du carburant, exprimé en euros, pour le trajet total est égal à

$$\frac{3\,000}{v} + 2v.$$

   c. Montrer que le coût du transport, exprimé en euros, est égal à $f(v)$.
2. En utilisant la partie A :
   a. Donner la vitesse moyenne à laquelle doit rouler le bus pour que le coût du transport soit minimal. Quel est alors ce coût ?

b. Le responsable du club dispose d'au plus 350 € pour le transport. Pour des raisons de sécurité, la vitesse moyenne du bus ne peut dépasser 90 kilomètres par heure. Déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la vitesse moyenne du bus, pour que le coût du transport ne dépasse pas 350 €.

EXERCICE 3 **7 points**

Dans cet exercice, la description des programmes des constructions n'est pas demandée sur la copie. Cependant, on laissera apparents tous les traits de construction. La question 4 *est indépendante des questions* 1, 2 *et* 3.

1. Tracer à la règle sur la feuille de papier millimétré (sans donner d'explications) un carré ABCD dont les côtés ont pour longueur 16 cm. Placer son centre O et les milieux des côtés.

2. Dans cette question, on note c_0 la longueur en cm des côtés du carré ABCD.

a. Calculer la longueur de la diagonale [AC] du carré en fonction de c_0.

b. Tracer le cercle tangent aux quatre côtés du carré ABCD. Exprimer son diamètre en fonction de c_0.

c. Tracer le carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et dont les côtés sont parallèles à ceux du carré ABCD.

d. En constatant que les diagonales du carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ sont des diamètres du cercle $\mathscr{C}$, calculer la longueur c_1, des côtés du carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ en fonction de c_0.

3. Tracer le cercle $\mathscr{C}'$ tangent aux quatre côtés du carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ puis le carré $\mathrm{A''B''C''D''}$ inscrit dans le cercle $\mathscr{C}'$ dont les côtés sont parallèles â ceux du carré $\mathscr{C}'$. Exprimer la longueur c_2 des côtés de $\mathrm{A''B''C''D''}$ en fonction de c_1.

4. En renouvelant cette construction, on obtient une suite de carrés. On note c_3, c_4, c_5 et ainsi de suite la longueur des côtés des carrés successifs ainsi obtenus. Les calculs précédents ont montré que les premiers termes de la suite (c_n) sont ceux d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $c_0 = 16$. On admettra que ce résultat est vrai pour tous les termes de la suite (c_n).

a. Déterminer l'expression de c_n en fonction de n.

b. Calculer les valeurs exactes de c_6 et c_{12}.

c. Pour quelles valeurs de l'entier n, la longueur c_n, des côtés du $(n+1)$-ième carré construit est-t-elle strictement plus petite que 1 cm ?

Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie
épreuve de spécialité - novembre 2005
Durée : 3 heures

EXERCICE 1 **8 points**

Rappels sur la fonction logarithme népérien, notée ln :
a et b étant des réels strictement positifs et n un entier naturel :
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\ln(a^n) = n \ln a$.

Partie A :

Sur la **feuille annexe à rendre avec la copie** on a tracé dans un repère orthonormal la courbe $(\mathcal{C})$ représentant la fonction logarithme népérien et la parabole $(\mathcal{P})$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

   b. En déduire le tableau de variation de la fonction f. (On ne demande pas les limites de f à l'infini.)

   c. Quelles sont les coordonnées exactes du point S sommet de la parabole $(\mathcal{P})$?

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - \ln x = 2x^2 - 3x + \frac{9}{2} - \ln x.$$

   La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

   a. Montrer que, pour tout réel strictement positif x : $g'(x) = \dfrac{(4x+1)(x-1)}{x}$.

   b. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Justifier que le minimum de g est égal à $\dfrac{7}{2}$.

   c. En déduire que pour tout réel strictement positif x : $f(x) - \ln x > 0$.
   Quelle propriété des courbes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{C})$, visible graphiquement, le résultat ci-dessus permet-il de justifier ?

Partie B :

Pour tout réel strictement positif x, on note M le point de la courbe $(\mathcal{P})$ d'abscisse x et N le point de la courbe $(\mathcal{C})$ de même abscisse x. On a ainsi : $MN = f(x) - \ln x = g(x)$.
(la longueur MN est exprimée dans l'unité graphique du schéma de **feuille annexe**.)

1. Placer les points M et N sur le schéma de la **feuille annexe** lorsque $x = 2$.

2. Montrer que lorsque $x = \dfrac{3}{4}$ on a : $MN = \dfrac{27}{8} + 2\ln 2 - \ln 3$.
   Donner la valeur de MN arrondie au centième.

3. **a.** À l'aide de la **partie A**, déterminer pour quelle valeur de x, la longueur MN est minimale. Que vaut alors cette longueur ?

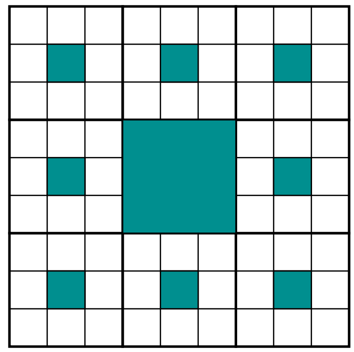
   b. Tracer en rouge sur le schéma de la **feuille annexe** le segment $[MN]$ correspondant.

4. Quelle est la limite de la longueur MN quand x tend vers 0 (avec $x > 0$) ?

EXERCICE 2 **6 points**

Rappels :
Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_1.
On a alors pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $U_n = U_1 \times q^{n-1}$.
Soit (V_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme V_1.
On a alors pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $V_n = V_1 + (n-1)r$.

Un carré d'aire 1 m^2 est divisé en 9 carrés égaux comme indiqué sur la figure ci-contre.
On colorie le carré central. (1er coloriage)



Les huit carrés restant sont à leur tour divisés en 9 carrés égaux comme indiqué sur la figure ci-contre.
On colorie les huit carrés centraux obtenus. (2e coloriage)

On poursuit avec la même méthode la division et le coloriage du carré.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'aire en m^2 de la surface totale coloriée après n coloriages. On a ainsi : $A_1 = \dfrac{1}{9}$.
La surface grisée sur le figure ci-dessus a donc pour aire A_2.
On remarquera que chaque étape du coloriage consiste à colorier un neuvième de la surface non coloriée jusque là.

1. **a.** Justifier que $A_2 = A_1 + \dfrac{1}{9}(1 - A_1)$ puis calculer la valeur numérique exacte de A_2.

   b. Expliquer pourquoi, pour tout entier n supérieur ou égal à 1,
   $A_{n+1} = \dfrac{8}{9}A_n + \dfrac{1}{9}$.

2. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $B_n = A_n - 1$.

   a. Calculer B_1.

   b. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_{n+1} = \dfrac{8}{9}B_n$.

   c. Quelle est la nature de la suite (B_n) ?
   Exprimer alors, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le terme général B_n de la suite (B_n) en fonction de n.

3. **a.** En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $A_n = 1 - \left(\dfrac{8}{9}\right)^n$.

   b. Calculer alors la limite de la suite (A_n). Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 3 **6 points**

Une horloge électronique a été programmée pour émettre un bip toutes les sept heures. Le premier bip est émis le 31 décembre 2004 à minuit.

1. **a.** À quelle heure est émis le dernier bip du 1$^{\text{er}}$janvier 2005 ?
   b. À quelle heure est émis le premier bip du 2 janvier 2005 ?
   c. À quelle heure est émis le dernier bip du 2 janvier 2005 ?
   d. À quelle heure est émis le premier bip du 3 janvier 2005 ?
   Expliquer les réponses.
2. **a.** Montrer que : $24 \equiv 3 (\text{modulo} 7)$.
   b. En déduire le reste de la division euclidienne de 2×24 par 7 et le reste de la division euclidienne de 3×24 par 7. Justifier les réponses.
   Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste de la division euclidienne de $n \times 24$ par 7				5	1	4	0	3	6	2

   c. Expliquer pourquoi l'horloge émet un bip à minuit tous les 7 jours et tout les 7 jours seulement.
3. On rappelle que l'année 2005 est une année non bissextile et comporte donc 365 jours.
   a. Déterminer le plus petit entier naturel a tel que : $365 \equiv a (\text{modulo} 7)$
   b. À quelle date l'horloge émettra-t-elle un bip à minuit pour la dernière fois en 2005 ?
   Expliquer la réponse.