# Baccalauréat L spécialité 2007

# L'intégrale de juin à septembre 2007

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

# ∽ Baccalauréat TL-Enseignement de spécialité ∽ Antilles-Guyane juin 2007

**EXERCICE 1** **6 points**

**Partie A.**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = 55\text{e}^{0,5x}.$$

1. Donner les valeurs approchées arrondies à l'unité des nombres $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.
2. **a.** Déterminer la fonction dérivée de la fonction $f$.

   **b.** En déduire le tableau de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,10]$, l'équation $f(x) = 3\,000$. On donnera les arrondis à l'unité des solutions éventuelles.

**Partie B.**

Une étude statistique permet de considérer la fonction $f$ de la partie A comme un modèle satisfaisant pour décrire l'évolution, de 2000 à 2010, de la puissance totale des éoliennes installées en France.
Plus précisément, on suppose que pour l'année $(2000 + x)$ où $x$ est un entier naturel, la puissance des éoliennes installées en France, exprimée en mégawatts, est donnée par $f(x)$.
*En utilisant ce modèle et en exploitant les résultats de la partie A, répondre aux questions suivantes en donnant les justifications nécessaires.*

1. Quelle était la puissance totale des éoliennes en 2001 ?
2. En quelle année la puissance totale des éoliennes devrait-elle dépasser 3 000 mégawatts ?
3. Pourra-t-on atteindre une puissance totale de 10 000 mégawatts en 2010 ?
4. Pour tout entier naturel $n$, on pose : $u_n = 55\text{e}^{0,5n}$.

   **a.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $\text{e}^{0,5}$.

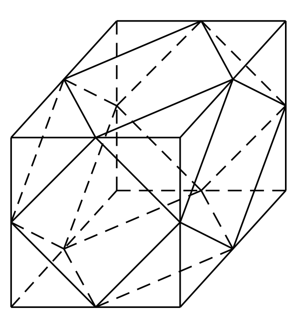
   **b.** Dans le modèle étudié la puissance totale des éoliennes augmente donc chaque année d'un même pourcentage. Donner ce pourcentage en arrondissant le taux au dixième.

**EXERCICE 2** **8 points**

*Cet exercice est composé de deux parties indépendantes.*

**Partie A.**

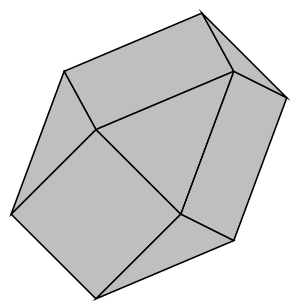
Sur chacune des faces d'un cube $ABCDEFGH$, figure un motif carré formé par les milieux des côtés des faces.



On donne en annexe la représentation en perspective centrale du cube $ABCDEFGH$, dont la face $ABFE$ est située dans un plan frontal. Le carré inscrit dans la face $ABFE$ y est représenté.
Les images des points $A$, $B$, $C$ … sont notés en lettres miniscules a, b, c …
La droite (p) est la ligne d'horizon.
*Les constructions demandées seront réalisées sur la feuille annexe 1, à rendre avec la copie.*
*On laissera apparents les traits de construction utiles.*

1. **a.** Construire le point de fuite principal r.
   **b.** Construire les deux points de distances s et t.
2. **a.** Construire l'image i du milieu $I$ du segment $[CG]$.
   **b.** Construire l'image j du milieu $J$ du segment $[BC]$.
   **c.** Proposer une vérification de la construction du point j.
   **d.** Terminer le dessin des carrés figurant sur les deux faces apparentes du cube.

**Partie B.**



Dans un jeu de société, on utilise un dé qui est un solide obtenu en sectionnant un cube, à partir du schéma de la **partie A**.
Ce dé possède six faces carrées, numérotées de 1 à 6, et huit faces triangulaires, numérotées de 1 à 8.
Le premier joueur lance le dé et il ne peut entamer la partie que si le dé tombe sur une face portant le numéro 6.
On considère que lorsqu'on lance ce dé, la probabilité qu'il tombe sur une face carrée est $\frac{4}{5}$ et la probabilité qu'il tombe sur une face triangulaire est $\frac{1}{5}$.
De plus, on suppose que tous les numéros des faces carrées ont la même probabilité d'apparition et que tous les numéros des faces triangulaires ont la même probabilité d'apparition.
On note C l'évènement « le dé tombe sur une face carrée » et T l'évènement « le dé tombe sur une face triangulaire ». On a donc les probabilités suivantes : $\text{p}(C) = \frac{4}{5}$ et $\text{p}(T) = \frac{1}{5}$.
On note S l'évènement « le dé tombe sur une face portant le numéro 6 » et $\overline{\text{S}}$ l'évènement contraire de S.
*Tous les résultats demandés dans cette partie seront donnés sous forme de fraction irréductible*

1. Compléter l'arbre pondéré figurant sur la feuille annexe 2, **à rendre avec la copie**.
2. **a.** Déterminer la probabilité $\text{p}(\text{S} \cap \text{C})$ de l'évènement $\text{S} \cap \text{C}$.
   **b.** Déterminer la probabilité p(S) de l'évènement S.
3. Sachant que le premier joueur a obtenu un 6, quelle est la probabilité que le dé soit tombé sur une face carrée ?

4. Soit H l'évènement « le dé tombe sur une face portant le numéro 8 », calculer la probabilité de H.

**EXERCICE 3** **6 points**

Pour tout entier naturel $n$, on pose : $A(n) = n^2 - n + 2\,007$.
Le but de l'exercice est d'étudier la divisibilité des entiers $A(n)$ par 2 et par 3.
*Cet exercice est composé de deux questions indépendantes.*

1. **a.** Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre $A(1)$ égal à 2007.

   **b.** Soit $n$ un entier naturel. Démontrer que : « Si $n$ est divisible par 3, alors $A(n)$ est divisible par 3 ».

   **c.** La réciproque de cette dernière affirmation est-elle vraie ? Justifier.

2. **a.** Vérifier que, quel que soit l'entier naturel $n$, on a :

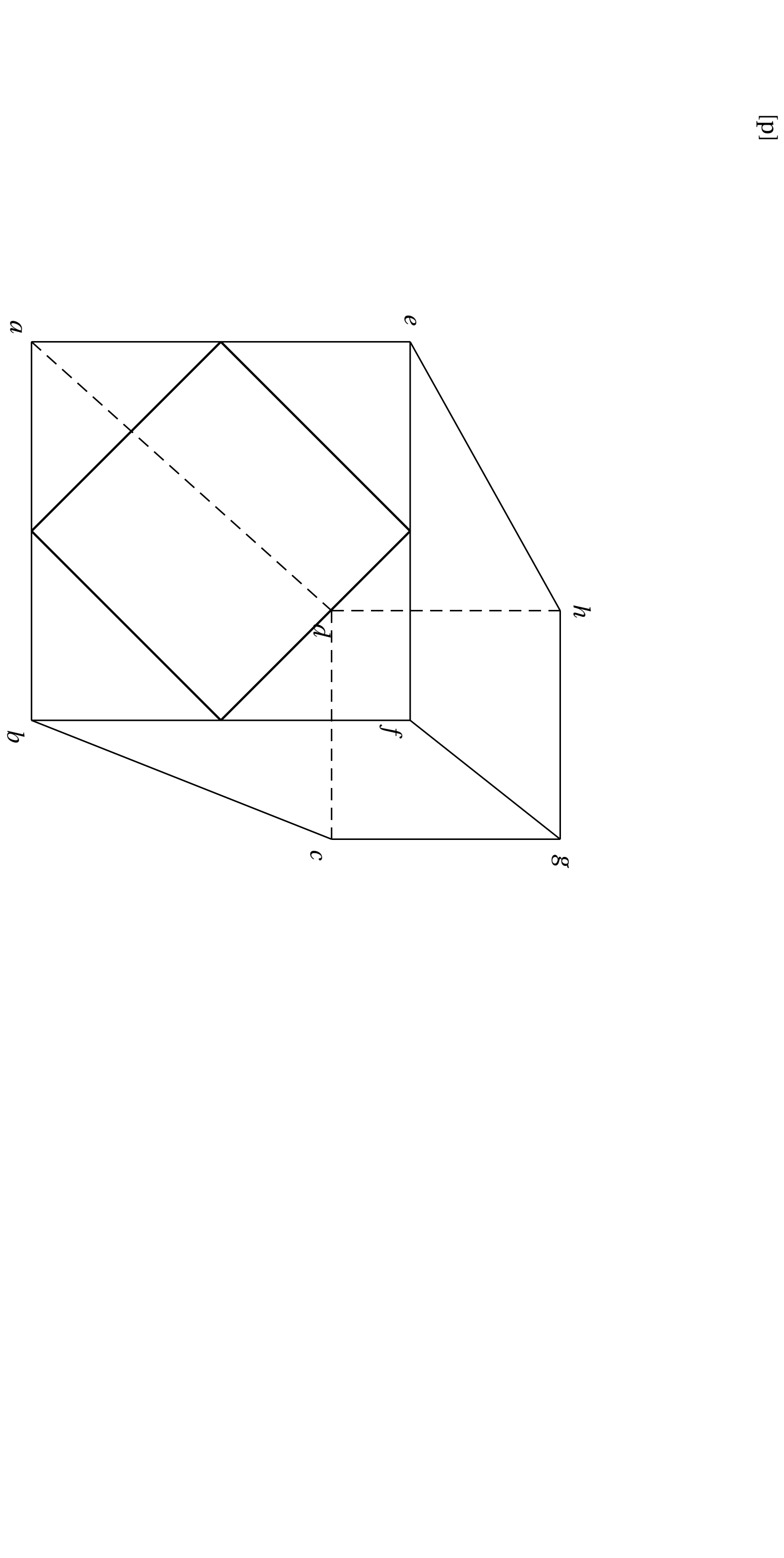
$$(n+1)^2 - (n+1) + 2\,007 = (n^2 - n + 2\,007) + 2n.$$

   **b.** On considère un entier naturel $n$ quelconque. Démontrer que : « Si $A(n)$ est impair, alors $A(n+1)$ est impair ».

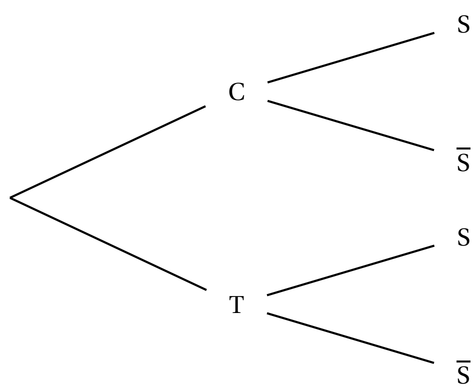
   **c.** L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

   « Il existe au moins un entier naturel $n$ tel que $A(n)$ soit divisible par 2 ».

# ANNEXE 1 à rendre avec la copie



# ANNEXE 2 à rendre avec la copie



# Baccalauréat L-Enseignement de spécialité
# Centres étrangers juin 2007

**EXERCICE 1** **6 points**

Le but de cet exercice est de montrer, par deux méthodes différentes, que pour tout nombre entier naturel $n$, le nombre $n^3 + 5n$ est divisible par 6.

*Première méthode*

1. Montrer que tout nombre entier naturel $n$ est congru, modulo 6, à 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.
2. Recopier et compléter le tabbleau suivant avec des nombres entiers naturels inférieur ou égaux à 5.

| $n \equiv \ldots \pmod 6$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^3 \equiv \ldots \pmod 6$ | | | | | | |
| $5n \equiv \ldots \pmod 6$ | | | | | | |
| $n^3 + 5n \equiv \ldots \pmod 6$ | | | | | | |

3. En déduire que pour tout nombre entier naturel $n$, le nombre $n^3 + 5n$ est divisible par 6.

*Deuxième méthode*

1. Montrer que pour tout nombre entier naturel $n$, $n(n+1)$ est pair. En déduire que pour tout nombre entier naturel $n$, $3n(n+1)$ est divisible par 6.
2. On admet que $(n+1)^3+5(n+1) = (n^3+5n)+3n(n+1)+6$. Montrer que si pour un nombre entier naturel $n$, $n^3+5n$ est divisible par 6, alors $(n+1)^3+5(n+1)$ est divisible par 6.
3. Que reste-t-il à vérifier, pour en déduire que $n^3 + 5n$ est divisible par 6, pour tout nombre entier naturel $n$ ?

**EXERCICE 2** **4 points**

Pour chacune des quatre affirmations, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant le choix effectué. Chaque question est notée sur un point, avec la règle suivante :

— Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
— Une mauvaise réponse n'enlève pas de point.

1. La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. L'équation $\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{4}{3}$ a une solution dans $\mathbb{R}$.
3. La suite définie, pour tout nombre entier naturel $n$, par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 2 quand $n$ tend vers $+\infty$.
4. Pour tout nombre réel $x$ on a $1,01^x < 1\,000\,000$.

**EXERCICE 3** **5 points**

Le tableau suivant donne la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 :

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 | 41 |
| 43 | 47 | 53 | 59 | 61 | 67 | 71 | 73 | 79 | 83 | 89 | 97 | |

Une urne A contient 50 boules indicernables au toucher, numérotées de 1 à 50.
Une deuxième urne B contient 50 boules indicernables au toucher, numérotées de 51 à 100.
Un jeu consiste à lancer un dé cubique non pipé portant deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 2, puis à tirer au hasard une boule, avec la règle suivante :

— Si la face obtenue porte le numéro 1, on choisit la boule dans l'urne A.
— Si la face obtenue porte le numéro 2, on choisit la boule dans l'urne B.

Dans la suite, on note $A$ l'évènement « la boule choisie provient de l'urne A », on note $B$ l'évènement « la boule choisie provient de l'urne B » et on note $R$ l'évènement « le nombre écrit sur la boule est un nombre premier ».
On donnera les valeurs exactes des probabilités demandées.
On joue à ce jeu.

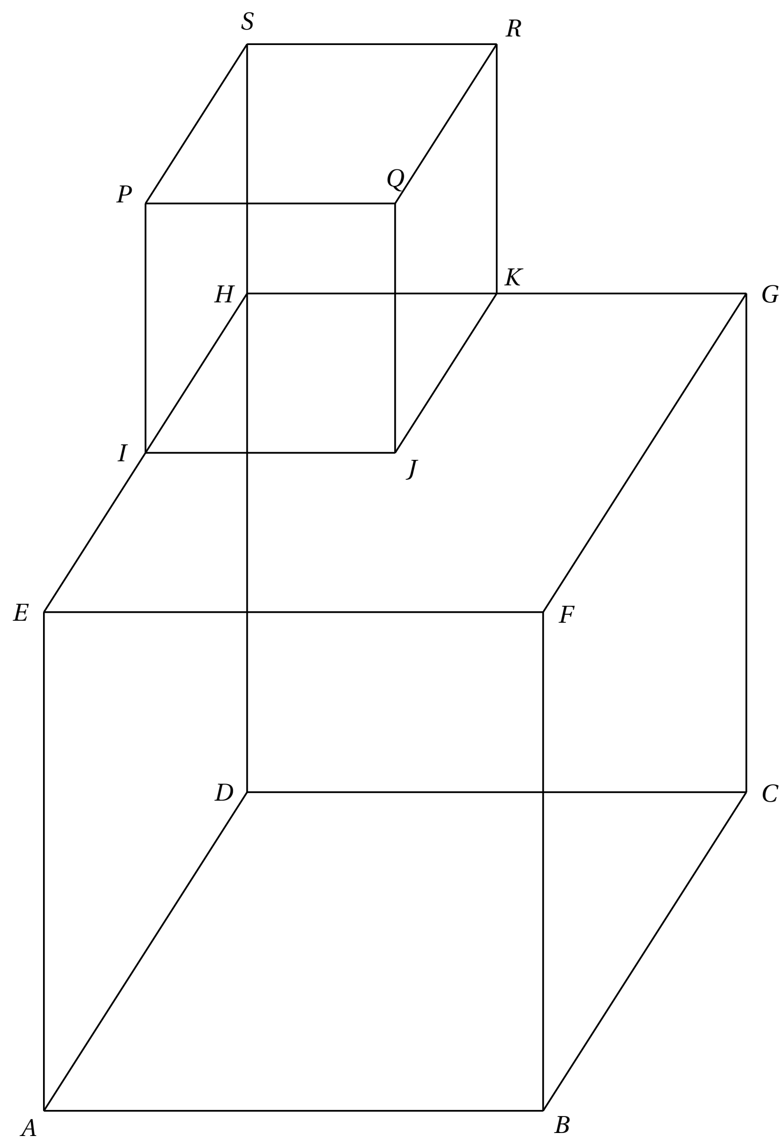
1. Quelle est la probabilité que la boule choisie provienne de l'urne A ?
   Quelle est la probabilité que la boule choisie provienne de l'urne B ?
2. Justifier que la probabilité que la boule porte un nombre premier, sachant qu'elle provient de l'urne A est $0,3$.
   Quelle est la probabilité que la boule porte un nombre premier, sachant qu'elle provient de l'urne B ?
3. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule portant un nombre premier en jouant à ce jeu est $p(R) = \frac{7}{30}$. Pour répondre à cette question, on pourra s'aider d'un arbre de probabilités.
4. Léo joue une partie et obtient une boule portant un nombre premier. Quelle est la probabilité que cette boule provienne de l'urne A ?

**EXERCICE 4** **5 points**

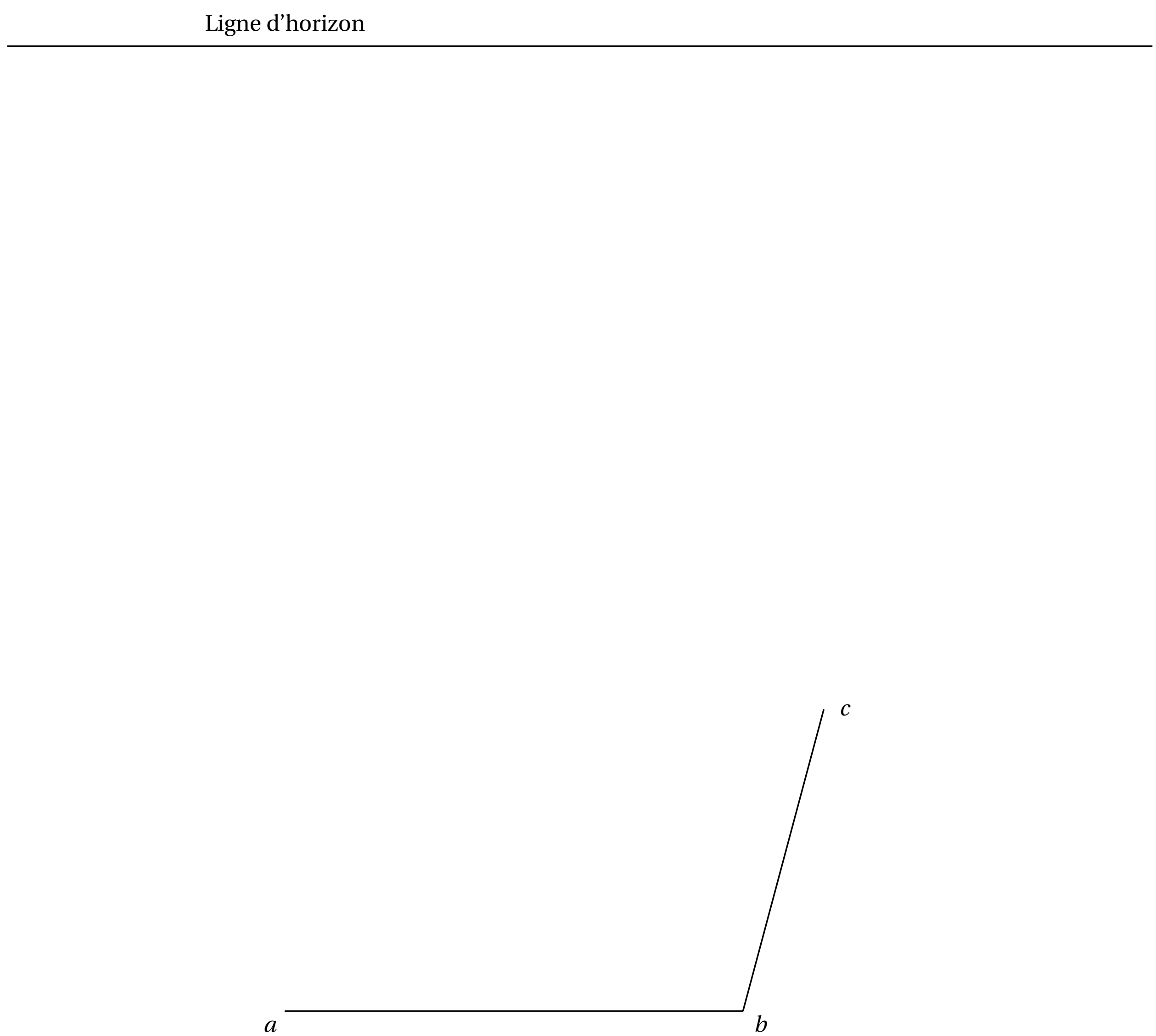
La feuille annexe 1 présente le dessin en perspective parallèle d'un cube ABCDEFGH d'arête $\ell$, sur lequel est posé un deuxième cube IJKHPQRS d'arête $\frac{\ell}{2}$.
Le but de cet exercice est de représenter ces cubes en perspective centrale sur l'annexe 2, sachant que la face **ABFE** est dans un plan **frontal**.
Dans tout l'exercice, on notera $a$, $b$, $c$, $\cdots$ les images des points A, B, C $\cdots$ dans cette perspective centrale.
On veillera à laisser apparentes toutes les traces de construction.
Le barème tiendra compte du soin et de la précision apportés à la construction.

1. **a.** Contruire $abfe$.
   **b.** Énoncer une propriété de la perspective centrale qui a permis de construire $abfe$.
2. Construire le point de fuite principal $w$.
3. terminer la construction de $abcdefgh$.
4. Indiquer, sans justifier, ce que représente le point $J$ pour la face EFGH. En déduire la construction de $j$.
5. Terminer la construction de $ijkhpqrs$.

# Annexe 1 de l'exercice 4



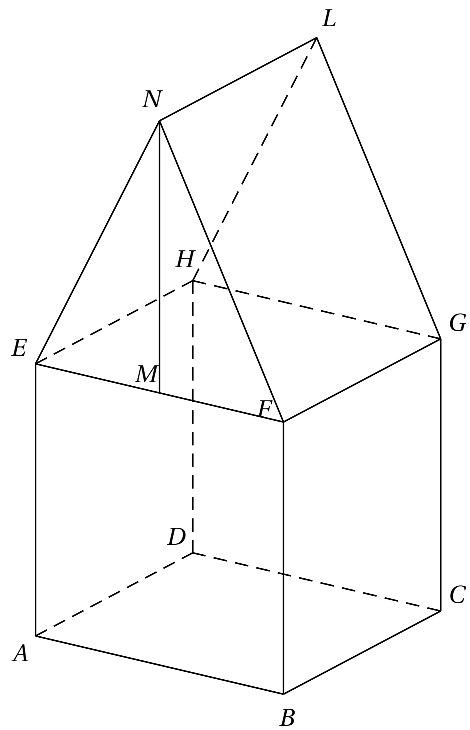
# Annexe 2 de l'exercice 4
# (à rendre avec la copie)



# Baccalauréat TL-Enseignement de spécialité
# Métropole juin 2007

**EXERCICE 1** **6 points**

Le dessin ci-dessous représente une maison en perspective parallèle.




$ABCDEFGH$ est un pavé droit dont les faces $ABCD$ et $EFGH$ sont horizontales et constituent respectivement le sol et le plafond de la maison. L'arête $[AE]$ est donc verticale.
Les deux faces $ABCD$ et $EFGH$ sont des carrés.
$EFGHNL$ est un prisme droit ; la base $EFN$ de ce prisme droit est un triangle isocèle en $N$ dont la hauteur $[NM]$ est telle que $NM = AE$.
Dans cet exercice, on convient de noter un point de l'espace avec une lettre majuscule et de noter son image **dans une perspective centrale** avec une lettre minuscule (ainsi a est l'image de $A$, b l'image de $B$).
***Les représentations données en annexe* 1 *et* 2 *sont à compléter et à rendre avec la copie.***
***Aucune justification des constructions n'est attendue mais on laissera visibles les traits de construction.***

1. Une représentation en perspective centrale de cette maison est commencée **sur l'annexe 1**. Sont tracés la ligne d'horizon et le point de fuite principal w. Le mur $ABFE$ est supposé dans un plan frontal.
   - **a.** À l'aide de la représentation des diagonales des carrés $ABCD$ et $EFGH$, construire sur le dessin de **l'annexe 1** les points de distance $d_1$ et $d_2$ de cette représentation en perspective centrale.
   - **b.** Compléter **sur l'annexe 1** la représentation de la maison dans cette perspective centrale.

**c.** Placer l'image `i` du milieu $I$ de $[AE]$ ainsi que l'image `j` du milieu $J$ de $[CG]$. Par quel point la droite (`ij`) doit-elle passer ?

**2.** Une autre représentation en perspective centrale de la maison est commencée sur **l'annexe 2**. Les points `w` et `w'` sont les points de fuite respectifs des droites $(AB)$ et $(BC)$. Achever **sur l'annexe 2** la représentation de la maison dans cette nouvelle perspective centrale.

**3.** Citer deux propriétés de la perspective parallèle qui ne sont pas vérifiées par une perspective centrale. Les illustrer en faisant référence à la représentation donnée en début d'exercice et à celles complétées dans les annexes 1 et 2.

**EXERCICE 2** **9 points**

On considère la suite $(u_n)$ géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3.

**1. a.** Déterminer les termes $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$.

**b.** Donner l'écriture en base 7 de $u_2$.

**c.** Montrer que l'écriture en base 7 de $u_3$ est $\overline{105}^7$.

**d.** Pour obtenir l'écriture en base 7 de $u_4$, un élève a effectué la multiplication ci-dessous. Dire s'il a ou non raison et expliquer pourquoi.

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 0 & 5 \\ \times & & & 3 \\ \hline & 3 & 1 & 5 \end{array}$$

**2. a.** Montrer que $u_5 = 486$.

**b.** On considère l'agorithme suivant :

| | | |
|---|---|---|
| Entrée | : | $a$ un entier naturel. |
| Initialisation | : | $L$ liste vide<br>Affecter la valeur $a$ à $x$. |
| Traitement | : | Tant que $x > 0$ ;<br>Effectuer la division euclidienne de $x$ par 7 ;<br>Affecter son reste à $r$ et son quotient à $q$ ;<br>Mettre la valeur de $r$ au début de la liste $L$ ;<br>Affecter $q$ à $x$. |
| Sortie | : | Afficher les élements de la liste $L$. |

Faire fonctionner cet algorithme pour $a = 486$. On reproduira sur la copie un tableau analogue à celui donné ci-dessous et on le complétera :

| | $r$ | $q$ | $L$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|
| Initialisation | | | vide | 486 |
| Fin étape 1 | | | | |
| Fin étape 2 | | | | |
| … | | | | |
| … | | | | |
| … | | | | |
| | | | | |

Expliquer le lien entre les éléments de la liste $L$ et l'écriture de $u_5$ en base 7.

3. On a divisé le terme $u_{10}$ de la suite $(u_n)$ par un certain entier. On obtient le quotient $Q$ dont l'écriture décimale est $Q = 14{,}727\,272\,727\,272\,72\ldots$ écriture dans laquelle les chiffres 7 et 2 se répètent à l'infini.

   On note $(v_n)$ la suite géométrique de premier terme $0,72$ et de raison $0,01$.

   **a.** Calculer $v_0 + v_1 + v_2$.

   **b.** On pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ où $n$ est un entier naturel non nul. Calculer $S_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

   **c.** En déduire une écriture de 0,727 272... où les chiffres 7 et 2 se répètent à l'infini sous la forme du quotient de deux entiers.

   **d.** Quel est le nombre par lequel on a divisé $u_{10}$ ?

**EXERCICE 3** **5 points**

Dans chacune des questions suivantes, plusieurs choix sont proposés et **un seul choix est correct**.
**Pour chacune de ces questions, on indiquera sur la copie le choix retenu**. Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse enlève 0,25 point.
Une absence de réponse est notée 0.
Si, à la fin de l'exercice, le total des points obtenus est négatif, la note sera ramenée à 0.

1. On considère l'égalité : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x)$.
   Cette égalité est vérifiée :

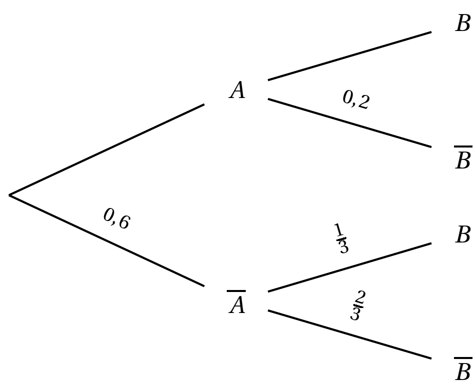
   **a.** pour une seule valeur du nombre réel $x$.

   **b.** pour n'importe quelle valeur du nombre réel $x$.

   **c.** pour deux valeurs du nombre réel $x$.

   **d.** pour aucune valeur du nombre réel $x$.

2. On considère l'arbre de probabilité incomplet suivant :




   Alors $p(A \cap B)$ la probabilité de l'évènement $A \cap B$ est égale à :

   **a.** $0,8$.

   **b.** $0,32$.

   **c.** $0,12$.

   **d.** $0,4$.

3. La fonction $g$ est définie pour tout nombre réel $x$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{2x}$. La fonction dérivée $g'$ de la fonction $g$ est telle que, pour tout nombre réel $x$ :

   **a.** $g'(x) = \mathrm{e}^{2x} + x \times \mathrm{e}^{2x}$.

   **b.** $g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{2x} + x \times 2 \times \mathrm{e}^{2x}$.

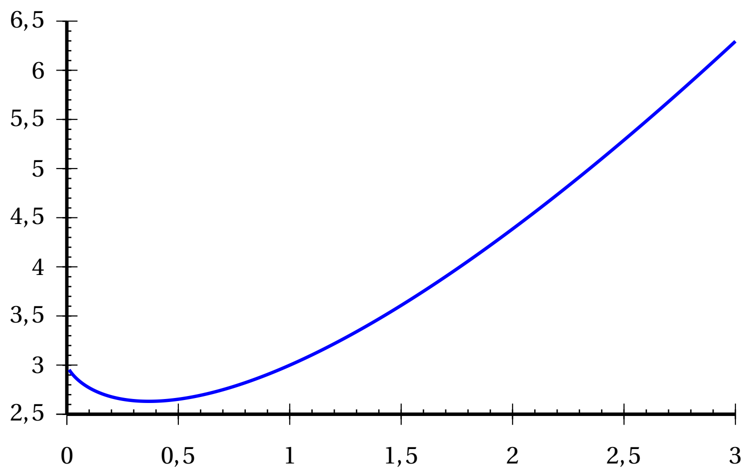
**c.** $g'(x) = 1 \times e^{2x}$.

**d.** $g'(x) = 1 \times e^{2x} - x \times 2 \times e^{2x}$.

**4.** La fonction $f$ est définie, pour tout nombre réel strictement positif $x$ par :

$$f(x) = x\ln(x) + 3.$$

On donne ci-dessous une représentation graphique de la fonction $f$ obtenue grâce à un tableur.




La fonction $f$ présente un minimum en :

**a.** $2,7$.

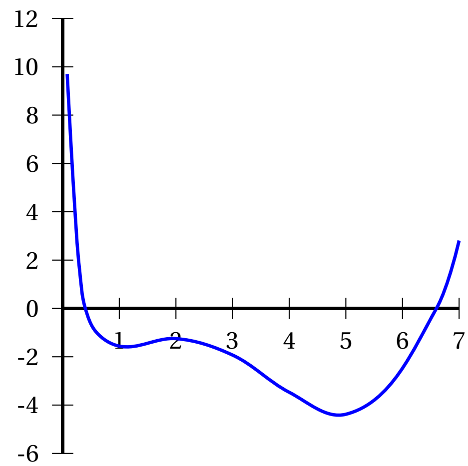
**b.** $\frac{1}{e}$.

**c.** $0,37$.

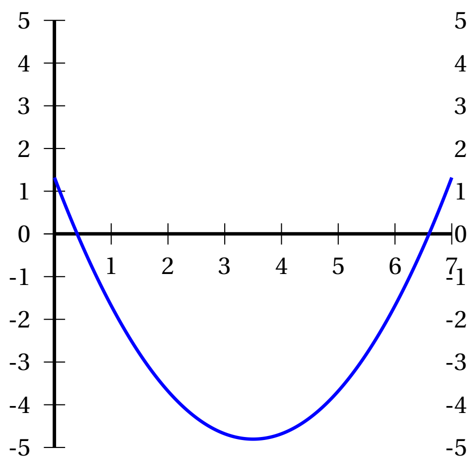
**d.** e.

**5.** La courbe ci-contre représente graphiquement une fonction $f$.

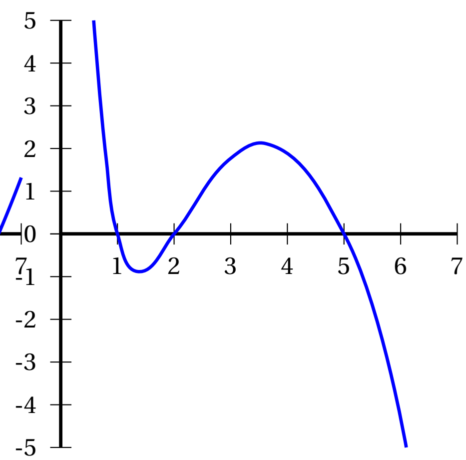
On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.



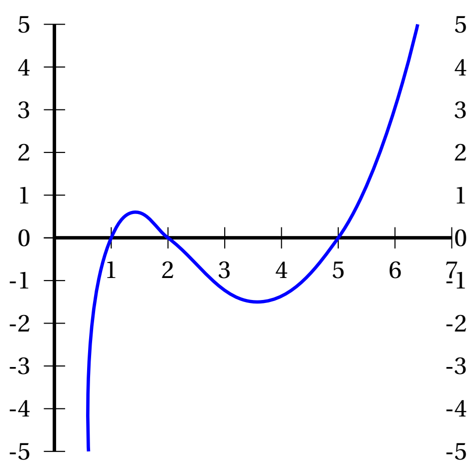
La courbe représentant la fonction $f'$ se trouve parmi l'une des quatre courbes données ci-dessous. Laquelle ?



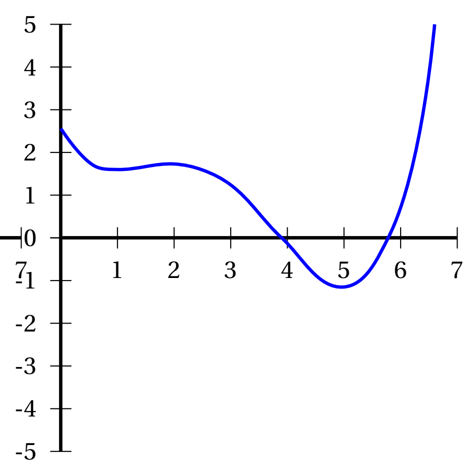
Courbe a)



Courbe b)

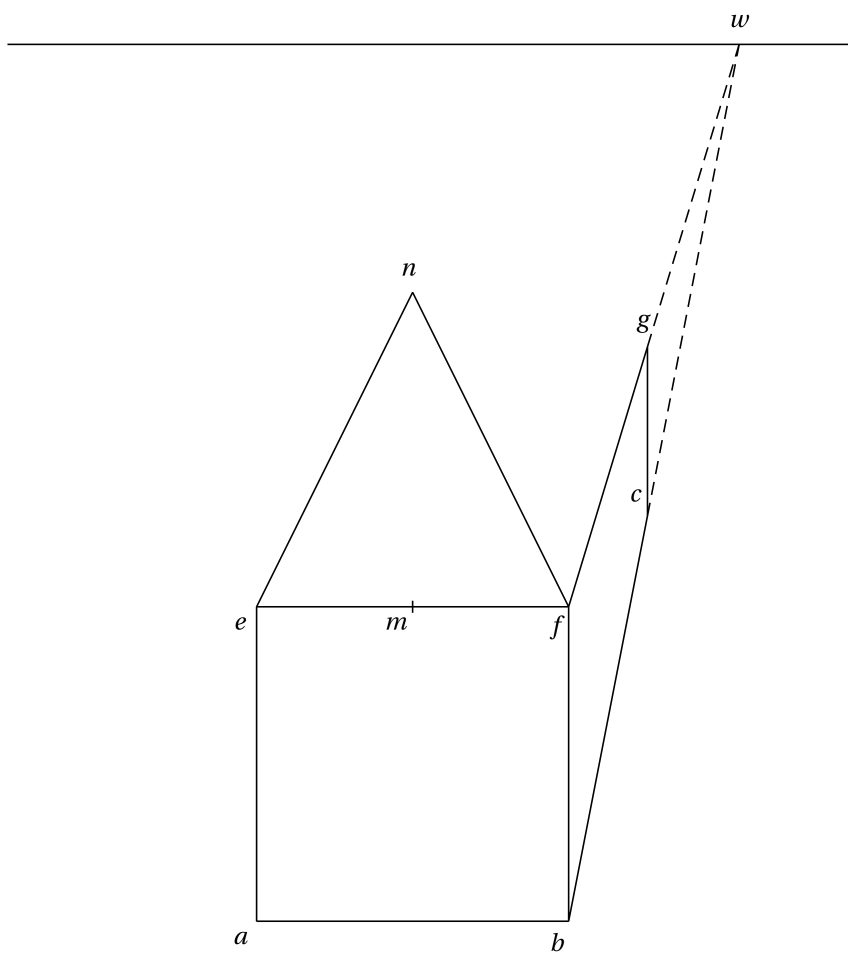


Courbe c)

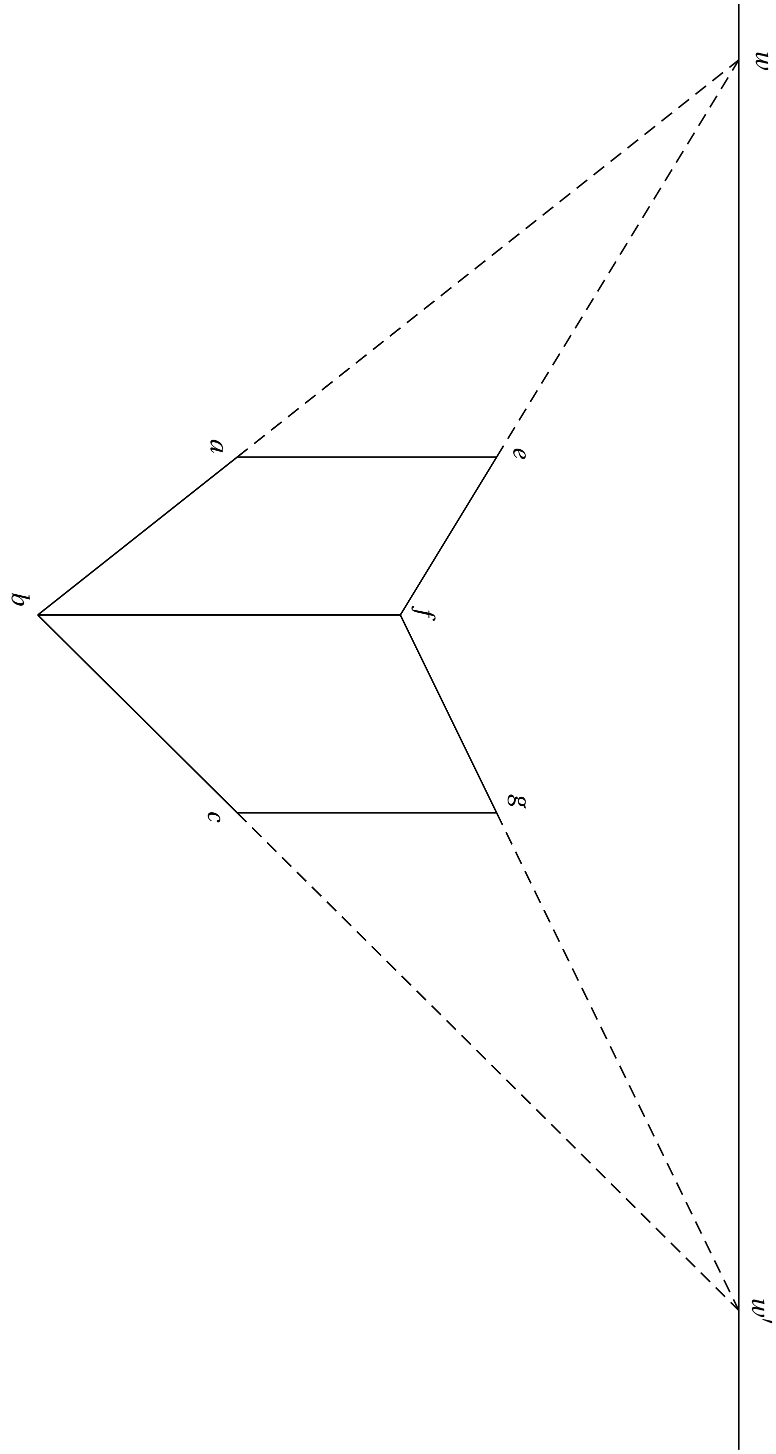


Courbe d)

**ANNEXE 1 (exercice 1) Dessin à rendre avec la copie**



# ANNEXE 2 (exercice 1) Dessin à rendre avec la copie



# ∽ Baccalauréat TL-Enseignement de spécialité ∾ La Réunion juin 2007

**EXERCICE 1** **6 points**

Les élèves d'une école de musique sont répartis en trois catégories :

— ceux inscrits à un cours d'instruments à cordes,
— ceux inscrits à un cours d'instruments à vent,
— ceux inscrits au cours de batterie.

Chaque élève est inscrit à un seul cours.
60 % des élèves sont inscrits à un cours d'instruments à cordes et 10 % au cours de batterie.
70 % des élèves inscrits à un cours d'instruments à cordes sont des filles et 60 % des élèves inscrits à un cours d'instruments à vent sont des garçons.
On interroge au hasard un élève (garçon ou fille) de cette école.
On note C, V, B, F, G les évènenements suivants :

— C : « l'élève interrogé est inscrit à un cours d'instruments à cordes »
— V : « l'élève interrogé est inscrit à un cours d'instruments à vent »
— B : « l'élève interrogé est inscrit au cours de batterie »
— F : « l'élève interrogé est une fille »
— G : « l'élève interrogé est un garçon »

**On pourra utiliser un arbre de probabilités pour décrire la situation**

1. Donner, à l'aide de l'énoncé :
   a. les probabilités $P(B)$ et $P(C)$ des évènements B et C,
   b. la probabilité $P_C(F)$ que l'élève interrogé soit une fille sachant qu'il est inscrit à un cours d'instruments à cordes,
   c. la probabilité $P_V(G)$ que l'élève soit un garçon sachant qu'il est inscrit à un cours d'instruments à vent,
2. Calculer la probabilité $P(C \cap F)$ d'interroger une fille inscrite à un cours d'instruments à cordes.
3. Calculer la probabilité d'interroger une fille inscrite à un cours d'instruments à vent.
4. On sait que 56 % des élèves de cette école sont des filles.
   a. Montrer que la probabilité d'interroger une fille inscrite au cours de batterie est 0,02.
   b. Calculer la probabilité d'interroger un élève inscrit au cours de batterie sachant que c'est une fille (*on donnera le résultat en pourcentage*).

**EXERCICE 2** **4 points**

Un nombre entier naturel N s'écrit $\overline{cabc}$ dans le système de numération à base cinq où $a$, $b$, $c$ sont non nuls, c'est-à-dire :

$$\text{N} = c \times 5^3 + a \times 5^2 + b \times 5 + c$$
$$\text{où } a, b, c \text{ sont des entiers tels que } 0 < a < 5, \quad 0 < b < 5, \quad 0 < c < 5$$

Ce même nombre N s'écrit $\overline{aba}$ dans le système de numération à base huit.

1. Montrer que $\text{N} = 65a + 8b$ et en déduire que $40a = 126c - 3b$.
2. a. Justifier que $40a \equiv 0$ (modulo 3). En déduire la valeur de $a$.
   b. Montrer que $b \equiv 0$ (modulo 2). Déterminer les valeurs de $b$ et $c$.
   c. Donner l'écriture de l'entier N dans les bases cinq, huit et dix.

**EXERCICE 3** **5 points**

Dans cet exercice, pour chacune des questions, une et une seule des réponses proposées est exacte.
Aucune justification n'est demandée, il est seulement demandée de rappeler le numéro de la question et la réponse choisie *a*, *b* ou *c*.
Chaque bonne réponse rapporte 1 point et chaque mauvaise réponse enlève 0,5 point.
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
En cas de total négatif pour l'ensemble de l'exercice, la note attribuée est 0.

| Question | Énoncé | Réponses proposées | | |
|---|---|---|---|---|
| | | *a* | *b* | *c* |
| 1 | Le nombre $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$ est égal à : | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-3$ |
| 2 | Le nombre $-4$ est solution de l'équation : | $e^{\ln x} = -4$ | $\ln x = -\ln 4$ | $\ln\left(e^x\right) = -4$ |
| 3 | L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(1-x) > 0$ est l'intervalle | $]-\infty\,;1[$ | $]-\infty\,;0[$ | $]0\,;+\infty[$ |
| 4 | Dans un repère orthogonal du plan, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x\ln x$. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $A(1\,;0)$ est : | 1 | $-3$ | 0 |
| 5 | La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{e^x}$ admet pour dérivée la fonction $f'$ définie sur $\mathbb{R}$ par : | $f'(x) = \frac{1}{e^x}$ | $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ | $f'(x) = \frac{1+x}{e^x}$ |

**EXERCICE 4** **5 points**

Le service commercial d'un journal a constaté que chaque année, il enregistre 1 000 nouveaux abonnés mais 50 % des anciens abonnés environ ne renouvellent pas leur abonnement.
L'objet de cet exercice est d'étudier l'évolution du nombre d'abonnés si cette situation perdure sachant qu'au cours de l'année écoulée, le journal comptait 4 000 abonnés.
Dans ce but, on considère la suite $(U_n)$ définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,5u_n + 1$$

1. Expliquer pourquoi, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n$ est une approximation du nombre de milliers d'abonnés au bout de $n$ années.
2. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | | | | | | |

3. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\quad u_n > 2$$

4. Soit $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 2$.
   **a.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,5.
   Préciser la valeur de $v_0$.
   **b.** En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.
5. **a.** En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer que :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\quad u_n = 2(1 + 0,5^n)$$

   **b.** Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ ?
   **c.** Donner une interprétation de cette limite.

# Baccalauréat TL Polynésie juin 2007

**EXERCICE 1** **5 points**

Pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, on considère le nombre entier $11^n + 5^n - 7$.

1. **a.** Quel est le reste de 11 dans la division euclidienne par 10 ?

   **b.** Démontrer que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $\quad 11^n \equiv 1 \pmod{10}$.

2. Démontrer que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $\quad 5^n \equiv \pmod{10}$.

   (On pourra utiliser un raisonnement par récurrence ou s'appuyer sur des propriétés de divisibilité).

3. Quel est le chiffre des unités du nombre $11^{2007} + 5^{2007} - 7$ ? Justifier la réponse donnée.

**EXERCICE 2** **5 points**

Dans un jeu, on dispose d'une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches, ainsi qu'un dé bien équilibré.
Une partie consiste pour un joueur à prélever au hasard une boule dans l'urne, puis :

— si la boule tirée est blanche, il lance le dé et gagne si le numéro obtenu est inférieur ou égal à 4,

— si la boule tirée est noire, il lance le dé et gagne si le numéro obtenu est pair.

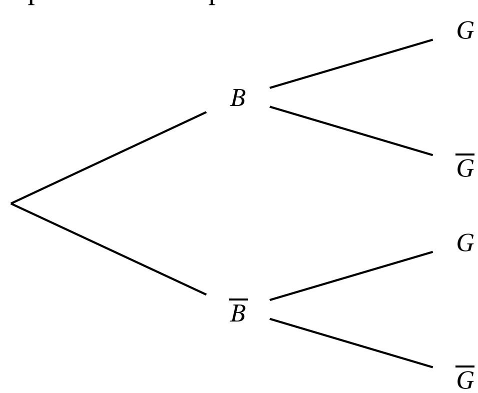
On considère les évènements suivants :

$B$ : « le joueur tire une boule blanche ».

$G$ : « le joueur gagne la partie ».

On note $\overline{B}$ et $\overline{G}$ les évènements contraires de $B$ et $G$.

1. Calculer la probabilité que le joueur tire une boule blanche.
2. Calculer la probabilité que le joueur gagne la partie sachant qu'il a tiré une boule blanche.
3. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.

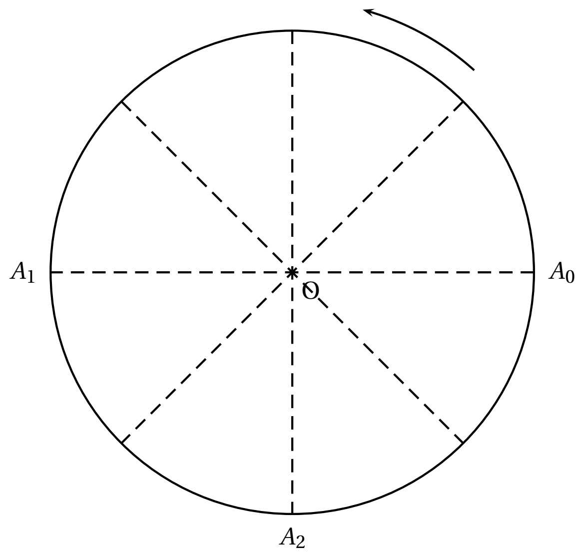



4. Montrer que la probabilité que le joueur gagne la partie est égale à $\dfrac{19}{30}$.
5. Le joueur gagne la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche ?

**EXERCICE 3** **5 points**

Un robot miniature se déplace sur un cercle de centre $O$ et de rayon 1 mètre. Il est déposé au point $A_0$ puis il parcourt le cercle en tournant dans le sens direct (sens de la flèche sur la figure).
Il est décidé que son trajet s'effectuera en plusieurs étapes (voir figure).

— **Étape 1** : il parcourt le demi-cercle de $A_0$ à $A_1$, la distance parcourue est notée $d_1$.
— **Étape 2** : il parcourt le quart de cercle de $A_1$ à $A_2$, la distance parcourue est notée $d_2$.
— **Étape $n$, avec** $n \geqslant 2$ : il parcourt l'arc de cercle allant de $A_{n-1}$ à $A_n$, la distance parcourue, notée $d_n$, étant la moitié de celle parcourue à l'étape précédente.




On rappelle que :

- Le périmètre d'une cercle de rayon 1 mètre est égal à $2\pi$ mètres.
- $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, pour tout nombre réel $q \neq 1$.

**1.** **a.** Exprimer $d_1$ et $d_2$ en fonction de $\pi$.

**b.** Reproduire la figure, puis placer le point $A_3$. Justifier que $(d_3 = \frac{\pi}{4}$.

**2.** **a.** Quelle est la nature de la suite $(d_n)$ ? Justifier la réponse donnée.

**b.** Montrer que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $\quad d_n = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

**3.** On s'intéresse à la distance totale, notée $D_n$, parcourue par le robot sur le cercle à la fin de l'étape $n$.

**a.** Calculer $D_2$.

**b.** Démontrer que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $\quad D_n = 2\pi\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.

**c.** Déterminer la limite de la suite $(D_n)$.

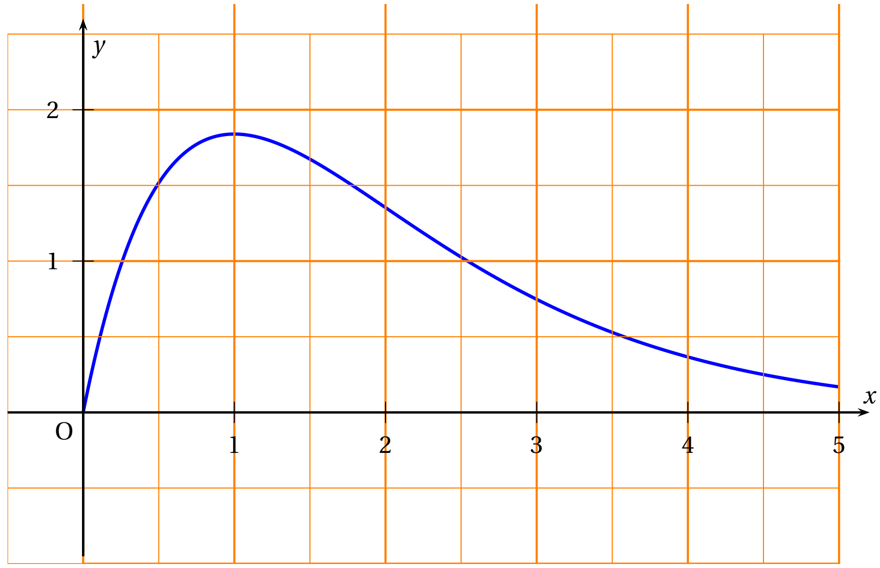
**d.** Justifier que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $\quad D_n < 2\pi$.
Que peut-on en déduire pour le déplacement du robot sur le cercle ?

## EXERCICE 4 — 5 points

Suivant la prescription de son médecin, Pascal s'administre un médicament, lequel passe progressivement dans le sang comme il est aussi progressivement éliminé. Une documentation technique propose la fonction $f$ définie sur $[0\,;\,5]$ par

$$f(t) = 5t\mathrm{e}^{-t}$$

pour décrire la concentration, en mg/L, en fonction du temps écoulé $t$, en heures, valable pour les 5 heures après la prise.
Par ailleurs il est bien indiqué, pour prendre le volant de sa voiture, d'attendre que cette concentration soit inférieure à 0,25 mg/L.
Une courbe représentative de la fonction $f$ est donnée ci-dessous.




**1.** Étude de la fonction $f$ sur $[0\,;\,5]$.

**a.** Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$. Vérifier que $f'(t) = 5(1-t)\mathrm{e}^{-t}$.

**b.** Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;\,5]$.

**c.** Dresser le tableau de variation de la fonction $f$.

**2.** Utilisation de la fonction $f$.

**a.** Au bout de combien de temps la concentration du médicament est-elle la plus élevée ?

**b.** Il ne faut pas conduire tant que la concentration est supérieure ou égale à $0,25$ mg/L.

Par lecture graphique, déterminer, avec la précision permise par le graphique, au bout de combien de temps après la prise de médicament Pascal pourra reprendre le volant.

Note informative
La documentation sur le médicament, administré de façon non intraveineuse, précise que les échanges concernés par le passage dans le sang comme par l'élimination se font esseniellement dans un seul sens, suivant des lois qui mettent en jeu des constantes de temps voisines ; les coefficients sont bien sûr adaptés à la morphologie de Pascal.

# ∾ Baccalauréat L spécialité Antilles–Guyane ∾ septembre 2007

L'usage d'une calculatrice est autorisé 3 heures

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

**EXERCICE 1** **6 points**

**Partie A**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = 55\mathrm{e}^{0,5x}.$$

1. Donner les valeurs approchées arrondies à l'unité des nombres $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.
2. **a.** Déterminer la fonction dérivée de la fonction $f$.
   **b.** En déduire le tableau de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,10]$, l'équation $f(x) = 3\,000$. On donnera les arrondis à l'unité des solutions éventuelles.

**Partie B**

Une étude statistique permet de considérer la fonction $f$ de la partie A comme un modèle satisfaisant pour décrire l'évolution, de 2000 à 2010, de la puissance totale des éoliennes installées en France. Plus précisément, on suppose que pour l'année $(2000 + x)$ où $x$ est un entier naturel, la puissance totale des éoliennes installées en France, exprimée en mégawatts, est donnée par $f(x)$.
En utilisant ce modèle et en exploitant les résultats de la partie A, répondre aux questions suivantes en donnant les justifications nécessaires.

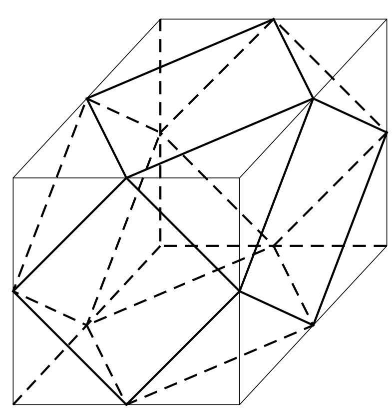
1. Quelle était la puissance totale des éoliennes en 2001 ?
2. En quelle année la puissance totale des éoliennes devrait-elle dépasser 3 000 mégawatts ?
3. Pourra-t-on atteindre une puissance totale de 10 000 mégawatts en 2010 ?
4. Pour tout entier naturel $n$, on pose : $u_n = 55\mathrm{e}^{0,5n}$.
   **a.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{0,5}$.
   **b.** Dans le modèle étudié la puissance totale des éoliennes augmente donc chaque année d'un même pourcentage. Donner ce pourcentage en arrondissant le taux au dixième.

**EXERCICE 2** **8 points**

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes.

**Partie A**

Sur chacune des faces d'un cube ABCDEFGH, figure un motif carré formé par les milieux des côtés des faces.

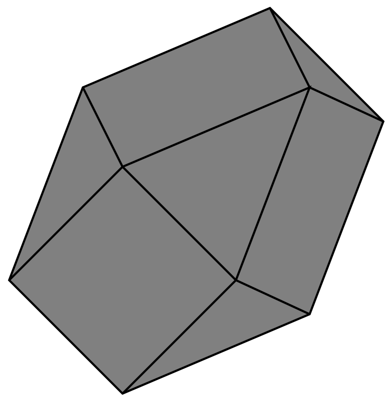


On donne en annexe la représentation en perspective centrale du cube ABCDEFGH, dont la face ABFE est située dans un plan frontal. Le carré inscrit dans la face ABFE y est représenté.
Les images des points A, B, C ... sont notées en lettres minuscules a, b, e. La droite (p) est la ligne d'horizon.

*Les constructions demandées seront réalisées sur la feuille annexe* 1, *à rendre avec la copie.*
*On laissera apparents les traits de construction utiles.*

1. **a.** Construire le point de fuite principal r.
   **b.** Construire les deux points de distance s et t.
2. **a.** Construire l'image i du milieu I du segment [CG].
   **b.** Construire l'image j du milieu J du segment [BC].
   **c.** Proposer une vérification de la construction du point j.
   **d.** Terminer le dessin des carrés figurant sur les deux faces apparentes du cube.

**PARTIE B**



Dans un jeu de société, on utilise un dé qui est un solide obtenu en sectionnant un cube, à partir du schéma de la partie A.
Ce dé possède six faces carrées, numérotées de 1 à 6, et huit faces triangulaires, numérotées de 1 à 8.
Le premier joueur lance le dé et il ne peut entamer la partie que si le dé tombe sur une face portant le numéro 6.
On considère que, lorsqu'on lance ce dé, la probabilité qu'il tombe sur une face carrée est $\frac{4}{5}$ et la probabilité qu'il tombe sur une face triangulaire est $\frac{1}{5}$.
De plus, on suppose que tous les numéros des faces carrées ont la même probabilité d'apparition et que tous les numéros des faces triangulaires ont la même probabilité d'apparition. On note C l'évènement « le dé tombe sur une face carrée » et T l'évènement « le dé tombe sur une face triangulaire ». On a donc les probabilités suivantes : $p(\mathrm{C}) = \frac{4}{5}$ et $p(\mathrm{T}) = \frac{1}{5}$.
On note S l'évènement « le dé tombe sur une face portant le numéro 6 » et $\overline{\mathrm{S}}$ l'évènement contraire de S.
Tous les résultats demandés dans cette partie seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. Compléter l'arbre pondéré figurant sur la feuille annexe 2, à rendre avec la copie.
2. **a.** Déterminer la probabilité $p(\mathrm{S} \cap \mathrm{C})$ de l'évènement $\mathrm{S} \cap \mathrm{C}$.
   **b.** Déterminer la probabilité $p(\mathrm{S})$ de l'évènement S.
3. Sachant que le premier joueur a obtenu un 6, quelle est la probabilité que le dé soit tombé sur une face carrée ?
4. Soit H l'évènement « le dé tombe sur une face portant le numéro 8 », calculer la probabilité de H.

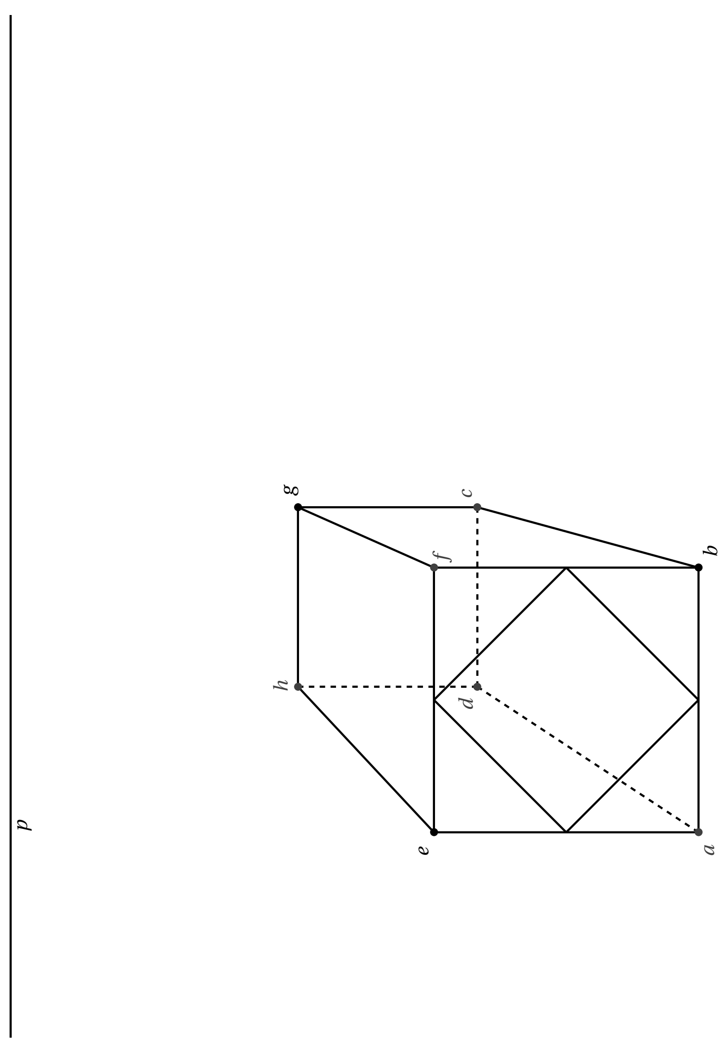
**EXERCICE 3** **6 points**

Pour tout entier naturel $n$, on pose : $A(n) = n^2 - n + 2007$.
Le but de l'exercice est d'étudier la divisibilité des entiers $A(n)$ par 2 et par 3.

*Cet exercice est composé de deux questions indépendantes*

1. **a.** Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre $A(1)$ égal à 2 007.
   **b.** Soit $n$ un entier naturel. Démontrer que : « Si $n$ est divisible par 3, alors $A(n)$ est divisible par 3 ».
   **c.** La réciproque de cette dernière affirmation est-elle vraie ? Justifier.
2. **a.** Vérifier que, quel que soit l'entier naturel $n$, on a :
   $$(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = (n^2 - n + 2007) + 2n.$$
   **b.** On considère un entier naturel $n$ quelconque. Démontrer que : « Si $A(n)$ est impair, alors $A(n+1)$ est impair ».
   **c.** L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
   « Il existe au moins un entier naturel $n$ tel que $A(n)$ soit divisible par 2 ».

**Annexe 1 : à rendre avec la copie**



# ∽ Baccalauréat L spécialité Métropole ∾ septembre 2007

L'usage d'une calculatrice est autorisé 3 heures

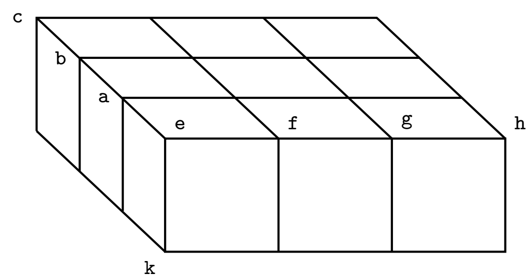
Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

**EXERCICE 1** **5 points**

*Dans tout l'exercice on utilisera une lettre majuscule pour noter un point de l'espace et une lettre minuscule pour noter une représentation plane de ce point. Par exemple : `a` représente le point A.*

**Les dessins donnés dans les annexes 1 et 1 bis sont à compléter et à rendre avec la copie. Aucune justification n'est attendue dans les constructions mais on laissera apparents les traits de construction.**

Le dessin ci-dessous est une représentation en perspective centrale de neuf cubes ayant tous les mêmes dimensions. Les points `e, a, b, c, f, g, h` et `k` représentent les sommets E, A, B, C, F, G, H et K.




Ces neuf cubes sont sur un plan horizontal. Dans cette représentation le plan de projection est tel que le plan KEH est un plan frontal.

1. Dans le dessin N° 1 donné en annexe 1 , les points `e, a, f` et `k` représentent les points E, A, F et K dans une perspective parallèle.
   Compléter ce dessin N° 1 par la représentation en perspective parallèle des neuf cubes.
2. Dans le dessin N°2 donné en annexe 1, les points `e, a, f` et `k` représentent les points E, A, F et K dans une perspective centrale.
   La droite $\delta$ est la ligne d'horizon, `w` le point de fuite de la droite (EA) et `w′` le point de fuite de la droite (EF). On sait de plus que (EK) et (AF) sont situées dans des plans frontaux.
   Compléter ce dessin N°2 par la représentation en perspective centrale des neuf cubes.
3. Dans le dessin N°3 donné en annexe 1 bis , les points `e, a, f` et `k` sont des représentations des points E, A, F et K.
   Sur ce dessin sont représentés une droite $\delta$ et deux points `v` et `v′` de cette droite.
   Les points `b` et `c` sont construits sur le segment [`ev`] de sorte que les distances `ea`, `ab` et `bc` soient les premiers termes de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 0,6.
   Les points `f, g` et `h` placés sur le segment [`ev′`] sont tels que `ef` = `ea`, `eg` = `eb` et `eh` = `ec`.

   **a.** Calculer `ab` et `bc`.
   **b.** Compléter le dessin N°3 par le tracé des droites (`vf`), (`vg`), (`vh`), (`v′a`), (`v′b`), (`v′c`).
   En partant d'observations graphiques, montrer que le quadrillage obtenu ne représente pas, en perspective centrale, la face supérieure des neuf cubes.

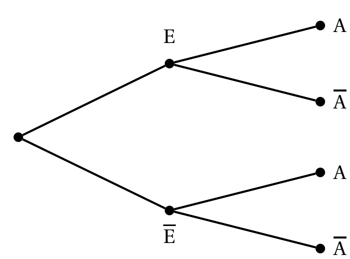
**EXERCICE 2** **3 points**

**Dans ce QCM, il s'agit de recopier sur la copie chacune des trois affirmations proposées en la complétant par la réponse choisie.**
**Un seul choix est correct. Aucune justification n'est demandée.**

*Une réponse juste vaut un point, une réponse fausse enlève un quart de point, l'absence de réponse est notée* 0. *Si le total des points obtenus sur cet exercice est négatif ou nul, la note zéro est attribuée à l'exercice.*

L'arbre suivant représente les données d'un exercice de probabilité. La probabilité d'un évènement H est notée $P(\text{H})$.

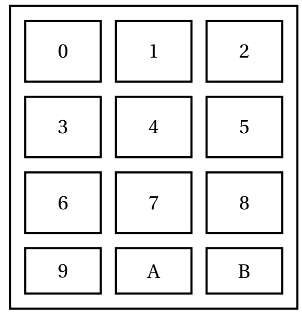
On sait que $P(\text{E}) = 0,3$ ; $P_{\text{E}}(\text{A}) = 0,1$ et $P(\overline{\text{E}} \cap A) = 0,14$.



1. La probabilité de $E \cap A$ est égale à :
   **a.** 0,4 **b.** 0,03 **c.** 0,33 **d.** 0,1.
2. La probabilité de A sachant $\overline{E}$ est égaie à :
   **a.** 0,7 **b.** 0,14 **c.** 0,2 **d.** 1,1.
3. La probabilité de A est égale à :
   **a.** 0,42 **b.** 0,3 **c.** 0,042 **d.** 0,17.

**EXERCICE 3** **6 points**

Une entreprise de recyclage récupère un lot de digicodes ayant tous un clavier identique à celui représenté ci-contre.
Chacun de ces digicodes a été programmé pour fonctionner avec **un code** constitué de deux signes choisis parmi les douze figurant sur ce clavier.
Par exemple A0, BB, 43 sont des codes possibles.
Pour remettre en état de fonctionnement un tel digicode, il faut retrouver **son code**.




Pour faciliter une telle recherche, a été inscrit sur le boîtier de chaque digicode un nombre R qui dépend du code. Ce nombre a été obtenu de la manière suivante :

- Le code est considéré comme un nombre écrit en base 12. A est le chiffre dix et B le chiffre 11.
- Le nombre R inscrit sur le boîtier est le reste de la division euclidienne du code, converti en base 10, par 53. R est donc un nombre écrit en base 10 et tel que $0 \leqslant R \leqslant 53$.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. On suppose que le code d'un digicode est AB.
   **a.** Écrire en base 10 le nombre dont l'écriture en base 12 est $(AB)_{\text{douze}}$.
   **b.** Déterminer le nombre R inscrit sur le boîtier de ce digicode.
3. Sur le boîtier d'un digicode est inscrit le nombre R égal à 25. Démontrer que $(21)_{\text{douze}}$ peut être le code de ce digicode.
4. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Entrée : | R un entier naturel. |
| Initialisation : | L liste vide ;<br>$n = 0$. |
| Traitement : | Tant que $53n + R \leqslant 143$, mettre dans la liste L la valeur de $53n+$ R puis ajouter 1 à $n$. |
| Sortie : | Afficher la liste L. |

   **a.** Faire fonctionner cet algorithme pour R = 25.
   **b.** On suppose que le nombre R inscrit sur le boîtier d'un digicode est R 25. Quels sont les trois codes possibles de ce digicode ?
5. Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Si l'affirmation est considérée comme étant fausse, en apporter la preuve.
   Affirmation : quelle que soit la valeur de R l'algorithme permet de trouver trois codes parmi lesquels se trouve le code secret.

**EXERCICE 4** **6 points**

Des pucerons envahissent une roseraie. Des coccinelles, prédateurs des pucerons, sont introduites dans cette roseraie. Au bout de vingt jours, on constate que le nombre des pucerons peut être estimé à 770, soit 0,77 milliers.
On s'intéresse à l'évolution du nombre des pucerons (exprimé en milliers) présents dans la roseraie en fonction de la durée écoulée depuis l'introduction des coccinelles. On note $f$ cette fonction et $t$ cette durée. L'unité de durée est un jour. Lorsque l'on introduit les coccinelles, on a donc $t = 0$.

1. Des études ont montré que le nombre des pucerons (exprimé en milliers) en fonction de la durée $t$ écoulée depuis l'introduction des coccinelles, était modélisé par la fonction $f$ définie, pour tout nombre réel $t$ élément de $[0\,;20]$, par :

$$f(t) = (2t+2)\mathrm{e}^{-kt}, \text{ où } k \text{ est un nombre réel positif constant.}$$

**a.** Quel est le nombre de pucerons au moment où les coccinelles sont introduites dans cette roseraie ?

**b.** Déterminer la valeur exacte de $k$ puis l'une de ses valeurs approchées au millième près.

**Dans toute la suite de l'exercice,** on considère que la fonction $f$ définie pour tout nombre réel $t$ élément de $[0\,;\,20]$ par $f(t) = (2t + 2\mathrm{e}^{-0,2t}$, représente correctement l'évolution du nombre des pucerons en fonction de la durée $t$. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ et $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal.

**2.** **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel $t$ de $[0\,;\,20]$,
$f'(t) = (-0,4t + 1,6)\mathrm{e}^{-0,2t}$.

**b.** Combien de jours après, l'introduction des prédateurs le nombre des pucerons va-t-il commencer à diminuer ?

**c.** Calculer $f'(0)$. Utiliser ce nombre dérivé pour calculer, sans utiliser de calculatrice, une approximation du nombre des pucerons présents dans la roseraie au bout d'un jour.

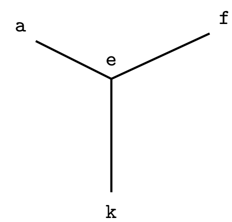
**3.** Le graphique donné en annexe 2 est un dessin de $(\mathscr{C}_f)$. **Ce graphique est à compléter et à rendre avec la copie.**

**a.** à l'aide des informations données ou obtenues précédemment, placer les unités du repère.

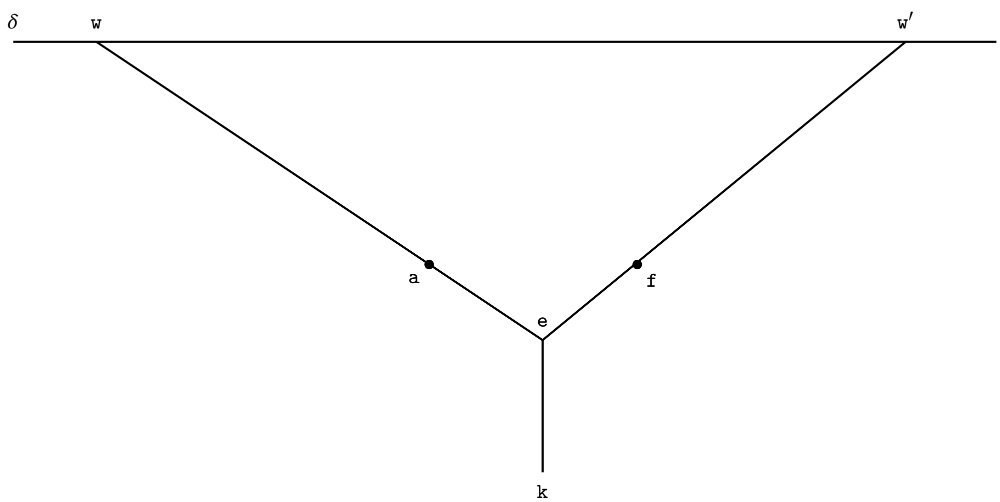
**b.** On estime que les pucerons ne posent plus de problème dès que leur nombre est devenu inférieur à 1 000. Lire graphiquement au bout de combien de jours ce seuil sera atteint.
**Laisser apparents les trails de construction utilisés pour cette lecture.**

**ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)**

Dessin N° 1 exercice 1

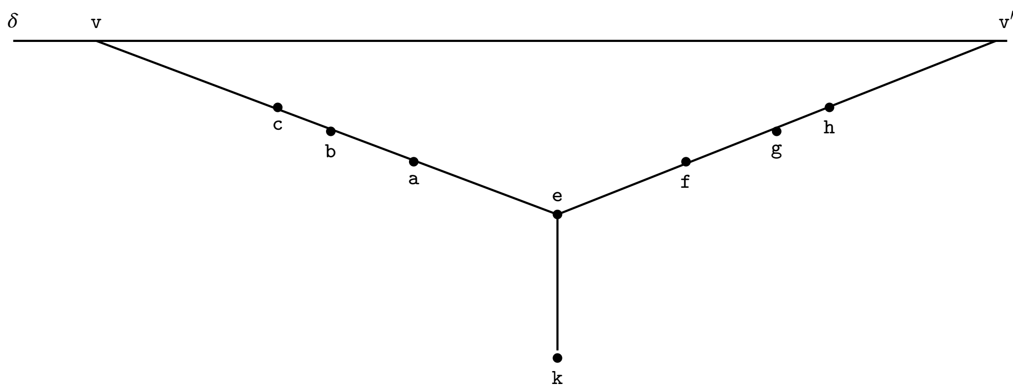



Dessin N° 2 exercice 1



**ANNEXE 1 bis (à rendre avec la copie)**

Dessin N° 3 exercice 1




**ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)**

**Courbe de l'exercice 4**