Baccalauréat S 1998
L'intégrale d'avril à décembre 1998

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Tapuscrit : Denis Vergès

∽ Baccalauréat C Pondichéry avril 1998 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires.
On extrait simultanément deux boules de cette urne ; on considère que tous les tirages sont équiprobables.
   a. Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges ?
   b. Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires ?
   c. Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de même couleur ?
   d. Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?
2. On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires.
On tire maintenant deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2 ; on suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On considère les évènements suivants :
R : « Les trois boules tirées sont rouges »
D : « Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur »
B : la boule tirée dans l'urne U_2 est rouge ».
   a. Calculer la probabilité de l'évènement R.
   b. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?
   c. Calculer la probabilité conditionnelle $p_{\text{D}}(\text{B})$ de l'évènement B sachant que l'évènement D est réalisé.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

On considère le polynôme $\text{P}(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$, où z est un nombre complexe.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :
$$\text{P}(z) = \left(z^2 + az + b\right)\left(z^2 + 4z + 20\right).$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\text{P}(z) = 0$.
3. Placer dans un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m = -2 + 4\text{i}$, $n = -2 - 4\text{i}$, $p = 2 + 3\text{i}$ et $q = 2 - 3\text{i}$.
4. **a.** Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\dfrac{z - p}{z - m} = \text{i}$. Placer son image K.
   b. En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.
4. **a.** Déterminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.
   b. Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.
   c. Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 4 cm, on note A le point d'affixe 1, B le point d'affixe i, (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et (D) la droite d'équation $y = 1$.

À tout point M du plan, d'affixe z distincte de i, on associe le point M' d'affixe z', telle que

$$z' = \frac{z - \text{i}}{\overline{z} + \text{i}}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z, avec z distinct de i, tels que $z' = 1$.
2. **a.** Montrer que, pour tout z distinct de i, $z'\overline{z}' = 1$.
   Interpréter géométriquement ce résultat.

   b. Montrer que, pour tout point M n'appartenant pas à la droite (D), $\dfrac{z'-1}{z-\text{i}}$ est un imaginaire pur.
   En déduire que les droites (AM') et (BM) sont perpendiculaires.

   c. Déduire des questions 2. a. et b. une construction du point M' lorsque M est un point non situé sur la droite (D).
   Préciser la position du point M' lorsque M appartient à la droite (D) privée du point B.
3. **a.** Soit P un point du cercle (C), distinct du point A.
   En utilisant la question 2. b., représenter l'ensemble E des points M tels que $M' = \text{P}$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

   c. En utilisant ce qui précède, et sans aucun calcul, représenter l'ensemble F des points M dont les affixes z sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $\left(\dfrac{z-\text{i}}{\overline{z}+\text{i}}\right)^3 = 1$.

Problème **11 points**

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\text{e}^x - 1}{x\text{e}^x + 1}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; unité graphique : 4 cm.

Partie A

⋆ Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x + 2 - \text{e}^x.$$

1. Étudier le sens de variation de g sur $[0~;~+\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0~;~+\infty[$.
   On note α cette solution.

   a. Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$.
2. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

⋆ Étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathscr{C}$

1. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à $[0~;~+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\text{e}^x g(x)}{(x\text{e}^x + 1)^2}.$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

2. a. Montrer que pour tout réel positif x,

$$f(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x + \mathrm{e}^{-x}}$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3. a. Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.

b. En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

5. a. Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

$$f(x) - x = \frac{(x+1)\,u(x)}{x\mathrm{e}^{x} + 1} \quad \text{avec } u(x) = \mathrm{e}^{x} - x\mathrm{e}^{x} - 1.$$

b. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.

c. Déduire des questions précédentes la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (T).

6. Tracer $\mathscr{C}$ et (T).

Partie C

⋆ **Calcul d'aire et étude d'une suite**

1. Déterminer une primitive F de f sur $[0 ; +\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie dans la question **B. 2.**

2. On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la tangente (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Calculer, en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$.

Donner une valeur décimale au mm^2 prés de l'aire $\mathscr{A}$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a. Calculer v_0, v_1 et v_2.

On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} prés de v_0, v_1 et v_2.

b. Interpréter graphiquement v_n.

c. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(n)$$

En déduire la monotonie de la suite (v_n) à partir de $n = 1$.

d. Déterminer la limite de la suite (v_n).

∽ Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1998 ∾

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Afin de créer une loterie, on met dans une urne n billets différents (n supérieur ou égal à 3), dont deux et deux seulement sont gagnants.

1. Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billes dans l'urne.

a. On suppose ici $n = 10$. X désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3. Calculer la probabilité notée p_n, d'avoir exactement un billet gagnant parmi des deux choisis.

2. Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne en remettant le premier bilet tiré avant de tirer le second.

a. On suppose ici $n = 10$. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis. Déterminer la loi de probabilité de Y.

b. On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3. Calculer la probabilité, notée q_n d avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

3. a. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a :

$$p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}.$$

b. En remarquant que pour tout entier n, $n-2$ est inférieur à $n-1$, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, on ait $p_n - q_n < 10^{-3}$.

c. Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billets de cette loterie, est-il préférable de les tirer simultanément ou de les tirer l'un aprés l'autre en remettant le premier billet tiré ?

Exercice 2 5 points
Enseignement obligatoire

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, (unité graphique : 4 cm), on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et $\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Pour chaque point M du plan, d'affixe z, M_1 d'affixe z_1, désigne l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, puis M' d'affixe z' l'image de M_1 par la translation de vecteur $-\vec{u}$.
Enfin, on note T la transformation qui à chaque point M associe le point M'.

1. a. Démontrer : $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z - 1$.

b. Déterminer l'image du point B.

c. Montrer que T admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.

2. On pose $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels.

a. Pour z non nul, calculer la partie réelle du quotient $\frac{z'}{z}$ en fonction de x et de y.

b. Démontrer que l'ensemble (E), des points M du plan tels que le triangle OMM' soit rectangle en 0, est un cercle (C), dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points. Tracer (E).

3. Dans cette question on pose $z = 1 + \mathrm{i}$.

a. Vérifier que M appartient à (E). Placer M et M' sur la figure.

b. Calculer le module de z'.

c. Calculer l'aire, en cm^2, du triangle $\text{O}MM'$.

Exercice 2 5 points
Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on donne un carré ABCD de sens direct tel que AB = 1 (sur la figure, on prendra 9 cm comme unité graphique) et les points A_1 et B_1 définis par : $\overrightarrow{\text{AA}_1} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{BB}_1} = \dfrac{2}{9}\overrightarrow{\text{BC}}$.

On rapporte le plan au repère orthonormal direct $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}}\right)$.
On désigne par S la similitude plane directe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M_1 d'affixe z_1 définie par :

$$z_1 = \frac{6+2\text{i}}{9}z + \frac{1}{3}.$$

1. Calculer l'affixe du centre Ω de la similitude S. On ne demande pas de calculer le rapport ni l'angle θ de la similitude.
2. **a.** Déterminer les images des points A et B par la similitude S.
   b. Calculer l'affixe du point D_1 image de D par S.
   c. Montrer que le point D_1 appartient au segment $[\text{DA}_1]$.
   d. Placer D_1 puis C_1 image de C par S.
3. **a.** Démontrer que : $\left(\overrightarrow{\text{DA}},\,\overrightarrow{\text{DA}_1}\right) = \left(\overrightarrow{\text{A}_1\text{B}},\,\overrightarrow{\text{A}_1\text{B}_1}\right) = \theta \quad (\text{modulo } 2\pi)$.
   b. En déduire une construction géométrique de Ω.

Problème 10 points

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1+n\ln x}{x^2}.$$

Partie A
I. Étude des fonctions f_n

1. Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n-2-2n\ln x$.
2. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Étudier le signe de $f_n'(x)$.
3. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
4. Établir le tableau de variations de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

II. Représentation graphique de quelques fonctions f_n.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$, (unité graphique : 5 cm).
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

1. Tracer $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.
2. **a.** Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n?
   b. Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe $\mathscr{C}_4$ à partir de $\mathscr{C}_2$ et tracer $\mathscr{C}_3$. Tracer $\mathscr{C}_4$.

Partie B : Calculs d'aires

1. Calculer en intégrant par parties, l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$.
2. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes $\mathscr{C}_n$, $\mathscr{C}_{n+1}$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
3. On note $\mathscr{A}_n$ l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}_n$, et les droites d'équation $y = 0$, $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
   a. Calculer $\mathscr{A}_2$.
   b. Déterminer la nature de la suite $\mathscr{A}_n$ en précisant l'interprétation graphique de la raison.

Partie C : Étude sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ de l'équation $f_n(x) = 1$

Dans toute la suite, on prendra $n \geqslant 3$.

1. **a.** Vérifier que pour tout n, $\mathrm{e}^{\frac{n-2}{2n}} > 1$ et $f_n\left(\mathrm{e}^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$.
   b. Vérifier que l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1\ ;\ \mathrm{e}^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{n-2}{2n}}\ ;\ +\infty\right[$ exactement une solution notée α_n.
3. On se propose de déterminer la limite de la suite α_n.
   a. Calculer $f\left(\sqrt{n}\right)$ et montrer que pour tout $n > \mathrm{e}^2$, on a $f_n\left(\sqrt{n}\right) \geqslant 1$.
   b. En déduire que, pour $n \geqslant 8$, on a $\alpha_n \geqslant \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite (α_n).

∽ Baccalauréat C Antilles–Guyane juin 1998 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Un jeu de dominos est fabriqué avec les sept couleurs : *violet, indigo, bleu, vert, jaune, orange, rouge*. Un domino se compose de deux cases portant chacune l'une des sept couleurs. Chaque couleur peut figurer deux fois sur le même domino : c'est un double.

1. Montrer que le jeu comporte 28 dominos différents. Les 28 dominos, indiscernables au toucher, sont mis dans un sac.

2. On tire simultanément trois dominos du sac.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux doubles parmi ces trois dominos ?

3. Dans cette question, on tire un seul domino. Calculer la probabilité des évènements suivants :

a. J_2 : « Le jaune figure deux fois »

b. J_1 : « Le jaune figure une seule fois »

c. J : « Le jaune figure au moins une fois »

4. On effectue n tirages successifs d'un domino, en notant à chaque tirage la (ou les) couleur(s) obtenue(s) avant de remettre dans le sac le domino tiré et de procéder au tirage suivant ; les tirages sont indépendants.
Calculer, en fonction de n, la probabilité p_n, que J soit réalisé au moins une fois.
Calculer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$$

1. a. Calculer $P(\mathrm{i})$ et $P(-\mathrm{i})$.

b. Montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré, que l'on déterminera, tel que :

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{C},\ P(z) = \left(z^2+1\right)Q(z)$$

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. Placer dans ce repère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \mathrm{i}$,
$z_{\mathrm{B}} = -\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{C}} = -\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{D}} = -\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$.
Montrer que ces quatre points appartiennent au cercle de diamètre [CD].

2. Montrer qu'il existe une rotation de centre O qui transforme C en D. Calculer une valeur entiére approchée à un degré prés d'une mesure de l'angle de cette rotation.

3. Calculer, sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique, le rapport :

$$\frac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}}$$

Interpréter géométriquement le module et l'argument de ce rapport.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}\text{i}z + \frac{1-3\text{i}}{2}.$$

1. Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω,le rapport k et l'angle θ.

2. Soit M_0 le point d'affixe $1+4\sqrt{3}+3\text{i}$.
Pour tout entier naturel n, le point M_{n+1} est défini par $M_{n+1} = f\left(M_n\right)$.

a. En utilisant la première question, calculer ΩM_n en fonction de n.
Placer le point M_0 et construire les points M_1, M_2, M_3, M_4.

b. À partir de quel rang n_0 a-t-on : « Pour tout $n \geqslant n_0$, M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon $r = 0,05$ » ?

3. a. Calculer $\text{M}_0 M_1$.

b. Pour tout entier naturel n, on note $d_n = M_n M_{n+1}$.
Montrer que $\left(d_n\right)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c. On note $l_n = d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_n$. Calculer l_n en fonction de n et en déduire la limite de l_n en $+\infty$.

4. Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'isobarycentre des points $\text{M}_0,\ M_1,\ M_2, \ldots, M_n$.

a. Montrer que, pour tout $n > 0$, $\Omega G_n \leqslant \dfrac{16}{n+1}$.

b. En déduire la position limite du point G_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME **11 POINTS**

Partie A : étude de fonctions

On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = (x+1)\,\text{e}^{-x} \qquad f_2(x) = -x\text{e}^{-x} \qquad f_3(x) = (x-1)\,\text{e}^{-x}$$

On appelle C_1, C_2, C_3 leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. Les courbes C_2 et C_3 sont données sur le graphique ci-dessous.

1. Étude de la fonction f_1

a. Calculer la dérivée f_1' de f_1 et étudier son signe. En déduire les variations de f_1.

b. Déterminer les limites de f_1 en $+\infty$, en $-\infty$.

c. Dresser le tableau de variation de f_1.

2. Étude graphique.

a. Identifier sur la figure donnée les courbes C_2 et C_3 et placer sur le dessin le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

b. Étudier la position relative des courbes C_1 et C_3.

c. Tracer C_1 dans le même repère que C_2 et C_3 sur la figure fournie.

3. Étude d'équations différentielles.

a. Montrer que f_1 est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) \qquad y' + y = \text{e}^{-x}$$

b. Montrer que f_1 est aussi solution de l'équation différentielle :

$$(E_2) \quad y'' + 2y' + y = 0$$

c. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_2). En déduire que f_2 et f_3 sont aussi des solutions de (E_2).

d. Parmi les solutions de (E_2), quelles sont celles qui sont aussi solutions de (E_1) ?

Partie B : étude d'aires liées à C_1 et C_2

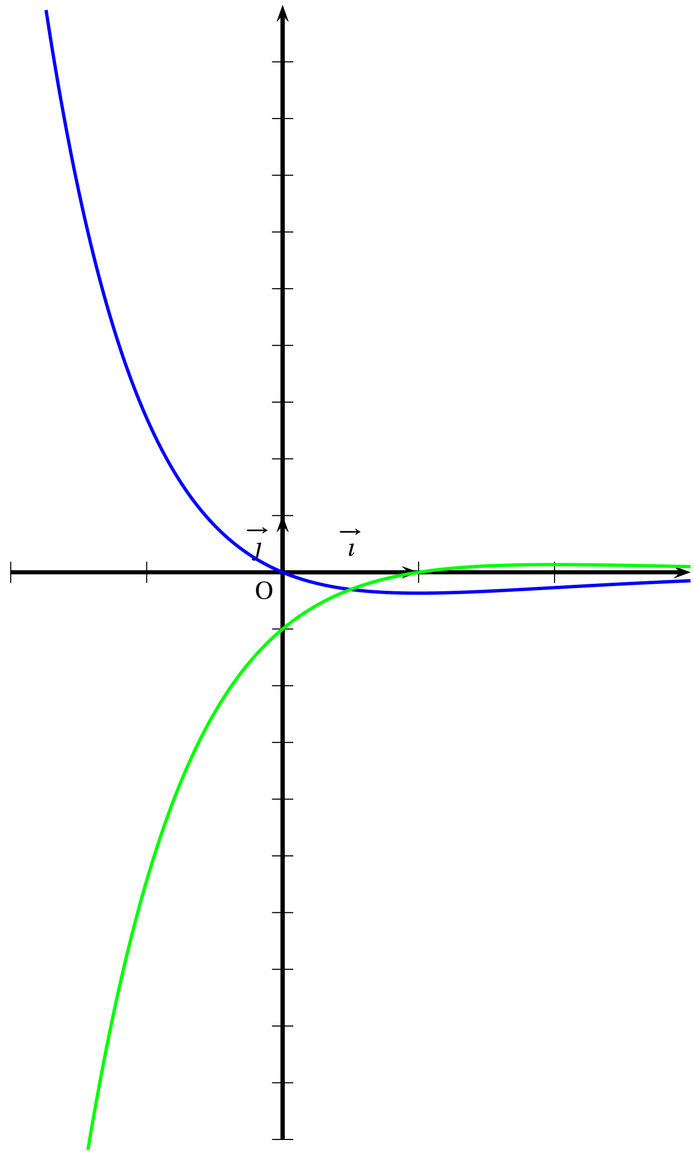
Pour n entier strictement positif, on appelle M_n le point de C_3 d'abscisse $n \ln 2$. On pose :

$$f(x) = f_1(x) - f_3(x)$$

pour tout x réel.

1. Calculer, en unités d'aire, l'aire U_n du domaine plan limité par la courbe C_3, la courbe C_1 et les segments $[M_n P_n]$ et $[M_{n+1} P_{n+1}]$ pour $n > 0$. P_n et P_{n+1} sont les projections orthogonales respectives de M_n et M_{n+1} sur $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\imath}\right)$.
2. Calculer, en unités d'aire, l'aire V_n du trapèze $P_n M_n M_{n+1} P_{n+1}$ pour $n > 0$. Montrer que le rapport $\dfrac{V_n}{U_n}$ est constant.

Annexe



Baccalauréat C Asie juin 1998

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe P est rapporté à un repère direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, ayant comme unité graphique 3 cm. Les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 que l'on va calculer dans cet exercice seront tous exprimés sous forme algébrique et sous forme exponentielle $\left(\rho \text{e}^{\text{i}\theta}\right)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0.$$

On pose $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+\text{i}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$. Exprimer z_1 et z_2 sous forme exponentielle et placer les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le plan P.

2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
Calculer l'affixe z_3 du point $\text{M}_3 = r(\text{M}_2)$. Placer M_3 sur la figure précédente.

3. Soit t la translation dont le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $-\dfrac{\sqrt{3}+\text{i}}{2}$.
Calculer l'affixe z_4 du point $\text{M}_4 = t(\text{M}_2)$.
Placer M_4 sur la figure.

4. Soient $z_5 = \dfrac{\text{i}}{2}(1+\text{i}\sqrt{3})$ et $z_6 = \dfrac{2}{\text{i}-\sqrt{3}}$.
Exprimer z_5 et z_6 sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
Placer les points M_5 et M_6 d'affixes respectives z_5 et z_6 sur la figure.

5. **a.** Calculer z_k^6 pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b. Écrire $z^6 + 1$ sous forme d'un produit de trois polynômes du second degré à coefficients réels. Justifier cette écriture.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers strictement positifs.
Pour tout entier n de $\mathbb{N}^\star$, on considère l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_1^{\text{e}} (\ln x)^n \,\text{d}x$.

1. **a.** Démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]1\,;\,\text{e}[$, et pour tout n entier naturel, on a :

$$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$$

b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

2. **a.** Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.

b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \text{e} - (n+1)I_n$.

c. En déduire I_2, I_3 et I_4. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à 10^{-3} prés par défaut.

3. **a.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geqslant 0$.

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leqslant \text{e}$.

c. En déduire la limite de I_n.

d. Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

EXERCICE 2 **4 POINTS**
Enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique étant 1 cm.

1. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x = f(t) & = & \dfrac{1}{2}\left(t^2+2\right) \\ y = g(t) & = & \dfrac{1}{2}\left(t^3+2t\right)\end{array}\right. \quad ,\ t \in \mathbb{R}$$

a. Montrer que $(\mathscr{C})$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
b. Étudier conjointement les variations des fonctions f et g sur $[0\,;+\infty[$.
c. Préciser la tangente au point de paramètre $t = 0$.
d. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

2. Soit $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation $y^2 = 4x$.
a. Tracer $(\mathscr{P})$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$.
b. Vérifier qu'une représentation paramétrique de $(\mathscr{P})$ est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t^2 \\ y(t) & = & 2t\end{array}\right. \quad ,\ t \in \mathbb{R}$$

c. Soit (D_t) la tangente à $(\mathscr{P})$ au point M_t de coordonnées $(x(t)\ ;\ y(t))$.
Soit (Δ_t) la perpendiculaire à (D_t) au point M_t. Montrer qu'une équation cartésienne de (Δ_t) est :

$$Y = -\ tX + t^3 + 2t.$$

d. Pour $t \in \mathbb{R}^\star$, (Δ_t) coupe l'axe des abscisses en un point A_t et l'axe des ordonnées en un point B_t. On appelle I_t le milieu du segment $[A_tB_t]$.
Exprimer en fonction de t les coordonnées du point I_t.

PROBLÈME **11 POINTS**

I

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout x associe :

$$g(x) = \text{e}^x(x-1) + x^2.$$

1. a. Montrer que la dérivée de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est

$$g'(x) = x(\text{e}^x + 2)$$

b. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
c. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$, et dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Montrer que α est dans l'intervalle $\text{I}=\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

II

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\text{e}^x}{\text{e}^x + x}$$

1. Montrer que les équations : $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes sur $[0\ ;\ +\infty[$, et que, par suite, l'équation $f(x) = x$ admet α pour solution unique sur I.

2. **a.** Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

d. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ dans un repère orthonormal (unité 2 cm). On indiquera en particulier les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1.

III

1. Montrer que, pour tout x appartenant à I, $f(x)$ appartient à I.

2. Soit la suite $(u_n)_{u\in\mathbb{N}}$ définie par $\left\{\begin{array}{l} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = f(u_{n-1}) \text{ pour tout } n > 1 \end{array}\right.$

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n \in I$.

b. Montrer que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

c. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :

$$\text{pour tout } n > 1,\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|.$$

d. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

e. En déduire que (u_n) converge vers α.

f. *A priori*, combien suffit-il de calculer de termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7} prés ?

3. En utilisant la décroissance de f, montrer que α est compris entre deux termes consécutifs quelconques de la suite. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-7}.

∽ Baccalauréat C Centres étrangers juin 1998 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Commun à tous les candidats

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On effectue n tirages successifs (n entier supérieur ou égal à 1) d'une boule en respectant la régle suivante :

- si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne;
- si elle est blanche, on ne la remet pas.

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie $n = 3$. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Si k est un entier compris entre 1 et 3, on note E_k l'évènement « seule la k-ième boule tirée est blanche ». Par exemple, E_1 est l'évènement « seule la premiére boule tirée est blanche ».

1. Montrer que la probabilité de l'évènement E_1 est $p(E_1) = \dfrac{5}{36}$.
2. Calculer les probabilités des évènements E_2 et E_3. En déduire la probabilité qu'on ait tiré une seule boule blanche à l'issue des trois tirages.
3. Sachant que l'on a tiré exactement une boule blanche, quelle est la probabilité que cette boule ait été tirée en dernier?

Partie B

On effectue maintenant n tirages.

1. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de tirer au moins une boule blanche en n tirages.
2. Quelles valeurs faut-il donner à n pour que $p_n > 0,99$?

Exercice 2 **4 points**)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. L'unité graphique est de 3 cm. On considère les points B, C, D, E définissant le carré de sens direct BCDE d'affixes respectives :

$$b = 1 - \mathrm{i} \quad ; \quad c = -1 - \mathrm{i} \quad ; \quad d = -1 - 3\mathrm{i} \quad ; \quad e = 1 - 3\mathrm{i}$$

1. Calculer $|b|$, $|c|$, $|d|$ et $|e|$.
2. Soit Γ le cercle de centre O passant par B. Déterminer une équation du cercle Γ. On considère Q un point de Γ distinct de B et C. L'affixe de Q est notée $q = x + \mathrm{i}y$ (avec x et y réels).
3. Soient F et G les points du plan tels que $Q\mathrm{B}FG$ soit un carré de sens direct, c'est-à-dire tels que $\left(\overrightarrow{\mathrm{QB}},\ \overrightarrow{QG}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$. On pose $Z = \dfrac{g - q}{b - q}$ où g est l'affixe du point G.

   Interpréter géométriquement le module et un argument de Z. En déduire Z.
4. Prouver que $g = (1 + x + y) + \mathrm{i}(1 - x + y)$. En déduire $|g|$ en fonction de x et y.
5. En utilisant la question 2), exprimer $|g|$ en fonction de x et y.
6. À l'aide de considérations géométriques, prouver que : $If| = |g|$, f étant l'affixe du point F.
7. Pour quelles valeurs de x et de y les points E, D, G et F sont-ils sur un cercle de centre O?

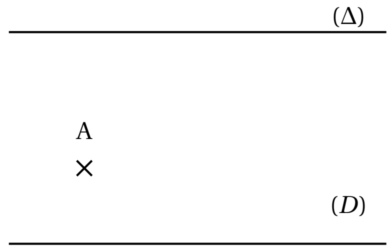
   Préciser le rayon de ce cercle. En déduire alors la nature du triangle QBC.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : *où on construit un triangle équilatéral.*

On considère la figure suivante où (Δ) et (D) sont deux droites paralléles et A un point situé entre les deux droites et n'appartenant à aucune d'entre elles.



On se propose de construire un triangle équilatéral ABC tel que B et C appartiennent respectivement aux droites (D) et (Δ).
Dans toute la suite, on note R la rotation de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{3}$.

1. On considère la droite (D') image de (D) par la rotation R. Montrer que (D') coupe (Δ). On note C le point d'intersection de (D') de (Δ).
2. Soit B $= R^{-1}$(C). Montrer que le triangle ABC répond au probléme posé.
3. Construire la droite $\left(D'\right)$ et placer les points B et C.

Partie B : où on calcule l'aire de ce triangle équilatétal. Soit O le projeté orthogonal de A sur la droite (D). Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D) et $\vec{v}$ est choisi de sorte que le point A ait pour affixe ai (a réel positif).
On note α la distance du point A à la droite (Δ). Soit B un point de (D) d'affixe z_{B}, (z_{B} est réel). On appelle z_{C} l'affixe du point C image de B par la rotation R.

1. Montrer que $z_{\text{C}} = \dfrac{1}{2}\left(z_{\text{B}} + a\sqrt{3}\right) + \dfrac{\text{i}}{2}\left(a + z_{\text{B}}\sqrt{3}\right)$.
2. En déduire que le point C appartient à la droite (Δ) si et seulement si
   $z_{\text{B}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(a + 2\alpha)$.
   Dans la suite, on prendra cette valeur pour z_{B}.
3. Exprimer AB^2 en fonction de a et de α.

   En déduire que l'aire du triangle équilatéral ABC est $S = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(a^2 + a\alpha + \alpha^2\right)$.

Problème **11 points**

Le but du probléme est l'étude d'une fonction g_k, où k est un réel fixe qui vérifie : $0 < k < \text{e}$.
Dans la partie A on met en évidence certaines propriétés d'une fonction f qui seront utilisées dans la partie B.

Partie A

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2 - x)\text{e}^x - k.$$

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f. Calculer $f(1)$

3. **a.** Établir que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, une notée α_k appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ et une autre notée β_k appartenant à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

   b. Montrer que $\mathrm{e}^{\alpha_k} - k\alpha_k = (\mathrm{e}^{\alpha_k} - k)(\alpha_k - 1)$.
   On démontrerait de même que β_k vérifie l'égalité
   $\mathrm{e}^{\beta_k} - k\beta_k = \left(\mathrm{e}^{\beta_k} - k\right)(\beta_k - 1)$.

4. Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1. Soit u la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \mathrm{e}^x - kx$.

   a. Étudier le sens de variation de u.

   b. On rappelle que $0 < k < \mathrm{e}$. Justifier la propriété suivante

   $$\text{pour tout réel } x,\ \mathrm{e}^x - kx > 0.$$

2. Soit g_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_k(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - k}{\mathrm{e}^x - kx}$. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction g_k dans le plan rappporté à un repère orthogonal.

   a. Déterminer la limite de g_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b. Prouver que : $g'_k(x) = \dfrac{kf(x)}{(\mathrm{e}^x - kx)^2}$.

   c. En déduire le tableau de variation de g_k. Calculer $g_k(1)$.

3. On nomme M_k et N_k les points de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisses respectives α_k et β_k.

   a. En utilisant la question 3)b) (partie **A**), montrer que $g_k(\alpha_k) = \dfrac{1}{\alpha_k - 1}$.

   b. Donner de même $g_k(\beta_k)$.

   c. Déduire de la question précédente que lorsque k varie les points M_k et N_k sont sur une courbe fixe H dont on donnera une équation.

4. Représentations graphiques pour des valeurs particuliéres de k :

   a. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

   b. Prouver que $\alpha_2 = 0$.

   c. En prenant comme unité 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées, construire les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et H sur le même graphique.
   On prendra $\alpha_1 = -1,1$; $\beta_1 = 1,8$; $\beta_2 = 1,6$.

∽ Baccalauréat C La Réunion juin 1998 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Commun à tous les candidats

Les réponses seront données sous forme de fractions.

Pour un examen, dix examinateurs ont préparé chacun 2 sujets. On dispose donc de vingt sujets que l'on place dans 20 enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : chacun choisit au hasard deux sujets; de plus, les sujets choisis par le premier candidat ne seront plus disponibles pour le deuxième.

On note A_1 l'évènement : « les deux sujets obtenus par le premier candidat proviennent du même examinateur » et A_2 l'évènement : « les deux sujets obtenus par le deuxième candidat proviennent du même examinateur ».

On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de l'évènement A.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement A_1 est égale à $\dfrac{1}{19}$.

2. **a.** Calculer directement la probabilité conditionnelle $p\left(A_2/A_1\right)$ de l'évènement A_2 sachant que A_1 est réalisé.

b. Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un même examinateur est égale à $\dfrac{1}{323}$.

3. **a.** Calculer la probabilité $p\left(A_2/\overline{A_1}\right)$.

b. En remarquant que $A_2 = \left(A_2 \cap A_1\right) \cup \left(A_2 \cap \overline{A_1}\right)$, calculer la probabilité $p\left(A_2\right)$ puis en déduire que $p\left(A_2 \cup A_1\right) = \dfrac{33}{323}$.

4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont choisi chacun deux sujets provenant d'un même examinateur. La variable aléatoire X prend donc les valeurs 0, 1 ou 2.

a. Déterminer la loi de la probabilité de la variable aléatoire X.

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Enseignement obligatoire

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on donne A, B et C de coordonnées respectives (2; 0; 1), (3 ; −2 ; 0) et (2 ; 8 ; −4).

Aucune figure n'est demandée.

1. Un point M étant de coordonnées $(x\,;\ y\,;\ z)$, exprimer en fonction de x, y et z les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{\text{A}M} \wedge \overrightarrow{\text{B}M}$.

2. Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcr} -x+y-2z &=& -4\\ -x-y-z &=& -11\\ 2x+y-z &=& 8 \end{array}\right.$$

On fera figurer les étapes de la résolution sur la copie.

3. Montrer qu'il existe un unique point N vérifiant $\overrightarrow{\text{A}N} \wedge \overrightarrow{\text{B}N} = \overrightarrow{\text{C}N}$ et donner les coordonnées du point N.

4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre s'obtient par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ représente l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

a. Le point N étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre ABCN est égal à $\dfrac{1}{6}\text{C}N^2$.

b. En utilisant les résultats du 1., et en prenant $M = \text{C}$, calculer l'aire du triangle ABC.

c. Utiliser les résultats précédents pour calculer la distance du point N au plan (ABC).

EXERCICE 2 **5 POINTS**
Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité : le cm), on trace le cercle (C) de diamètre [AO] où A est le point de coordonnées $(-6~;~0)$; on appelle Ω le centre de (C).
Si P est un point de (C), on note K le projeté orthogonal de P sur la droite (AO) et M le point défini par $\overrightarrow{\text{KM}} = \overrightarrow{\text{AP}}$.
Soit t une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega\text{O}}, \overrightarrow{\Omega\text{P}}\right)$.
On veut déterminer l'ensemble ($\mathscr{E}$) des points M de paramètre t obtenu lorsque P décrit (C).

1. Sur une figure qui sera complétée à la question 5, représenter (C), placer un point P et les points K et M correspondants.

2. **a.** Exprimer en fonction de t les coordonnées du point P puis celles du point M.

b. En déduire une représentation paramétrique de ($\mathscr{E}$).

c. Soit M$'$ le point de ($\mathscr{E}$) de paramètre $\pi - t$. Par quelle transformation peut-on obtenir le point M$'$ à partir du point M de paramètre t ?

3. Soit N le point ($\mathscr{E}$) de paramètre $t + \dfrac{\pi}{2}$. Montrer que le vecteur $\left(\overrightarrow{\text{ON}}\right)$ est un vecteur directeur de la tangente à ($\mathscr{E}$) au point M de paramètre t.

4. Dessin de ($\mathscr{E}$) :

a. Dresser le tableau des variations conjointes des coordonnées de M pour t appartenant à $\left[0~;~\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b. Construire les points M_1 M_2 et M_3 obtenus pour les valeurs de t suivantes : $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{3}$ et utiliser le résultat des questions 3 et 4 et pour construire trois autres points de ($\mathscr{E}$) ainsi que les tangentes à ($\mathscr{E}$) en M_1, M_2 et M_3.

c. Achever le dessin de ($\mathscr{E}$).

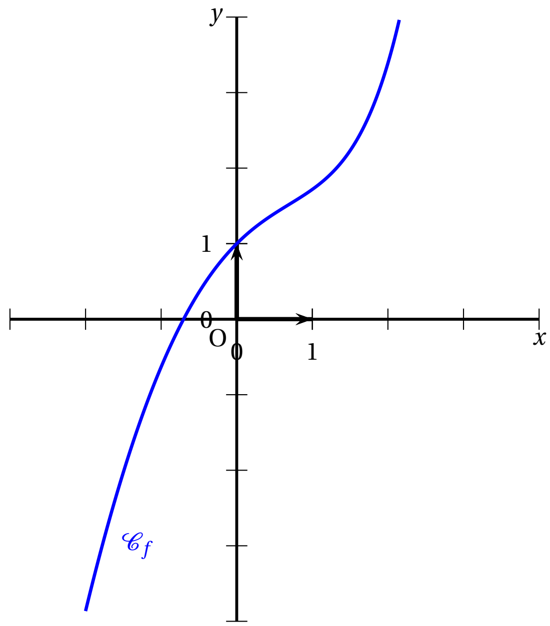
N. B. La question 5. a. a été transformée (elle demandait d'indiquer la nature de ($\mathscr{E}$) et de placer les sommets de ($\mathscr{E}$)) afin de tenir compte des modifications de programme. Par ailleurs, cet exercice peut être traité désormais dans le cadre de l'enseignement obligatoire.

PROBLÈME **11 POINTS**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^x - x^2$$

dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, est donnée sur le graphique ci-dessous à compléter et à rendre avec la copie.



On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - x$ et on note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans le même repère.

Partie A : Remarques préliminaires concernant la fonction *f*

1. Sans chercher à déterminer son équation, tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par O. On notera A son point de contact avec $\mathscr{C}_f$. Évaluer graphiquement le coefficient directeur de cette tangente en expliquant le procédé utilisé.
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. En déduire une interprétation graphique du nombre réel : $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - \dfrac{7}{3}$.

Partie B : Étude de la fonction *g*

1. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en 0 et justifier que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote.
2. **a.** Calculer la dérivée $g'(x)$ et montrer qu'elle est du signe de $(x-1)\mathrm{e}^x - x^2$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   b. Soit u la fonction qui à tout x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$ associe $u(x) = (x-1)\mathrm{e}^x - x^2$. Étudier le sens de variation de u sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

   c. Déterminer le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1[$.

   d. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique a sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
   En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

   e. En déduire le signe de $g'(x)$ et dresser la tableau de variation de g.

Partie C : Construction de $\mathscr{C}_g$

1. On se propose de construire le point $S(a~;~g(a))$ où a est le réel déterminé dans la question B. 2. d.

a. Montrer que, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = 0$ équivaut à $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ et que par conséquent $f'(a) = \dfrac{f(a)}{a}$.

b. En utilisant ce résultat, établir que a est l'abscisse du point A défini dans la première partie.

c. Justifier que l'ordonnée de S est $f'(a)$ et placer S sur le dessin.

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

3. Construire la courbe $\mathcal{C}_g$.

Partie D : Étude d'une primitive de g et calcul d'une intégrale

Soit G la primitive de g sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ qui s'annule pour $x = 1$ (on ne cherchera pas à calculer cette primitive).

1. Déterminer le sens de variation de G sur $[1\,;\,2]$.

2. Donner une interprétation géométrique du nombre $G(2)$. Dans la suite, on prendra 1,55 comme valeur approchée de $G(2)$ à 10^{-2} près.

3. On considère l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^2 G(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Justifier que l'intégrale I calculée dans la première partie peut s'écrire

$$I = \int_1^2 xg(x)\,\mathrm{d}x.$$

b. En utilisant une intégration par parties, établir que $I = 2G(2) - J$ et en déduire une valeur approchée de J, à 10^{-2} près.

Baccalauréat S Métropole juin 1998

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, A et B étant deux évènements, $P(A)$ désigne la probabilité de A; $P(B/A)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité :

i	0	1	2
$p_i = P(X = i)$	0,1	0,5	0,4

   a. Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Dans cette station-service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les évènements suivants :
   C_1 « en cinq minutes, un seul client se présente » ;
   C_2 « en cinq minutes, deux clients se présentent » ;
   E : « en cinq minutes, un seul client achète de l'essence ».

   a. Calculer $P(C_1 \cap E)$.

   b. Montrer que $P(E/C_2) = 0,42$ et calculer $P(C_2 \cap E)$.

   c. En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes; déterminer la loi de probabilité de Y.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(1) \quad \frac{z-2}{z-1} = z$$

   On donnera le module et un argument de chaque solution.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(2) \qquad \frac{z-2}{z-1} = \text{i}.$$

   On donnera la solution sous forme algébrique.

3. Soit M, A et B les points d'affixes respectives : z, 1 et 2. On suppose que M est distinct des points A et B.

   a. Interpréter géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z-2}{z-1}$.

   b. Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).

4. **a.** Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = \text{i},$$

   où n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\dfrac{3}{2}$.

b. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(3) \quad \left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = \mathrm{i}.$$

On cherchera les solutions sous forme algébrique.

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle ABCD tel que AB $= \sqrt{2}$, AD $=$ 1 ; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un angle droit direct ; I désigne le milieu de [AB].
A. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.

1. Vérifier que les points C et I appartiennent à $\mathscr{E}$.
2. **a.** Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$.
   b. En déduire que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.

B. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.
Soit S une similitude directe qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', telle que $z' = az + b$, a et b étant des nombres complexes, avec $a \neq 0$.

1. Déterminer les nombres a et b pour que S(D) = C et S(C) = B.
2. Soit T la similitude directe qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que
$$z' = -\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}.$$
Déterminer le rapport et l'angle de T.
3. Montrer que la similitude T transforme B en I.
4. En déduire une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI).
5. Montrer que le centre Ω de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI).

Problème **10 points**

Les tracés des courbes seront faits dans un plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).
On rappelle qu'une fonction f est majorée par une fonction g (ce qui signifie aussi que g est minorée par f) sur un intervalle I si et seulement si, pour tout x appartenant à I, $f(x) < g(x)$.

PARTIE A

Soit f et g les fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) \text{ et } g(x) = \frac{2x}{1+x}.$$

On notera $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f et Γ celle de g.
On se propose de démontrer que f est minorée par g sur $[0 ; +\infty[$.
Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Étudier le sens de variation de h sur $[0 ; +\infty[$; calculer $h(0)$.
(L'étude de la limite de h en $+\infty$ n'est pas demandée.)

2. En déduire que pour tout réel x positif ou nul,

$$(1) \qquad \frac{2x}{x+2} < \ln(1+x).$$

3. Construire dans le même repère les courbes $\mathcal{C}$ et Γ et montrer qu'elles admettent en 0 une même tangente D que l'on tracera. (On justifiera rapidement le tracé de ces courbes.)

PARTIE B

k désignant un réel strictement positif, on se propose de déterminer toutes les fonctions linéaires $x \mapsto kx$, majorant la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0 ; +\infty[$.
Soit f_k la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$.

1. Étudier le sens de variation de f_1, définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_1(x) = \ln(1+x) - x$.
2. Étudier la limite de f, en $+\infty[$ et donner la valeur de f_1 en 0.
3. Montrer que pour tout réel x positif ou nul
   (2) $\qquad \ln(1+x) \leqslant x$.
4. En déduire que si $k \geqslant 1$ alors : pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant kx$.
5. Le réel k vérifie les conditions : $0 < k < 1$.
   Montrer que la dérivée de f_k s'annule pour $x = \dfrac{1-k}{k}$ et étudier le sens de variation de f_k. (L'étude de la limite de f_k en $+\infty$ n'est pas demandée.)
6. En déduire les valeurs de k strictement positives telles que pour tout
   $x \geqslant 0$, $f(x) < kx$.

PARTIE C

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

(On remarquera éventuellement que : $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$.
En déduire le calcul de $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 (x - \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ puis de $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^1 \left[\ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}\right]\,\mathrm{d}x$.
(Pour le calcul de K on pourra vérifier que : $\dfrac{2x}{x+2} = 2 - \dfrac{4}{2+x}$.)
Interpréter géométriquement les valeurs des intégrales J et K en utilisant les courbes $\mathcal{C}$, Γ et la droite D obtenues dans la partie **A**.

2. Soit u la fonction définie sur $[0; 1]$ de la façon suivante :

$$u(0) = 1 \text{ et si } x \neq 0,\ u(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

   a. Démontrer que la fonction u est dérivable sur $]0; 1]$.
   b. On admet que u est dérivable sur $[0; 1\,]$ et on pose :

$$\mathrm{L} = \int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x.$$

   En utilisant les inégalités (1) et (2) obtenues dans les parties **A** et **B**, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{2}{x+2}\,\mathrm{d}x < L < 1.$$

   En déduire une valeur approchée de L à 10^{-1} près.

∽ Baccalauréat C Polynésie juin 1998 ∾

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Commun à tous les candidats

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules noires, une urne B contient 3 boules rouges et deux boules noires.
On tire au hasard une boule de l'urne A :

- si elle est noire, on la place dans l'urne B,
- sinon, on l'écarte du jeu.

On tire au hasard ensuite une boule de l'urne B.
On considère les évènements suivants :
R_1 : « La boule tirée de A est rouge » ;
N_1 : « La boule tirée de A est noire » ;
R_2 : « La boule tirée de B est rouge » ;
N_2 : « La boule tirée de B est noire ».

1. **a.** Calculer les probabilités des évènements R_1 et N_1.

   b. Calculer les probabilités des évènements « R_2 sachant R_1 » et « R_2 sachant N_1 ». En déduire que la probabilité de R_2 est de $\dfrac{27}{50}$.

   c. Calculer la probabilité de N_2.

2. On répète n fois l'épreuve précédente (tirage d'une boule de A, suivie du tirage d'une boule de B dans les mêmes conditions initiales indiquées ci-dessus), en supposant les différentes épreuves indépendantes.

   Quel nombre minimum d'essais doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule rouge de l'urne B soit supérieure à $0,99$?

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm). On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $3+2\mathrm{i}$.
On appelle f l'application qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1+2\mathrm{i}}{z-1}$$

1. Calculer les affixes des points O′ et B′, images respectives des points O et B par f. Placer les points A, O′, B et B′ dans le plan.

2. **a.** Calculer, pour tout complexe z différent de 1, le produit

   $$\left(z'-1\right)(z-1)$$

   b. En déduire que, pour tout point M distinct de A, on a :

   $$\mathrm{A}M \times \mathrm{A}M' = 2 \text{ et } \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{A}M'}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

3. Démontrer que, si M appartient au cercle (C) de centre A passant par O, alors M' appartient à un cercle (C'). En préciser le centre et le rayon.

   Construire (C) et (C').

4. **a.** Déterminer l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$.

b. Démontrer que, si M est un point autre que A de la demi-droite (d) d'origine A, passant par B, alors M' appartient à une demi-droite que l'on précisera.

5. On appelle P le point d'intersection du cercle (C) et de la demi-droite (d).
Placer son image P' sur la figure.

EXERCICE 2 **5 POINTS**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$(unité graphique : 2 cm).
On appelle T l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, fait correspondre le point M' d'affixe

$$z' = 2z + \frac{1}{z}.$$

1. θ désignant un réel quelconque de l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$, on considère le point M ayant pour affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

a. Démontrer que les coordonnées du point M' sont :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x' & = & 3\cos\theta \\ y' & = & \sin\theta. \end{array}\right.$$

b. En déduire que l'image par T du cercle (C) de centre O et de rayon 1 est une conique (E) dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques (centre, sommets, foyers).
On vérifiera que les foyers F et F$'$ ont pour coordonnées respectives $\left(2\sqrt{2}\ ;\ 0\right)$ et $\left(-2\sqrt{2}\ ;\ 0\right)$.

2. Réaliser une figure comportant :
- le cercle (C),
- la conique (E) et ses éléments caractéristiques déterminés au 1. b,
- un point M de (C) et son image M' par T.

3. **a.** Pour tout point $M'(3\cos\theta\ ;\ \sin\theta)$ de la courbe (E), calculer les distances M'F et M'F$'$ en fonction de θ.

b. En déduire que, pour tout point M' de (E), $M'\mathrm{F} + M'\mathrm{F}'$ est indépendant de θ.

(*Ce type d'exercice n'est plus au programme à partir de la session de* 1999.)

PROBLÈME **10 POINTS**

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. Déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E_1) :

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

2. On considère l'équation différentielle (E_2) :

$$y'' + 2y' + y = x + 3.$$

a. Vérifier que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x + 1$ est solution de (E_2).

b. Démontrer qu'une fonction g est solution de (E_2) si, et seulement si, la fonction $g - p$ est solution de (E_1).

c. Déduire de **1.** et **2. b** les solutions de (E_2)

d. Déterminer la solution générale de (E_2) qui vérifie :

$$g(0) = 1 \quad \text{et} \quad g'(0) = 2.$$

Partie B : étude d'une fonction f et courbe représentative

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. **a.** f' et f'' désignant respectivement les dérivées première et seconde de f, calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   b. Étudier le sens de variation de la dérivée f'.
   c. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$.
   d. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   e. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
2. **a.** Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x+1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ et préciser la position relative de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$.
   b. La courbe $(\mathscr{C})$ admet en un point A une tangente parallèle à la droite $(\mathscr{D})$.
   Déterminer les coordonnées de A.
3. Démontrer que l'équation de $f(x) = 2$ admet sur $[0\,;\,+\infty[$ une unique solution notée α , puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.
4. **a.** Construire la droite $(\mathscr{D})$, le point A défini au **2. b.**, la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente en A à la courbe $(\mathscr{C})$.
   b. Donner par lecture graphique une valeur approchée de α.

Partie C : Recherche d'une approximation décimale de $\boldsymbol{\alpha}$

1. Démontrer que, sur $[0\,;\,+\infty[$, l'équation : $f(x) = 2$ équivaut à l'équation :

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = x$$

2. On appelle h la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

   a. Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et réaliser le tableau de variations de la fonction h.
   b. En déduire que, pour tout réel x de $[0\,;\,1]$, $h(x)$ appartient à $[0\,;\,1]$.
   c. Calculer $h''(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$; étudier le sens de variations de h'.
   d. En déduire que, pour tout réel x de $[0\,;\,1]$,

$$0 \leqslant h'(x) \leqslant \frac{1}{4}$$

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{array}\right.$$

   pour tout entier naturel n.

   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$$

c. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

d. Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de α et, à l'aide de la calculatrice, proposer une approximation décimale de u_p à 10^{-6} près. Que peut-on en déduire pour α ?

PROBLÈME

Partie A : Étude d'une fonction f et courbe représentative

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x+1+xe^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. **a.** f' et f'' désignant respectivement les dérivées première et seconde de f, calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.

   b. Étudier le sens de variation de la dérivée f'.

   c. Démontrer que, pour tout réel x positif, $f'(x) > 0$.

   d. Calculer la limite de f en $+\infty$.

   e. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2. **a.** Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x+1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ et préciser la position relative de (D) et $(\mathscr{C})$.

   b. La courbe $(\mathscr{C})$ admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D).
   Déterminer les coordonnées de A.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet sur $[0 ; +\infty[$ une unique solution notée α, puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.

4. **a.** Construire la droite (D), le point A défini au 2)b), la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente en A à la courbe $(\mathscr{C})$.

   b. Donner par lecture graphique une valeur approchée de α.

Partie B : Recherche d'une approximation décimale de $\boldsymbol{\alpha}$.

1. Démontrer que, sur $[0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = 2$ équivaut à l'équation $\dfrac{e^x}{e^x+1} = x$.

2. On appelle h la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}.$$

   a. Calculer $h'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ et réaliser le tableau de variation de la fonction h.

   b. En déduire que, pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $h(x)$ appartient à $[0 ; 1]$.

   c. Calculer $h''(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$; étudier le sens de variation de h.

d. En déduire que, pour tout réel x de $[0\,;\,1]$, $0 < h'(x) < \dfrac{1}{4}$.

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\left\{\begin{array}{ll} u_0 & = 0 \\ u_{n+1} & = h(u_n) \end{array}\right.$ pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

d. Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de α et à l'aide de la calculatrice, proposer une approximation décimale de u_p à 10^{-6} près.
Que peut-on dire de α ?

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 1998

Exercice 1 **4 points**
Enseignement obligatoire

Un meuble est composé de 10 tiroirs $T_1, T_2, \dots, T_{10}$.
Une personne place au hasard une boule dans un des tiroirs et une autre est chargée de *trouver le tiroir contenant la boule* à l'aide de la stratégie suivante :
la personne ouvre le tiroir T_1.
Si la boule est dans le tiroir T_1, la recherche est achevée, sinon la personne ouvre le tiroir T_2, et ainsi de suite ... en respectant l'ordre des numéros de tiroirs.
On remarquera qu'avec cette stratégie, le tiroir T_{10} n'est jamais ouvert.
Pour i entier compris entre 1 et 10 ($1 \leqslant i \leqslant 10$), on appelle B_i l'évènement « La boule se trouve dans le tiroir T_i ».
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tiroirs qui ont été ouverts afin de localiser la boule avec cette stratégie.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles de X.
2. **a.** Montrer que, pour i entier compris entre 1 et 8 ($1 \leqslant i \leqslant 8$), l'évènement $(X = i)$ est l'évènement B_i.
   b. Justifier que l'évènement $(X = 9)$ est la réunion des évènements B_9 et B_{10}.
   c. Déterminer la loi de probabilité de X.
   d. Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure, les points introduits dans le texte (unité graphique : 2 cm.)

1. **a.** Résoudre l'équation

$$(E) \quad : \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

   b. On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + \text{i}$ et $z_2 = \sqrt{3} - \text{i}$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 ; placer M et N sur la figure.
   c. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w} = -2\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure.
   Montrer que MNPQ est un carré.
2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
   Placer ces points sur la figure.
   Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment [MN].
3. On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.
   a. Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.
   b. Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{PR}$ et Z' de $\overrightarrow{PS}$ en fonction de α.

c. Montrer que $|Z| = |Z'|$ et que $\dfrac{Z}{Z'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

d. Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS.

Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

$\star$ **Étude d'une fonction auxiliaire**

La fonction d est définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$d(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}.$$

1. Calculer la fonction dérivée d'. En déduire les variations de d.
2. Déterminer les limites de d en -1 et en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x > -1$, on a : $0 < d(x) < \mathrm{e}$.

Partie B

$\star$ **Étude de la fonction f**

Dans cette partie on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 - \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, l'unité graphique étant 5 cm. On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f.

1. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - \mathrm{e} + 1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
   Préciser la position relative de (D) et $(\mathscr{C})$.
2. **a.** Pour $x \in]-1\ ;\ +\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   Vérifier que $f''(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^4}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$.
   En déduire le sens de variations de f'.

   b. Dresser le tableau de variations de f'.
   (On admettra que $\displaystyle\lim_{x\to-1} f' = \lim_{x\to+\infty} f' = 1$.)
3. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $]-1\ ;\ +\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.
   Dans la suite du problème, on notera α la solution non nulle. Donner une valeur approchée de α au centième près.
4. **a.** Étudier les variations de f.

   b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   c. Dresser le tableau de variations de f

Partie C

$\star$ **Prolongement de la fonction f** en -1

On considère la fonction g définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(-1) &= 0 \\ g(x) &= f(x) \text{ pour tout } x > -1. \end{cases}$$

On appelle $(\mathscr{C}')$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la **partie B**.

1. **a.** Montrer que l'on peut écrire

$$\frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}\right).$$

b. Pour $x \in]-1\,;\,+\infty[$, déterminer la limite lorsque x tend vers -1 de $\dfrac{x}{x+1}$ puis de $\dfrac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$.

c. En déduire que g est dérivable en -1 et préciser son nombre dérivé $g'(-1)$.

2. Construire (D) et $(\mathscr{C}')$. Préciser les tangentes à $(\mathscr{C}')$ aux points d'abscisses -1, α, 0.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Métropole septembre 1998 ∾

Exercice 1 **4 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Il n'est pas demandé de faire de figure.
Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2.
On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$\text{A}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{B}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{C}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{I}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. **a.** Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{\text{AB}} \wedge \overrightarrow{\text{AC}}$.

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, B et C.

2. Soit (Q) le plan d'équation :

$$x + y - 3z + 2 = 0$$

   et (Q′) le plan de repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

   a. Pourquoi (Q) et (Q′) sont-ils sécants ?

   b. Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection (Δ) des plans (Q) et (Q′).

3. Écrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

4. On considère les points J et K de coordonnées respectives :

$$\text{J}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{K}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Déterminer avec soin l'intersection de la sphère (S) et de la droite (JK).

Exercice II **5 points**

1. On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16.$$

   a. Calculer $P(4)$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ cm.
   Soient A,B, C les points d'affixes respectives :

$$a = 4 \qquad b = 1 + \text{i}\sqrt{3} \qquad c = 1 - \text{i}\sqrt{3}$$

   a. Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

   b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$

On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

a. Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?

b. Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.

a. Montrer que le quadrilatère COFH est un carré.

b. Calculer l'affixe du point H.

c. Le triangle AGH est-il équilatéral ?

Problème **11 points**

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

2. Déterminer la solution φ de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie les conditions :

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = -\mathrm{e}$$

Partie B

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x\mathrm{e}^{2x+1}.$$

a. Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$?

b. Étudier le sens de variation de de f.

c. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

d. Dresser le tableau de variations de f.

e. On appelle $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 4 cm).
Quelle est la tangente à $(\mathscr{C})$ au point O ?
Écrire une équation de la tangente T à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse (-1).

f. On appelle (Γ) la représentation graphique dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{x}.$$

Quelle est la tangente à (Γ) au point d'abscisse (-1) ?

2. On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 1 + \mathrm{e}x\mathrm{e}^{x}.$$

a. Étudier le sens de variation de h.
En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

b. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Γ).

c. Tracer, sur le même graphique, les courbes T, $(\mathscr{C})$ et (Γ).

3. Soit m un réel quelconque et M le point de la courbe (Γ) d'abscisse m.

a. Écrire une équation de la tangente D à (Γ) en M.

b. La tangente D coupe les axes de coordonnées en A et B.
Calculer, en fonction de m, les coordonnées du milieu J du segment $[AB]$.

c. Prouver que J appartient à $(\mathscr{C})$.

d. Tracer (D) et J pour $m = 0$.

Partie C

1. Soit x un réel quelconque. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x t\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit x un réel négatif.
Calculer l'aire $\mathscr{A}(x)$, exprimée en cm^2, de l'ensemble des points N du plan dont les coordonnées $(u,\ v)$ vérifient :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & \leqslant & u & \leqslant & 0 \\ 0 & \leqslant & v & \leqslant & f(x) \end{array}\right.$$

3. Calculer $\mathscr{A}(-1)$.

4. $\mathscr{A}(x)$ admet-elle une limite quand x tend vers moins l'infini ? Si oui laquelle ?

∾ Baccalauréat S Polynésie septembre 1998 ∾

Durée : 4 heures

Exercice 1 **5 points**

Le plan (P) est muni du repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
À tout point M du plan (P) est associé le nombre complexe z, affixe du point M.

1. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = -1, \quad z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \; z_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

b. Déterminer le module et un argument de chacun des cubes z_1^3, z_2^3, z_3^3 des complexes ci-dessus, puis la partie réelle et la partie imaginaire de z_1^3, de z_2^3 et de z_3^3.

2. **a.** Si $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ est un nombre complexe (avec , y et θ réels et ρ réel supérieur à zéro), déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^3 en fonction de x et y, puis le module et un argument de z^3 en fonction de ρ et θ.

b. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z caractérisé par : z^3 est un nombre réel.

c. Déterminer et tracer l'ensemble (E′) des points M d'affixe z, caractérisé par : z^3 est un nombre réel et $1 \leqslant z^3 \leqslant 8$.

Exercice 2 **5 points**

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, nous considérons les points A de coordonnées $(0\,;6\,;0)$, B de coordonnées $(0\,;0\,;8)$, C de coordonnées $(4\,;\ 0\,;8)$.

1. **a.** Réaliser la figure comportant les points définis dans l'exercice (unité graphique : 1 cm).

b. Démontrer que :
- les droites (BC) et (BA) sont orthogonales ;
- les droites (CO) et (OA) sont orthogonales ;
- la droite (BC) est orthogonale au plan (OAB).

c. Déterminer le volume, en cm^3, du tétraèdre OABC.

d. Démontrer que les quatre points O, A, B, C se trouvent sur une sphère dont vous déterminerez le centre et le rayon.

2. À tout réel k de l'intervalle ouvert $]0\,;8[$, est associé le point $M(0\,;\ 0\,;\ k)$. Le plan (π) qui contient M et est orthogonal la droite (OB) rencontre les droites (OC), (AC), (AB) respectivement en N, P, Q.

a. Déterminer la nature du quadrilatère $(MNPQ)$.

b. La droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (OB) ? Pour quelle valeur de k, la droite (MP) est-elle orthogonale à la droite (AC) ?

c. Déterminer MP^2 en fonction de k. Pour quelle valeur de k, la distance PM est-elle minimale ?

Problème **10 points**

L'objectif est d'étudier quelques propriétés de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-x}.$$

Partie A

Variations de f et tracé de la courbe (F)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = (1 - x^2)\mathrm{e}^{-x}.$$

Dans le plan (P) muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm) la représentation graphique de la fonction f est notée (F).

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de f : interpréter graphiquement ce résultat.
2. **a.** Déterminer, suivant les valeurs de x de l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$, le signe de $x^2 - 2x - 1$ et celui de $f(x)$.

   b. Déterminer la fonction dérivée f' de f. En déduire le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations ; préciser les valeurs exactes du minimum et du maximum.
3. Déterminer une équation de la tangente notée (T) la courbe (F) au point A de (F) dont l'abscisse est 0.
4. **a.** Déterminer la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 0,1 près de chacun des coefficients directeurs des tangentes à la courbe (F) en $\mathrm{B}(1\ ;\ 0)$ et $\mathrm{C}(-1\ ;\ 0)$.

   b. Tracer les trois tangentes à la courbe (F) en A, $\mathrm{B}(1\ ;\ 0)$ et $\mathrm{C}(-1\ ;\ 0)$ et la courbe (F).

Partie B

Intégrales et aires

Les surfaces S et $S_1(u)$ du plan (P), où u est un réel donné de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ sont définies par :
S est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que : $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$,
$S_1(u)$ est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que $1 \leqslant x \leqslant u$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$.
Les aires respectives de ces surfaces sont notées $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}_1(u)$. Leurs valeurs exactes seront exprimées en unités d'aire.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où x est un réel positif.

   En procédant à deux intégrations par parties successives, déterminer cette intégrale.
2. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$.
3. Déterminer, en fonction de u où $u \geqslant 1$, l'aire $\mathscr{A}_1(u)$ puis la limite, lorsque u tend vers $+\infty$, de $\mathscr{A}_1(u)$.

   Interpréter graphiquement ce résultat.
4. L'objectif est de déterminer le réel α supérieur ou égal à 1 pour lequel $\mathscr{A}_1(\alpha) = \mathscr{A}$.

   a. Démontrer que, sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, l'équation $\mathscr{A}_1(x) = \mathscr{A}$ est équivalente à : $x = 2\ln(1+x)$.

   b. Étudier le sens de variations de la fonction h définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x - 2\ln(1+x)$.

   Démontrer que, sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, l'équation $x = 2\ln(1+x)$ admet exactement une solution et que celle-ci, notée α, vérifie la condition $2 < \alpha < 3$.

   c. Déterminer $f(\alpha)$ sous la forme d'une fonction rationnelle de α puis l'encadrement de $f(\alpha)$, que vous pouvez déduire du précédent, d'amplitude 2×10^{-4}.

Baccalauréat S Sportifs de haut-niveau octobre 1998

EXERCICE 1 **4 points**

Un joueur dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et n boules vertes ($0 \leqslant n \leqslant 10$). Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Le joueur tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   a. R : « la boule tirée est rouge » ;

   b. B : « la boule tirée est blanche » ;

   c. V : « la boule tirée est verte ».

2. Le joueur décide de jouer une partie. Celle-ci se déroule de la manière indiquée ci-dessous.

   Le joueur tire une boule de l'urne
   - si elle est rouge, il gagne 16 F :
   - si elle est blanche, il perd 12 F ;
   - si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire une boule de l'urne ;
     — si celle boule est rouge, il gagne 8 F ;
     — si cette boule est blanche, il perd 2 F ;
     — si cette boule est verte, il ne perd rien ni ne gagne rien.

   Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont indépendants.

   Au début de la partie, le joueur possède 12 F. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que le joueur possède à l'issue de la partie (un tirage ou deux tirages selon le cas).

   a. Déterminer les valeurs prises par X.

   b. Déterminer la loi de probabilité de X.

   c. Montrer que l'espérance mathématique de X est $12 + 16\dfrac{n}{(n+7)^2}$.

3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x+7)^2}$.

   Étudier les variations de f.

4. En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique X est maximale. Calculer celle valeur maximale (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

EXERCICE 2 **5 points**

On considère les intégrales $\text{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 x \,\text{d}x$ et $\text{J} = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x \,\text{d}x$.

1. **a.** Montrer que l'intégrale I peut s'écrire :

$$\text{I} = \int_0^{\pi} \cos x \left(\cos x - \cos x \sin^2 x\right)\,\text{d}x.$$

   b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\text{I} = \int_0^{\pi} \sin^2 x \,\text{d}x - \frac{1}{3}\text{J}.$$

   c. Montrer de même que $\text{J} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x \,\text{d}x - \frac{1}{3}\text{I}$.

2. **a.** Montrer que $\text{I} + \text{J} = \dfrac{3\pi}{4}$.

   b. Montrer que $\text{J} - \text{I} = 0$

   c. En déduire les intégrales I et J.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : Étude d'une fonction

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \left(3\mathrm{e}^{x} - x - 4\right)\mathrm{e}^{3x}.$$

Il semblerait, d'après la représentation graphique de h tracée par ordinateur et donnée ci-après, que l'équation $h(x) = 0$ admette une seule solution dans $\mathbb{R}$. On se propose, dans cette partie, d'étudier la fonction h et d'examiner si le tracé fourni par l'ordinateur donne une information fiable.

1. Déterminer la limite de h en $-\infty$ (on pourra poser $X = 3x$).

2. Déterminer la limite de h en $+\infty$;
(on observera que $3\mathrm{e}^{x} - x - 4 = \left(3 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} - \dfrac{4}{\mathrm{e}^{x}}\right)\mathrm{e}^{x}$).

3. On note h' la dérivée de h. Montrer que $h'(x) = (12\mathrm{e}^{x} - 3x - 13)\,\mathrm{e}^{3x}$.

4. Étude d'une fonction auxiliaire. Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$k(x) = 12\mathrm{e}^{x} - 3x - 13$.

a. On note k' la fonction dérivée de la fonction k. Étudier le signe de k' sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la limite de k en $+\infty$.

c. Déterminer la limite de k en $-\infty$.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction k.

5. Étude des variations de la fonction h.

a. Montrer qu'il existe un nombre réel négatif α et un seul tel que $k(\alpha) = 0$ et vérifier que $-4,3 < \alpha < -4,2$.
On admet que l'on peut établir qu'il existe un nombre réel positif β et un seul tel que $k(\beta) = 0$ et que $0,1 < \beta < 0,2$.

b. En déduire le signe de k sur $\mathbb{R}$ puis le sens de variations de la fonction h.

c. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm représente 0,1 sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 10 sur l'axe des ordonnées). Représenter graphiquement la fonction h sur l'intervalle $[-5\ ;\ -3,9]$.

6. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique b dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$.
Donner un encadrement de b à 10^{-1} près.

Partie B : Approximation de l'une des solutions de l'équation $h(x) = 0$

On admet qu'il existe un nombre réel a et un seul dans l'intervalle $\mathrm{I} = [0\ ;\ 1]$ tel que $h(a) = 0$.

1. Justifier que, dans l'intervalle I, l'équation $h(x) = 0$ est équivalente à l'équation $3\mathrm{e}^{x} - x - 4 = 0$ puis à l'équation $x = \ln\left(\dfrac{x+4}{3}\right)$.

2. On considère la fonction φ définie sur l'intervalle I par $\varphi(x) = \ln\left(\dfrac{x+4}{3}\right)$.

a. Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\varphi(x) \in \mathrm{I}$.

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\left|\varphi'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

c. Calculer $\varphi(a)$.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

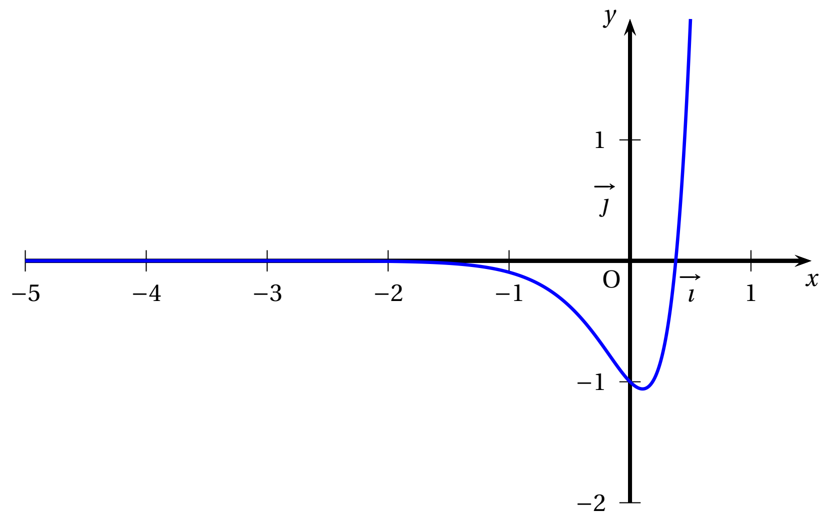
a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - a|$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Préciser sa limite.

d. Déterminer un nombre entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de a à 10^{-4} près.

Donner une valeur approchée de u_p à 10^{-4}.



Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 1998

Exercice 1 **4 points**

Le plan est rapporté au repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ orthonormal direct; unité graphique 2 centimètres.

On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

Soit I le point d'affixe 2i.

On nomme f la transformation qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \text{i}z$.

1. **a.** Préciser la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.

   b. Déterminer l'affixe du point A′, image par f du point A d'affixe $1+\sqrt{2}+\text{i}$.

   c. Montrer que les points A, I et A′ sont alignés.

2. **a.** Montrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, I et M' sont alignés, est le cercle de centre Ω d'affixe $1+\text{i}$ et de rayon $\sqrt{2}$.

   b. Vérifier que le point A appartient à (Γ).

   c. Déterminer l'ensemble (Γ') décrit par le point M' lorsque le point M décrit (Γ).

3. Soit B le point d'affixe $2+2\text{i}$ et B′ l'image de B par f.

   a. Démontrer que les droites (AB) et (A′B′) sont perpendiculaires.

   b. Soit C le point d'intersection des droites (AB) et (A′B′). Déterminer la nature du quadrilatère OACA′.

Exercice 2 **5 points**

Dans le plan (P), on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH] tel que AH = BC = 4. On prendra le centimètre pour unité.

1. En justifiant la construction, placer le point G, barycentre du système de points pondérés $\{(\text{A}~;~2); (\text{B}~;~1); (\text{C}~;~1)\}$.

2. On désigne le point M un point quelconque de (P).

   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{V} = 2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}$ est un vecteur dont la norme est 8.

   b. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que

$$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|\overrightarrow{V}\right\|$$

3. On considère le système de points pondérés $\{(\text{A}~;~2)~;~(\text{B}~;~n)~;~(\text{C}~;~n)\}$ où n est un entier naturel fixé.

   a. Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. Placer G_0, G_1, G_2.

   b. Montrer que le point G_n appartient au segment [AH].

   c. Calculer la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers $+\infty$.

   Préciser la position limite de G_n quand n tend vers $+\infty$.

   d. Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que

$$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} + n\overrightarrow{M\text{B}} + n\overrightarrow{M\text{C}}\right\| = n\left\|\overrightarrow{V}\right\|.$$

   Montrer que E_n est un cercle qui passe par le point A.

   En préciser le centre et le rayon, noté R_n.

   e. Construire E_2.

Exercice 2 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 4 cm.
On considère les points A(1 ; 0), C(0 ; 1), D(0 ; −1) et le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1. Soit M un point du cercle (Γ), d'ordonnée positive ou nulle, et distinct de C.
La droite (DM) rencontre l'axe des abscisses au point I.
Le point N est le point d'intersection de la droite (OM) et de la parallèle à la droite (CD) passant par I.

1. Réaliser la figure.
2. On note t une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{\text{O}M}\right)$.
On se propose de déterminer l'ensemble (F) décrit par le point N lorsque t décrit l'intervalle $[0 ; \pi]$ privé de $\dfrac{\pi}{2}$.
    a. Déterminer les coordonnées de M en fonction de t.
    b. Montrer que les coordonnées de I sont $\left(\dfrac{\cos t}{1+\sin t} ; 0\right)$ puis que les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de N sont :

$$x(t) = \frac{\cos t}{1+\sin t} \qquad y(t) = \frac{\sin t}{1+\sin t}$$

3. **a.** Comparer d'une part $x(t)$ et $x(\pi - t)$, puis d'autre part $y(t)$ et $y(\pi - t)$.
En déduire une propriété géométrique de l'ensemble (F).
    b. Faire l'étude conjointe des variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
    c. Déterminer les limites de $x(t)$ et $y(t)$ quand t tend vers $\dfrac{\pi}{2}$.
4. **a.** Calculer, en fonction de t, la distance ON puis la distance de N à la droite d'équation $y = 1$.
    b. En déduire que (F) est inclus dans une conique dont on précisera la nature et les éléments.
    c. Tracer l'ensemble (F).

Problème **11 points**

Partie A ⋆ Résolution d'une équation différentielle
(Hors programme depuis 1998.)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) $y'' - 2y' + y = 0$.
2. Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2$.
Vérifier que le polynôme h défini sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$ est une solution particulière de (E), c'est-à-dire que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 - 4x + 2$.
3. **a.** Montrer que si f est solution de (E), c'est-à-dire, si pour tout x réel,
$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = x^2 - 4x + 2$, alors la fonction g, telle que $g = f - h$, est solution de (E_0).
    b. Réciproquement, montrer que si g est solution de (E_0) alors la fonction f, telle que $f = g + h$, est solution de (E).
    c. En déduire la forme générale des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire une solution φ de (E) satisfaisant à $\varphi(1) = 1$ et $\varphi'(1) = 0$.

Partie B ⋆ Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = x^2 - 2(x-1)\text{e}^{(x-1)}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; (unité graphique : 2 cm).

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$. On pourra montrer que

$$f(x) = \mathrm{e}\left(\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} - \frac{2x}{\mathrm{e}} + \frac{2}{\mathrm{e}}\right).$$

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   c. Calculer $f'(x)$ pour tout x réel et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique. On note α cette solution.

   b. Montrer que α appartient à l'intervalle $]1{,}7\,;\,1{,}8[$.

3. On appelle (Γ) la parabole d'équation $y = x^2$.

   a. Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (Γ).

   b. Calculer la limite de $f(x) - x^2$ quand x tend vers $-\infty$.

4. Tracer sur une feuille de papier millimétré, la courbe $(\mathscr{C})$ et la parabole (Γ).

Partie C ⋆ Calculs d'aires

Soit a un nombre réel strictement inférieur à 1. On appelle D_a le domaine du plan limité par les courbes $(\mathscr{C})$ et (Γ) et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$.
On note $\mathscr{A}(a)$ l'aire du domaine D_a, exprimée en unités d'aire.

1. Montrer que $\mathscr{A}(a) = 2(a-1)\mathrm{e}^{(a-1)} - 2\mathrm{e}^{(a-1)} + 2$.
   (On pourra utiliser une intégration par parties).
2. Calculer l'aire $\mathscr{A}(0)$ du domaine D.
3. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $-\infty$.

Partie D ⋆ Calcul de probabilités

Sur la feuille de papier millimétré de la partie B, on place les points $\mathrm{I}(1\,;\,0)$, $\mathrm{J}(0\,;\,1)$ et $\mathrm{K}(1\,;\,1)$. On utilise cette feuille comme cible.
On admet que, pour chaque essai :
• la probabilité d'atteindre un point du carré OIKJ est égale à $\frac{1}{2}$.;
• sachant qu'un point du carré est atteint, la probabilité que ce point appartienne à D_0 est égale à A(0).

1. Pour un essai, montrer que la probabilité d'atteindre un point du domaine D_0 est égale à $1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.
2. On effectue n essais (n entier naturel non nul), tous indépendants les uns des autres.

   a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n d'atteindre au moins une fois un point du domaine D_0 au cours de ces n essais.

   b. Déterminer le nombre minimal n d'essais pour que cette probabilité p_n soit supérieure ou égale à $0{,}99$.

Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie décembre 1998

Exercice
Commun à tous les candidats

Dans une foire, une publicité annonce : « Un billet sur deux est gagnant. Achetez deux billets ».
Dans cet exercice, on suppose qu'effectivement, sur le nombre de billets en vente, exactement un billet sur deux est gagnant. Xavier est toujours le premier acheteur de la journée.

Partie A

Il est mis en vente chaque jour cent billets.

1. Xavier acheté deux billets. Calculer la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant.
   Le résultat sera donné sous forme d'une fraction irréductible, puis à 10^{-3} près.
2. Xavier revient chaque jour, pendant trois tours, acheter deux billets Quelle est la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant sur les trois jours ?
   Le résultat sera donné à 10^{-3} près.
3. Un autre tour, Xavier achète six billets Quelle est la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant Le resultat sera donné à 10^{-3} près.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul.
Désormais, il est mis en vente $2n$ billets. Xavier achète deux billets.

1. Démontrer que la probabilité p_n, qu'il achète au moins un billet gagnant est $p_n = \dfrac{2n-1}{2(2n-1)}$.
2. **a.** Étudier les variations de la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b. Déterminer la limite de p_n, quand n tend vers $+\infty$.

Exercice **(spécialité)**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 5 cm).
On considère les points A d'affixe $\sqrt{2}$, et B d'affixe i. Soit C te point tel que OACB soit un rectangle. On note I le milieu du segment [OA], J le milieu du segment [BC] et K le milieu du segment [AI].
Placer ces points sur une figure.

1. On considère la transformation s de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', tel que

$$z' = -\text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}.$$

   a. Démontrer que s est une similitude dont le centre Ω a pour affixe $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{3}\text{i}$ et dont on déterminera le rapport k et une mesure θ de l'angle.
   b. Determiner les images par s des points O, A, B, C.
2. **a.** Calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega\text{B}},\ \overrightarrow{\Omega\text{B}}\right)$.
   En déduire que les points A, B et Ω sont alignés.
   b. Démontrer de même que les points I, C, Ω sont alignés.
   c. En déduire une construction de Ω. Placer Ω sur la figure.
3. **a.** Montrer que Ω appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs [BC] et [AI].
   b. Démontrer que $\overrightarrow{\text{J}\Omega}$ et $\overrightarrow{\text{JK}}$ sont colinéaires.

c. Démontrer que la droite (ΩO) est la tangente commune à Γ_1 et Γ_2.
Représenter les cercles Γ_1, Γ_2 et la droite (ΩO) sur la figure.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 3 cm). On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right).$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Justifier que, pour tout x réel, $x^2 - 2x + 2 > 0$.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$, et en $-\infty$.
4. Représenter $(\mathscr{C})$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$; on montrera que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$ et on placera les points d'abscisses 0 et 2 ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.

Partie B

On s'intéresse à l'intersection de $(\mathscr{C})$ et de (Δ).
On pose, pour tout réel x, $\varphi(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la fonction dérivée φ' de φ. En déduire que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
2. **a.** Determiner la limite de φ en $-\infty$.

   b. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\varphi(x) = x\left[\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right].$$

   En déduire la limite de φ en $+\infty$.

3. Montrer que la droite (Δ) coupe la courbe $(\mathscr{C})$ en un point et un seul.
   On désigne par α l'abscisse de ce point.
   Montrer que $0,3 < \alpha < 0,4$.