Baccalauréat A1 et B 1994

L'intégrale d'avril à décembre 1994

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat ES (A1) Pondichéry avril 1994

EXERCICE 1 **4 points**

Soit les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0~;~1]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{4-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln\left(4-x^2\right).$$

1. Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Quel est le signe de I ?

b. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0~;~1]$

$$f(x) = -1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}$$

c. Calculer la valeur exacte de I.

2. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \ln 3 + 21$.

EXERCICE 2 **5 points**

Le jeune Éric, trois ans, s'amuse à taper sur les touches du minitel.

1. Il frappe au hasard sur une touche du clavier, chaque touche ayant la même probabilité d'être frappée. Ce clavier comporte 57 touches dont 26 représentent les 26 lettres de l'alphabet français.

a. Quelle est la probabilité pour qu'il frappe une lettre ?

b. Quelle est la probabilité pour qu'il frappe une lettre de son prénom ?

2. Éric frappe successivement 4 touches, distinctes ou non.

Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants :

a. Éric frappe son prénom.

b. Éric frappe les 4 lettres de son prénom.

c. Éric frappe 4 touches différentes.

d. Éric frappe son prénom sachant qu'il a frappé 4 touches différentes.

On donnera les résultats approchés sous la forme $a \times 10^{-n}$ où n est un entier naturel et a un nombre entier tel que $0 < a < 10$.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty~;~1]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 2x - 4.$$

On appelle (C) sa représentation graphique dans un repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses, et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Soit $g(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.

Montrer que $g(x)$ s'annule pour $x = \ln 3$.

Étudier le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]-\infty~;~1]$.

3. **a.** Montrer que $f(x) - (-2x - 4) = g(x)$.

   b. En déduire que la droite (D) d'équation $y = -2x - 4$ est asymptote à (C).
   Étudier la position de (C) par rapport à (D).

4. Calculer $f'(x)$. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]-\infty~;~1]$,

$$f'(x) = \left(3\text{e}^x + 2\right)\left(\text{e}^x - 1\right).$$

   En déduire le signe de $f'(x)$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Partie B

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution x_0 dans l'intervalle $[-3~;~0]$.
   En utilisant la calculatrice donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de x_0.

2. **a.** Résoudre l'équation $3\text{e}^{2x} - \text{e}^x - 2 = 2$ en posant $X = \text{e}^x$.

   b. En déduire qu'il existe un point A unique de (C) où la tangente a pour coefficient directeur 2 et que l'abscisse de A est égale à $\ln \dfrac{4}{3}$.

3. Tracer la droite (D), la courbe (C) et la tangente à (C) en A.

∽ Baccalauréat ES (B) Pondichéry avril 1994 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

1. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24.$$

   a. Calculer $P(2)$. En déduire une factorisation de $P(x)$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2. En déduire les solutions dans des équations suivantes :

   a. $2\ln x + \ln(x-1) = \ln(14x - 24)$

   b. $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 24\mathrm{e}^{-x} - 14 = 0$.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans cet exercice tous les résultats seront donnés sous forme de fractions.

Une urne contient trente boules numérotées de 1 à 30 indiscernables au toucher.

1. On tire au hasard une boule de l'urne. Calculer :

   a. la probabilité que le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 et de 5 ;

   b. la probabilité que le numéro de la boule tirée soit multiple de 3 ou de 5.

2. On tire au hasard 3 boules successivement et avec remise.
   Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois un numéro multiple de 3 et de 5.

PROBLÈME **12 points**

Soit la fonction numérique f définie sur $]0 \; +\infty[$ par

$$f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$(unité graphique : 2 cm).

Partie I

1. Après avoir factorisé $f(x)$, déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Prouver que pour tout x réel strictement positif on a

$$f'(x) = 3(\ln x - 1)(\ln x + 1)$$

   où f' désigne la dérivée de la fonction f.
   Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0 \; +\infty[$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0 \; +\infty[$. Que représentent pour (C) les solutions de cette équation ?
5. Construire (C).

Partie II

Soient I, J, et K les intégrales définies par :

$$I = \int_{1/\ln \mathrm{e}}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x, \quad J = \int_{1/\ln \mathrm{e}}^{1} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x, \quad K = \int_{1/\ln \mathrm{e}}^{1} (\ln x)^3 \,\mathrm{d}x.$$

1. Soit la fonction G définie sur $]0\ +\infty[$ par :

$$G(x) = x \ln x - x.$$

Montrer que G est une primitive de la fonction g définie sur $]0\ +\infty[$ par $g(x) = \ln x$.
En déduire la valeur de I.

2. Soit la fonction H définie sur $]0\ +\infty[$ par :

$$H(x) = x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x).$$

Montrer que H est une primitive de la fonction h définie sur $]0\ +\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$. En déduire la valeur de J.

3. **a.** Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $K = \dfrac{1}{\mathrm{e}} - 3J$ et en déduire que $K = \dfrac{6}{\mathrm{e}} - 6$.

b. En utilisant I et K calculer $\displaystyle\int_{1/\ln \mathrm{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

4. En déduire l'aire, en cm^2, de l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que :

$$\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

On donnera la valeur exacte du résultat puis la valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.

Baccalauréat ES (A1) Amérique du Nord juin 1994

EXERCICE **4 points**

Une population est constituée de 100 personnes (40 hommes et 60 femmes), telles que :
50 ont les yeux bleus,
60 % des hommes ont les yeux bleus.
On tire au sort une personne. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.
Calculer, sous forme de fractions, les probabilités des évènements suivants :
A : « avoir choisi un homme »
B : « avoir choisi un homme aux yeux bleus »
C : « avoir choisi une femme aux yeux bleus »
D : « avoir choisi une personne aux yeux bleus, sachant que c'est une femme »
E : « avoir choisi une femme, sachant que c'est une personne ayant les yeux bleus ».

PROBLÈME **10 points**

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right).$$

Soit g la fonction définie sur $]\ln 2\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x - 2}.$$

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 3 cm).
On appelle $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans P.

PARTIE A

- **Étude de la fonction f**

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   Quelles sont les conséquences graphiques de ces résultats ?
2. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.
   En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Construire $\mathscr{C}_f$.

PARTIE B

- **Étude de la fonction g**

1. Calculer les limites de la fonction g en $\ln 2$ et en $+\infty$. Quelles sont les conséquences graphiques de ces résultats ?
2. Calculer $g'(x)$, où g' désigne la fonction dérivée de g. En déduire le sens de variation de g sur $]\ln 2\,;\,+\infty[$.
3. Dresser le tableau de variation de g.
4. Construire $\mathscr{C}_g$, sur la même figure que $\mathscr{C}_f$.

PARTIE C

- **Tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$**

1. Soit A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $\frac{1}{2}$. Écrire une équation de la tangente en A à $\mathscr{C}_f$.
2. Déterminer l'abscisse du point B de $\mathscr{C}_g$ où la tangente a pour coefficient directeur -1.

   En déduire l'équation de cette tangente. Que remarque-t-on ?
3. Construire cette droite sur la figure précédente.

PARTIE D

- **Calcul d'aire**

1. En utilisant une intégration par parties, calculer :

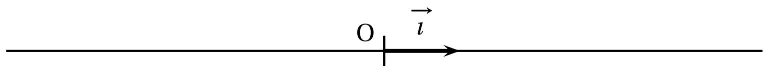
$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)\,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de l'aire, en cm^2, de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = 1$, $x = 2$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Baccalauréat ES (B) Amérique du Nord juin 1994

EXERCICE 1 **6 points**

Un pion se déplace par sauts successifs sur la droite Δ munie du repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath}\right)$.



Son point de départ est le point O.
Deux types de sauts sont possibles :
D : 2 unités vers la droite,
G : 1 unité vers la gauche.
Les sauts successifs sont supposés indépendants les uns des autres, et chaque type de saut a la même probabilité d'être effectué.
On suppose que le pion va effectuer 3 sauts successifs.

1. Donner la liste des différents parcours possibles. On pourra, éventuellement, dessiner « l'arbre des parcours », et désigner chaque parcours à l'aide d'un triplet, par exemple : (D, D, G) signifie que le pion s'est déplacé d'abord deux fois vers la droite, puis une fois vers la gauche.
2. Pour chaque parcours trouvé, préciser l'abscisse du point occupé par le pion après les 3 sauts.
3. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque parcours, associe l'abscisse du point où aboutit le pion. Donner la loi de probabilité de X, et son espérance mathématique.

EXERCICE 2 **4 points**

On a noté, entre 1982 et 1990, le nombre x de parcours de golf et le nombre y de licenciés de la Fédération Française de Golf.
(Source : « L'Équipe Magazine », août 1993.)
Les résultats ont été rassemblés dans le tableau suivant :

Année	1982	1984	1986	1988	1990
Nombre de parcours de golf x	134	141	176	249	458
Nombre de licenciés y	47 159	63 696	97 019	135 146	181 147

1. Construire le nuage de points correspondant à la série statistique $(x~;~y)$, dans le plan muni d'un repère orthogonal, avec, pour unités graphiques :
   1 cm pour 30 parcours en abscisses,
   1 cm pour 10 000 licenciés, en ordonnées.
   Déterminer et représenter le point moyen G de cette série.
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série. Un ajustement linéaire se justifie-t-il ? Préciser.
3. Déterminer une équation de la droite de régression D de y en x.
   Construire D, sur le graphique précédent.
4. En 1992, le nombre de licenciés a été de 207 000. À quelle estimation du nombre de parcours en 1992 conduit l'équation précédente ?

PROBLÈME **10 points**

Le but de ce problème est l'étude de la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty]$ par :

$$f(x) = \frac{(x-1)\ln x}{x},$$

sa représentation graphique et le calcul d'une aire qui lui est liée.
Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
La courbe représentative de f dans P est notée $\mathscr{C}$.

PARTIE I

Étude de f

1. **a.** Calculer la limite de f en 0.
   Quelle en est la conséquence graphique ?

   b. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que :

$$f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x^2}.$$

3. Déterminer le signe de la somme $(x-1)+\ln x$ lorsque $0 < x < 1$, puis lorsque $x > 1$.
4. En déduire le tableau de variations de f

PARTIE II

Courbe représentative de f

1. Déterminer, selon les valeurs de x, le signe de la différence $d(x) = f(x) - \ln x$.
2. Soit Γ la courbe représentative, dans P, de la fonction ln.
   Interpréter géométriquement le nombre $d(x)$, et déduire, de la question précédente, la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.
3. Tracer Γ, puis $\mathscr{C}$.

PARTIE III

Calcul d'une aire

1. Hachurer la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = 1$, $x = \text{e}$, et les deux courbes précédentes.
2. Déterminer une primitive de la fonction définie par :

$$g(x) = (\ln x) \times \frac{1}{x}.$$

3. En déduire l'aire, en cm^2, de la partie hachurée.

∽ Baccalauréat ES (A1 et B) Aix-Marseille [1] juin 1994 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Une urne contient 3 boules vertes portant le numéro 0, deux boules rouges portant le numéro 5 et une boule noire portant le numéro a (a est un entier naturel non nul, différent de 5 et de 10).
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
Un joueur tire simultanément trois boules de l'urne :

1. Quelle est la probabilité pour qu'il tire :
   a. trois boules de la même couleur ;
   b. trois boules de couleurs différentes ;
   c. deux boules et deux seulement de la même couleur.
2. Le joueur reçoit, en francs, la somme des numéros marqués sur les boules tirées. Les gains possibles du joueur sont donc :

$$0 \quad ; \quad 5 \quad ; \quad 10 \quad ; \quad a \quad ; \quad 5+a \quad ; \quad 10+a.$$

   a. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de a.
   c. Calculer a pour que l'espérance de gain du joueur soit de 20 francs.

EXERCICE 2 **5 points**
Série B

Le tableau suivant donne le montant (en millions de dollars) des droits de retransmission télévisée des jeux olympiques d'été de 1972 à 1992.

Ville – Année	Rang de l'année x_i	Montant y_i
Munich – 1972	1	15,2
Montréal – 1976	2	29,5
Moscou – 1980	3	92,6
Los Angeles – 1984	4	288,0
Séoul – 1988	5	402,0
Barcelone – 1992	6	634,5

1. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra 2 cm pour 1 rang sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 millions de dollars sur l'axe des ordonnées.
2. On pose $z_i = \ln y_i$.
   Déterminer une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés.
   Les valeurs des z_i les coefficients a et b de la droite de régression seront arrondis au centième le plus proche.
3. Déduire de la question précédente une relation approchée entre y et x de la forme $y = \alpha.\beta^x$.
   Les coefficients α et β seront arrondis au centième le plus proche.
4. À l'aide de la question 3, donner une prévision du montant des droits de retransmission télévisée pour les jeux olympiques d'Atlanta en 1996.

1. Corse-Montpellier-Nice-Toulouse

PROBLÈME **12 points**

Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

et C sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités : 2 cm).

1. **a.** Soit f' la dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le signe de $\ln x$.
   Étudier le sens de variation de f et en déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   c. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
   (Pour le calcul de $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f$ on pourra écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = 1 - \dfrac{1 + \ln x}{x}$.)
2. **a.** Résoudre l'équation $f(x) = 1$.
   b. Résoudre l'inéquation $f(x) > 1$. En déduire la position de C par rapport à la droite Δ d'équation $y = 1$.
3. Soit A le point d'intersection de C et de Δ. Déterminer l'équation de la tangente T à C au point A.
4. Construire, dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, Δ, T puis C.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ a une solution unique α appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
6. **a.** Déterminer la fonction dérivée de u définie par :

   $$u(x) = 1 + \ln x.$$

   En déduire une primitive de g définie par

   $$g(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x).$$

   b. Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\text{e}} \frac{1 + \ln x}{x}\,\text{d}x$.
   c. Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'axe $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath}\right)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.
   Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

∽ Baccalauréat (A1) Amiens [2] juin 1994 ∾

EXERCICE **5 points**

Un joueur de tennis effectue une mise en jeu. Pour cela, il a droit à deux tentatives : un premier service suivi, s'il n'est pas réussi, d'un second service.
La probabilité pour que le premier service réussisse est égale à $\frac{2}{3}$.

S'il a échoué, la probabilité pour que le deuxième service réussisse est égale à $\frac{4}{5}$.
Lorsque les deux services échouent, il y a « double faute », sinon, la mise en jeu est réussie.

1. **a.** Donner la probabilité pour que le second service ne soit pas réussi, sachant que le premier service n'est pas réussi.

   b. Montrer que, sur une mise en jeu, la probabilité pour que ce joueur fasse une double faute est égale à $\frac{1}{15}$.

   c. En déduire la probabilité pour que la mise en jeu soit réussie.

2. Ce joueur fait un pari avec un de ses camarades.
   Il effectue 10 mises enjeu successives (de manière indépendante).

   a. Calculer en fonction de k ($k \in \{0, 1, \dots, 10\}$) la probabilité p_k pour que le joueur réussisse k mises en jeu.

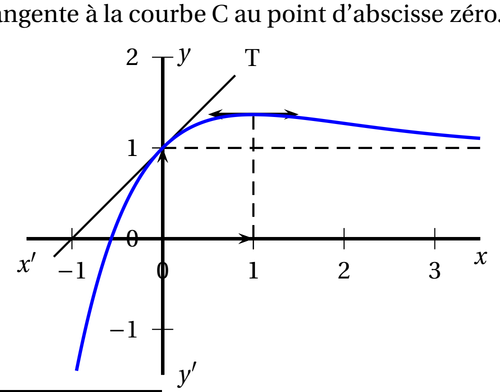
   b. S'il réussit 10 ou 9 mises en jeu, il gagne 10 F par mise en jeu réussie.
   Sinon, il perd 50 F.
   Soit X la variable aléatoire représentant la somme gagnée (comptée positivement), ou perdue (comptée négativement), par ce joueur.
   - Calculer : $p(X = 100)$;
   $p(X = 90)$;
   $p(X = -50)$.
   - Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$.

PROBLÈME **15 points**

La courbe C représentée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = a + bx\mathrm{e}^{-x},$$

où a et b sont deux nombres réels.
La droite T est la tangente à la courbe C au point d'abscisse zéro.



2. Créteil-Lille-Paris-Rouen-Versailles

Reproduire l'allure de la courbe C sur la copie (repère orthonormal : unité graphique : 2 cm).

1. *Lecture graphique*

a. Lire sur le graphique proposé ci-dessus $f(0)$ et $f'(0)$.

b. En déduire la valeur de a et celle de b.

Dans toute la suite, on prend $f(x) = 1 + x\mathrm{e}^{-x}$.

2. *Variations de f*

a. Calculer la dérivée f' de f

Déterminer la tangente à C au point d'abscisse 1.

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

c. Déterminer la limite de f en $+\infty$; interpréter graphiquement le résultat obtenu.

d. Dresser le tableau de variation de f.

3. *Étude du point d'intersection de* C *avec l'axe des abscisses*

a. Prouver que l' équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule telle que $-1 < \alpha < -\dfrac{1}{2}$.

b. On pose $\alpha' = -0,56$. Calculer $f\left(\alpha'\right)$ à la précision 10^{-4}.

Prouver que $\alpha < \alpha'$: et que $\alpha' - \alpha < 10^{-2}$ (on pourra calculer $f(-0,57)$.

4. Calcul d'une intégrale. Pour tout nombre réel λ, on pose $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer $\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.

b. En déduire que $I(\lambda) = \lambda + 1 - (\lambda + 1)\mathrm{e}^{-\lambda} = (\lambda + 1)\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)$.

c. Déterminer la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

5. *Calcul approché d'une aire*

a. À l'aide de la question 4. b., calculer $\left(\alpha'\right)$ à 10^{-4} près.

b. Établir que $0 \leqslant \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha'} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\alpha' - \alpha\right) f\left(\alpha'\right)$.

c. En déduire une valeur approchée de $I(\alpha)$ à $10 - -3$ près.

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

∽ Baccalauréat (B) Amiens[3] juin 1994 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; \text{e}]$ par :

$$f\ x \longmapsto x^2 \ln x.$$

Le plan P est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques = 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).
La courbe représentative de f dans P est notée $\mathscr{C}$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.
   Étudier son signe.
   b. En déduire le sens de variations de f.
   c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
   Marquer le point A de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1, puis le point B de coordonnées $(\text{e} : 0)$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$.
   En déduire la valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[1 ; \text{e}]$.
   En donner une valeur approchée à 0,01 près.

EXERCICE 2 **5 points**

À « La Ferme de la Poule Pondeuse », on produit des œufs de trois tailles différentes :
des petits, dans la proportion de 20 % ;
des moyens, dans la proportion de 50 % ;
des gros, dans la proportion de 30 %.
Ils sont de deux qualités :
ordinaire, étiquetés sous la dénomination « œufs frais » ;
supérieure, étiquetés sous la dénomination « œufs extra ».
On a remarqué que :
80 % des petits œufs sont de qualité ordinaire ;
50 % des œufs moyens sont de qualité ordinaire ;
20 % des gros œufs sont de qualité ordinaire.
Dans tout le problème, on suppose que le nombre d' œufs est suffisamment grand pour que le fait de prélever un œuf ne modifie pas ces proportions.

1. On prend un œuf au hasard.
   Quelle est la probabilité pour qu'il soit :
   a. de petite taille et de qualité ordinaire ?
   b. de qualité ordinaire ?
   c. de qualité supérieure ?
2. **a.** Montrer que la probabilité pour un œuf d'être gros et de qualité supérieure est égale à $0,24$.
   b. On remplit au hasard une boîte de douze œufs.
   On suppose les choix des œufs indépendants les uns des autres. Quelle est la probabilité pour que cette boîte contienne exactement cinq œufs de la catégorie « gros œufs extra » ?

3. Créteil-Lille-Paris-Rouen-Versailles

PROBLÈME **10 points**

On se propose d'étudier le taux d'équipement en **lave-linge des ménages français**.
On a recueilli les informations consignées dans le tableau ci-dessous :

Années x_i	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985
Taux en % y_i	10	25	41	60	69	80	86

Dans les questions suivantes, pour simplifier les calculs, on pose :

$$t_i = \frac{x_i - 1955}{5}$$

où t_i représente le « rang » de l'année d'observation.
On obtient ainsi :

t_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	10	25	41	60	69	80	86

Partie A - Question préliminaire

Le plan est muni d'un repère orthogonal (unités : 2 cm pour 1 unité, sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 10 %, sur l'axe des ordonnées).
Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique $\left(t_i\ ;\ y_i\right)$.
Calculer les coordonnées du point moyen G et le placer sur la figure précédente.
Au vu du schéma, on décide d'effectuer deux ajustements successifs, en vue de faire des prévisions.
(*Les questions B et C sont indépendantes.*)

Partie B - Ajustement linéaire

1. Donner une valeur approchée à 0,01 près par défaut du cœfficient de corrélation linéaire de la série $\left(t_i\ ;\ y_i\right)$.
2. Donner une équation de la droite de régression de y en t, par la méthode des moindres carrés. La représenter sur la figure précédente.
3. En utilisant cette représentation graphique, indiquer à partir de quelle année, au moins 95 % des ménages seront équipés en lave-linge.

Partie C - Ajustement logistique

Soit la fonction f, définie pour t réel positif ou nul par :

$$f(t) = \frac{100}{1 + k\mathrm{e}^{at}},$$

où k et a sont des constantes que l'on va déterminer.

1. On impose que la courbe représentative de f passe par le point M de coordonnées $(0\,;\,10)$ et le point N de coordonnées $(5,\,80)$.

   Traduire ces deux conditions et en déduire les valeurs exactes de k et a, puis la valeur décimale approchée de a à 0,1 près par excès.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(t) = \frac{100}{1 + 9\mathrm{e}^{0,7t}}.$$

   a. Calculer la limite de f quand t tend vers $+\infty$.

b. Calculer $f'(t)$, où f' désigne la fonction dérivée de f Déterminer son signe, et en déduire le tableau de variation de f.

Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant :

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$							

(On indiquera les valeurs décimales approchées de $f(t)$ à une unité près.)

Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sur la figure précédente.

c. Résoudre l'inéquation :

$$f(t) \geqslant 95.$$

Donner une interprétation de ce résultat.

∽ Baccalauréat A1 et B Besançon [4] juin 1994 ∾

EXERCICE **5 points**

Au cours d'une quinzaine commerciale, un magasin offre un billet de loterie à tout acheteur d'un appareil électroménager. Les 500 billets sont numérotés de 001 à 500 et ils sont tous distribués.
À la fin de la quinzaine, on effectue un tirage au sort, à l'issue duquel : le numéro 397 gagne 10 000 F ;
les 4 autres numéros se terminant par 97 gagnent chacun 1 000 F ; les 45 autres numéros se terminant par 7 gagnent chacun 100 F. Il y a ainsi en tout 50 numéros gagnants.
Après l'achat d'un appareil, une personne tire un billet au hasard.

1. On désigne par X la variable aléatoire qui, au numéro de ce billet, associe le gain correspondant.
   a. Préciser les valeurs que peut prendre X.
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Calculer son espérance mathématique E(X).
2. On considère les deux évènements :
   A = [le numéro obtenu est gagnant] et B = [le deuxième chiffre du numéro est 9].
   a. Calculer les probabilités $p(A)$ et $p(B)$.
   b. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
3. Le magasin annonce dans sa publicité : « Pour doubler vos chances d'avoir au moins un billet gagnant, achetez deux appareils ! ». Une personne achète deux appareils et tire deux billets au hasard.
   a. On considère l'évènement C = [aucun des deux numéros n'est gagnant]. Calculer la probabilité $p(C)$.
   b. En déduire la probabilité pour qu'un numéro au moins soit gagnant.
   Cette annonce publicitaire est-elle correcte ? Justifier la réponse par le calcul.

EXERCICE 2 **5 points**
Série B

Une société investit de manière continue en publicité.
Le budget publicitaire (BP) et le chiffre d'affaires (CA) sont connus pour 10 mois consécutifs.
Ils figurent dans le tableau suivant où l'unité est le millier de francs.

Mois	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
BP	x_i	10	12	15	13	10	9	8	6	8	7
CA	z_i	45	79	99	115	109	80	70	60	37	61

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.
   Que peut-on en conclure ?
2. En fait, il faut prendre en compte le temps nécessaire à la publicité pour produire son effet. Ce temps est estimé à un mois. On considère donc désormais la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$, où, pour $1 \leqslant i \leqslant 9$, $y_i = z_i + 1$.

4. Dijon-Grenoble-Lyon-Metz-Nancy-Reims-Strasbourg

a. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

Mois	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
BP	x_i	10	12	15	13	10	9	8	6	8
CA	y_i									

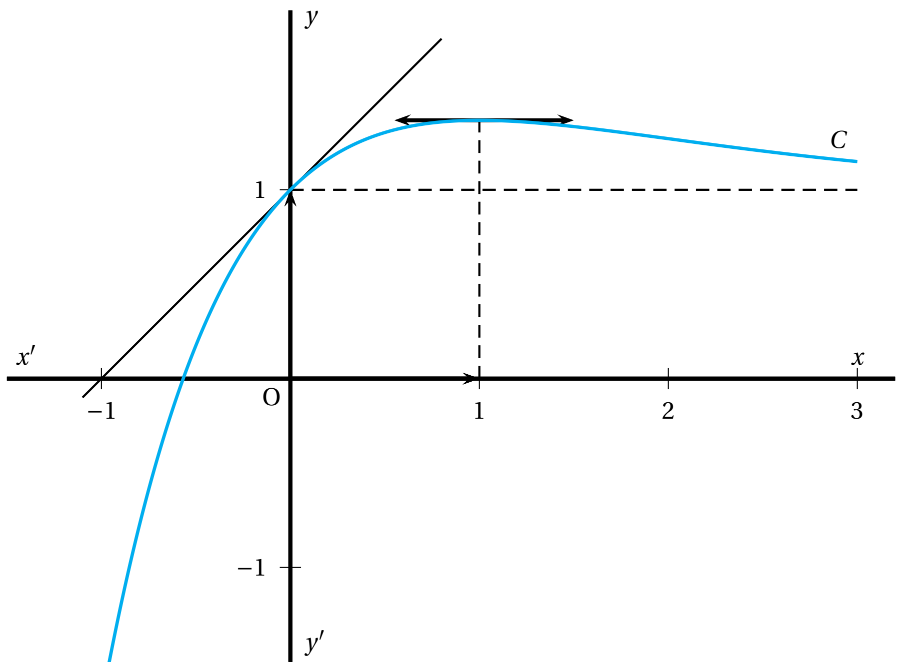
b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

c. Déterminer l'équation $y = mx + p$ de la droite de régression de y en x.

d. En déduire une estimation du chiffre d'affaires $z_{11} - y_{10}$ du onzième mois.

PROBLÈME **10 points**

La courbe C représentée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a + bx\text{e}^{-x}$, où a et b sont deux nombres réels.
La droite T est la tangente à la courbe C au point d'abscisse zéro.



Reproduire l'allure de la courbe C sur la copie (repère orthonormal : unité graphique : 2 cm).

1. Lecture graphique.

a. Lire sur le graphique proposé ci-dessus $f(0)$ et $f'(0)$.

b. En déduire la valeur de a et celle de b.

Dans toute la suite, on prend $f(x) = 1 + x\text{e}^{-x}$.

2. Variations de f

a. Calculer la dérivée f' de f.
Déterminer la tangente à C au point d'abscisse 1.

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

c. Déterminer la limite de f en $+\infty$; interpréter graphiquement le résultat obtenu.

d. Dresser le tableau de variations de f.

3. Étude du point d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

a. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule telle que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

b. On pose $\alpha' = -0,56$. Calculer $f(\alpha')$ à la précision 10^{-4}.
Prouver que $\alpha < \alpha'$ et que $\alpha' - \alpha < 10^{-2}$ (on pourra calculer $f(-0,57)$.

Baccalauréat A1 Bordeaux [5] juin 1994

EXERCICE **5 points**

Les questions 1. et 2. peuvent être traitées indépendamment. Les résultats seront donnés sous forme de fractions.
À la gare A, 16 voyageurs ont pris chacun un billet dont :
7 pour la gare B (prix du billet 50 francs)
5 pour la gare C (prix du billet 60 francs)
4 pour la gare D (prix du billet 75 francs).

1. On choisit au hasard un de ces voyageurs. Soit X la variable aléatoire associant à chaque voyageur le prix de son billet (en francs).
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X.
2. On choisit au hasard trois de ces voyageurs.
   a. Calculer la probabilité pour que ces trois voyageurs aient trois destinations différentes.
   b. Calculer la probabilité pour qu'au moins un des voyageurs ait un billet pour la gare B.
   c. Quelle est la probabilité pour que cette destination soit B, sachant que les trois voyageurs ont la même destination.

PROBLÈME **15 points**

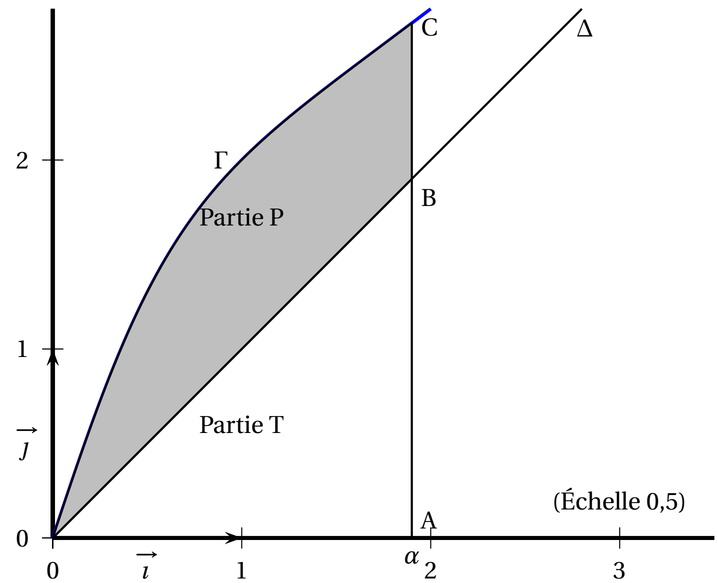
Les trois parties sont largement indépendantes.

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 4 cm).
Dans ce repère, on a tracé (ci-après) la courbe Γ représentative de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}.$$

On y trouvera également la droite Δ d'équation $y = x$ et la droite d parallèle à l'axe des ordonnées $\left(\text{O} ; \vec{\jmath}\right)$.
Cette droite d coupe respectivement l'axe des abscisses, Δ et Γ aux points A, B et C de même abscisse appartenant à l'intervalle $[1 ; 10]$.
La réunion de la partie hachurée P et de la partie tramée représente à l'échelle 1/50$^{\text{e}}$ la voile d'un bateau.
Les parties P et T exigent des toiles différentes, mais doivent avoir la même aire. Le but du problème est de choisir le nombre α de telle sorte que les aires des parties P et T soient égales.

5. Caen-Clermont-Ferrand-Limoges-Nantes-Orléans-Poitiers-Rennes-Tours



Partie 1

Étude du bord supérieur de la voile

Aucune représentation graphique n'est demandée pour cette partie 1.

1. Vérifier que, pour tout nombre réel x positif, $g(x) = x + \dfrac{2x}{x^2+1}$.
2. **a.** En déduire que la droite Δ est asymptote à la courbe Γ.

   b. En déduire également la position de la courbe Γ par rapport à la droite Δ.

Partie 2

Calcul des aires de P et de T

Le nombre α est celui précisé dans le préambule.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\alpha} \dfrac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

   On exprimera le résultat en fonction du nombre positif α.
2. Calculer, en fonction de α, l'aire en cm^2 du domaine délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses et la droite d équation $x = \alpha$.

   On pourra utiliser le résultat établi en 1. de la partie 1.
3. Calculer, en fonction de α, l'aire en cm^2 de la partie tramée T, puis en déduire l'aire de la partie hachurée P.

Partie 3

Détermination du nombre α

Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2+1\right) - \dfrac{x^2}{2}$$

(ln désigne la fonction logarithme népérien).

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée, de f sur $[0~;~+\infty[$.

   b. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $x(1-x)$ sur $[0~;~+\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f (on admettra que la limite en $+\infty$ de f est $-\infty$).

   On ne demande pas de représenter f.

2. **a.** Montrer que sur l'intervalle $[1\,;\,10]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α.
   Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   b. Démontrer l'égalité $\ln\left(\alpha^2+1\right) = \dfrac{\alpha^2}{2}$.
   En déduire que, pour cette valeur α, les aires des parties P et T sont égales et indiquer la solution du problème posé en préambule.

Baccalauréat B Bordeaux[6] juin 1994

EXERCICE 1 **5 points**

1. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{l c l}x-3y & = & 2\ln 2\\ x+y & = & 4\ln 2\end{array}\right.$
2. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\ln 16} \dfrac{\text{e}^x+3}{\text{e}^x+4}\,\text{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\ln 16} \dfrac{1}{\text{e}^x+4}\,\text{d}x$.
   Calculer $I-3J$ et $I+J$. En déduire les valeurs exactes de I et J.

EXERCICE 2 **5 points**

Le tableau ci-dessous donne l'évolution des surfaces cultivées en avoine (en milliers d'hectares) en France de 1970 à 1990.

Année	1970	1975	1980	1985	1990
Rang de l'année x_i	0	5	10	15	20
Superficie en milliers d'ha y_i	805	629,7	534,3	431	218

Source : *Quid 1993*

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\,;\,y_i\right)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : en abscisse 0,5 cm pour 1 unité, en ordonnée 2 cm pour 100 milliers d'hectares).
2. Le détail des calculs n'est pas demandé.
   a. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage, la variance de x, la variance de y et la covariance σ_{xy}.
   b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. En donner l'arrondi au millième.
   Un ajustement affine est-il justifié ?

PROBLÈME **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(2x^2-3x\right)\text{e}^x$$

et C sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (On admet que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x^n\text{e}^x\right) = 0$ pour tout entier naturel n.)
   En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe.
2. **a.** Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
   b. Dresser le tableau de variations de f.
3. **a.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.
   b. Donner l'équation de la tangente T à C en 0.
4. Construire dans le repère $\left(\text{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ la droite T et la courbe C.

6. Caen-Clermont-Ferrand-Limoges-Nantes-Orléans-Poitiers-Rennes-Tours

5. Soit m un réel. Discuter graphiquement l'existence, le nombre et le signe des solutions de l'équation :

$$\left(2x^2 - 3x\right)\text{e}^x = m.$$

6. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

   b. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\text{e}^x.$$

   Déterminer a, b et c réels tels que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   c. Calculer l'aire, en cm^2, de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 0$.
   On donnera la valeur exacte et l'arrondi au centième.

Baccalauréat A1 et B Antilles–Guyane juin 1994

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Vérifier que, pourtour x élément de $\mathbb{R} - \{-2\,;\,0\,;\,2\}$, on a :

$$\frac{4}{x\left(x^2-4\right)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+2)} + \frac{1}{2(x-2)}.$$

2. Trouver une primitive sur $]2\,;\,+\infty[$ de la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{4}{4\left(x^2-4\right)}.$$

3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\int_3^4 \frac{8x\ln x}{\left(x^2-4\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

On donnera les résultats sous forme décimale arrondie au millième

Voici quelques vers d'un poème de Pablo Neruda :

Parmi les plumes qui effraient, parmi les nuits
Parmi les magnolias, parmi les télégrammes,
Parmi le vent du sud et l'ouest marin,
te voici qui viens en volant.

On recopie chacun des 29 mots de cette strophe (« l' » compte pour un mot) sur un carton que l'on place dans une urne.

a. On tire simultanément et au hasard trois cartons parmi les 29.

i. Calculer la probabilité d'obtenir ensemble les trois mots : « parmi, les, plumes « .

ii. Quelle est la probabilité de tirer au moins une fois le mot « parmi » ?

b. On tire maintenant un seul carton de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot « parmi » ?

On répète l'expérience 3 fois avec remise du carton tiré dans l'urne.

Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois le mot « parmi ».

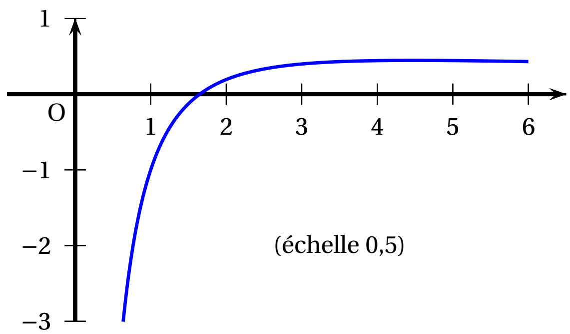
Problème **5 points**

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

La courbe Γ ci-dessous représente la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,6]$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x - 1}{x}.$$



a. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de Γ et de l'axe des abscisses.

b. Étudier graphiquement sur l'intervalle $]0\,;\,6]$ le signe de $f(x)$.

c. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,6]$ par :

$$F(x) = (\ln x)^2 - \ln x.$$

i. Montrer que F est la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.

ii. Donner l'aire en cm^2 du domaine plan limité par la courbe Γ, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.
On en donnera une valeur arrondie à l'unité.

Partie B

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction F définie au A- 3. On désigne par (C) la courbe représentative de F dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ ayant pour unité graphique 2 cm.

a. Déterminer la limite de F en 0.

b. En utilisant la partie A, donner le sens de variation de F puis dresser son tableau de variation.

c. Après avoir factorisé $F(x)$, résoudre l'équation : $F(x) = 0$.
Interpréter graphiquement le résultat.

d. Établir une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

e. Calculer les valeurs approchées à 0,1 près de $F(x)$ pour les valeurs suivantes de x : $0,25\,;\,0,5\,;\,\sqrt{\text{e}}\,;\,\text{e}\,;\,4\,;\,6$.

f. Tracer la tangente (T) puis la courbe (C) dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie C

Calcul d'aire

1 1 (e-x)

a. Vérifier que, pour tout x de $I =]0\,;\,+\infty[$,

$$\frac{1}{3\,(\text{e}^x - 1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{\text{e}^{-x}}{1 - \text{e}^{-x}}\right).$$

En déduire une primitive de la fonction définie par $f(x) - 2x$, sur I.

b. i. Soit λ un réel de l'intervalle $J = \left[\dfrac{3}{2}\,;\mathrm{e}^2\right]$.

Montrer que l'aire, en cm^2, de la partie du plan limitée par les deux droites d'équations $x = \ln\dfrac{3}{2}$ et $x = \ln\lambda$, la droite D et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à :

$$\frac{25}{3}\left[3\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right].$$

ii. Calculer λ pour que cette aire soit égale à $\dfrac{25}{6}$.

(On donnera la valeur exacte de λ, puis une valeur décimale apprrochée à 10^{-2} près par défaut.)

Baccalauréat A1 Centres étrangers juin 1994

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et, pour tout } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \frac{3+u_n}{2}.$$

a. Calculer u_2 et u_3.
La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier vos réponses.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = 3 - u_n$.

i. Montrer que la suite (v_n) ainsi définie est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
Exprimer v_n en fonction de n .

ii. En déduire u_n en fonction de n.

iii. Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Une urne A contient trois boules : 1 rouge, 1 bleue et 1 noire.
Une urne B contient trois boules : 1 rouge et 2 noires.
Une urne C contient trois boules : 2 bleues et 1 noire.
On tire une boule, au hasard, de chaque urne.
On suppose que, dans chaque urne, les tirages sont équiprobables.

a. i. Quelle est la probabilité P0 de n'obtenir aucune boule noire ?

ii. Quelle est la probabilité P1 d'obtenir exactement 1 boule noire ?

iii. Quelle est la probabilité P2 d'obtenir exactement 2 boules noires ?

iv. Quelle est la probabilité P3 d'obtenir 3 boules noires ?

b. Si on tire exactement 1 boule noire, on perd 1 point.
Si on tire 0 ou 2 boules noires, on gagne 0 point.
Si on tire 3 boules noires, on gagne 3 points.

i. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à tout tirage associe le gain réalisé.

ii. Calculer l'espérance mathématique de X.
La règle du jeu est-elle favorable au joueur ?

PROBLÈME **5 points**

La courbe (C) donnée ci-après représente dans le repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\text{e}^{2x} + 8(1-x)\text{e}^{x} - 1.$$

(unités graphiques : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.)

a. Par une lecture graphique :

i. Déterminer les valeurs de la dérivée $f'(x)$ pour $x = 0$ et $x = \ln 4$.

ii. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x = -1$ et pour $x = 1$.

iii. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement, d'amplitude 10^{-1}, du nombre x_0 solution de l' équation $f(x) = 0$.

b. On complète, par le calcul, l'étude de la fonction f

i. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on remarquera que $x\mathrm{e}^{2x} = x\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{x}$). En déduire que la courbe (C) admet une asymptote que l'on précisera.

ii. Montrer que, pour tout x non nul,

$$f(x) = x\mathrm{e}^{2x}\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{8}{x\mathrm{e}^{x}} - \frac{8}{\mathrm{e}^{x}} - \frac{1}{x\mathrm{e}^{2x}}\right).$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

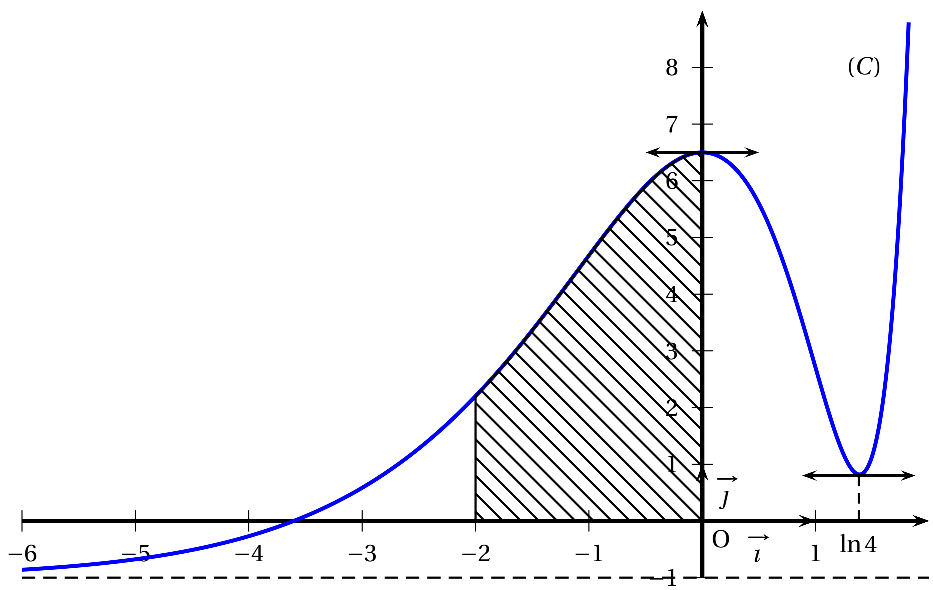
c. Le but de cette partie est de déterminer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré sur le graphique.

i. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}(x-1).$$

Calculer $g'(x)$.

En déduire $\displaystyle\int_{-2}^{0}\left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.



Baccalauréat Centres étrangers B juin 1994

Exercice 1 **5 points**

Une fonction f est définie sur $\left]-1~;~\dfrac{1}{2}\right[$ par

$$f(x) = \ln\left(ax^2 + bx + c\right)$$

avec a, b, c réels.On suppose que son tableau de variations est le suivant :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$		0			
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	0		0 $\searrow$	$\ln\frac{5}{8}$	$\Vert$

a. En utilisant les données numériques du tableau, déterminer a, b et c.

b. Calculer $f'(x)$ et résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

c. Vérifier que le sens de variation de la fonction f obtenue est bien celui indiqué dans le tableau. Donner la valeur exacte du maximum de f.

Exercice 2 **5 points**

Toutes les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules rouges.

Un joueur extrait simultanément trois boules de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

a. À l'issue d'un tirage de trois boules :

si aucune boule n'est rouge, le joueur perd 10 francs ; si une seule boule est rouge, le joueur gagne 5 francs ; si deux boules sont rouges, le joueur gagne 20 francs.

X est la variable aléatoire qui associe le gain algébrique du joueur à l'issue d'un tirage.

Donner la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance mathématique E(X).

b. Le joueur joue deux fois de suite selon les mêmes règles en remettant dans l'urne, après chaque tirage, les trois boules extraites.

Y est la variable aléatoire qui associe le gain algébrique du joueur à l'issue des deux tirages.

Donner les valeurs possibles pour Y.

Déterminer la probabilité que le joueur gagne exactement 10 francs à l'issue des deux parties.

(On pourra s'aider d'un arbre.)

Problème **10 points**

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2}\text{e}^{2x}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 8 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée.

a. i. Déterminer la limite de f en 0.
En déduire une asymptote à la courbe représentative C de f.

ii. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
On pourra vérifier que $f(x) = 4\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)\dfrac{\text{e}^{2x}}{2x}$.

b. i. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{2\left(2x^2-2x+1\right)}{x^3}\text{e}^{2x}.$$

ii. Étudier le sens de variation de f.

iii. Dresser le tableau de variations de f.

c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et trouver le signe de $f(x)$ sur $]0~;~+\infty[$.

d. Écrire une équation de la tangente T à C au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

e. Tracer C et T.

f. i. Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\text{e}^{2x}}{x}.$$

Calculer $g'(x)$.
En déduire l'ensemble des primitives de f sur $]0~;~+\infty[$.

ii. Calculer, en cm^2, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.
On donnera la valeur exacte de A et sa valeur décimale approchée à 0,01 près par excès.

Baccalauréat A1 et B Asie juin 1994

EXERCICE 1 **4 points**

Un jeu consiste à lancer simultanément deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 (un dé vert et un dé rouge), et à lire les points marqués sur chacune des faces supérieures. Chaque face a la même probabilité d'apparaître.

Les résultats sont donnés sous la forme d'un couple, le premier nombre correspondant aux points marqués sur le dé vert. Par exemple : (2 ; 5) signifie 2 sur la face supérieure du dé vert et 5 sur celle du dé rouge. La somme S des points marqués est alors 7.

a. Combien y a-t-il de couples possibles ?

b. i. Quelle est la probabilité p_1 pour que la somme S des points marqués soit un multiple de 5 ?

ii. Quelle est la probabilité p_2 pour que la somme S des points marqués soit un multiple de 2 qui ne soit pas multiple de 5 ?

c. Un joueur gagne 3 F si la somme S est un multiple de 5 et 2 F si S est un nombre pair qui n'est pas multiple de 5. Il perd 4 F dans les autres cas. On appelle X la variable aléatoire représentant en francs la somme gagnée ou perdue ($X > a$ si le joueur gagne, $X < a$ si celui-ci perd).

Déterminer la loi de probabilité de X et l'espérance mathématique $\text{E}(X)$.

Le jeu est-il avantageux pour le joueur ?

EXERCICE 2 SÉRIE B **4 points**

Le tableau suivant représente l'indice des prix à la consommation.

Année x	1970	1972	1974	1976	1978	1980	1982	1983	1984
Indice y	100,0	112,0	136,7	167,5	199,8	251,8	316,1	345,5	371,8

(Source : INSEE.)

a. i. Représenter le tableau par un nuage de points dans un repère orthogonal (on prendra 1 cm pour représenter 2 années sur l'axe des abscisses et 1 cm pour représenter 20 points d'indice sur l'axe des ordonnées).

ii. Calculer les coordonnées du point moyen à 10^{-1} près.

b. i. Calculer le coefficient de corrélation linéaire à 10^{-3} près. L'interpréter.

ii. Rechercher, en utilisant la méthode des moindres carrés, une droite d'ajustement linéaire $y = ax + b$.

Tracer cette droite dans le repère précédent (aucun tableau de calcul n'est exigé ; les coefficients a et b seront donnés à 10^{-1} près mais tous les calculs intermédiaires devront être effectués avec la précision de la calculatrice).

iii. Quel indice aurait-on pu prévoir pour 1988 avec cet ajustement ?

PROBLÈME **12 points**

Soit la fonction f définie sur $]-\infty~;~1]$ par :

$$f(x) = (5x-2)\mathrm{e}^{x} - 3x - 2.$$

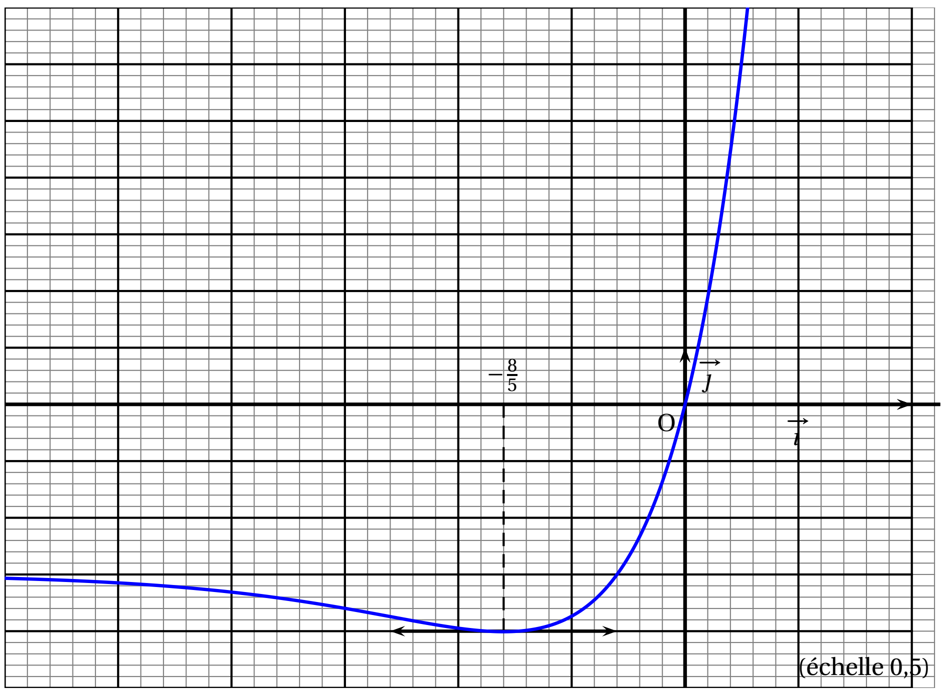
Le plan P est rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm sur (Ox) et 1 cm sur (Oy).
C est la courbe représentative de f dans ce repère.
Le but de ce problème est l'étude de f et le calcul d'une aire liée à f.

PARTIE A
Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]-\infty~;~1]$ par

$$g(x) = (5x+3)\mathrm{e}^{x} - 3$$

et représentée ci-dessous par la courbe Γ.



Utiliser le graphique pour :

a. Donner le signe de $g(x)$.

b. Donner la limite de g lorsque x tend vers $(-\infty)$ sachant que la droite d'équation $y = -3$ est une asymptote à la courbe.

c. Construire le tableau de variation de g en précisant la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près du minimum.

PARTIE B
Étude de *f*

a. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = g(x)$. En déduire le signe de $f'(x)$ en fonction de x.

b. Déterminer la limite de f en $(-\infty)$ et dresser le tableau de variation de f.

c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = -3x - 2$ est une asymptote à la courbe C lorsque x tend vers $(-\infty)$.

d. Étudier les positions relatives de C et de Δ.

e. Tracer, dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ la droite Δ et la courbe C.

PARTIE C
Calcul d'aire

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I = \int_{-3}^{-2} (5x - 2)\text{e}^x\,\text{d}x.$$

b. En déduire l'aire A en cm^2 du domaine limité par la courbe, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -2$.
Le résultat sera donné à 10^{-2} près.

∽ Baccalauréat A1 Polynésie ∾
juin 1994

EXERCICE 1 **4 points**

On veut ranger trois boules distinctes numérotées de 1 à 3 dans deux cases A et B. On suppose que chacune des cases peut contenir de zéro à trois boules. La place des boules dans les cases est considérée comme sans importance.

a. Montrer qu'il y a 2^3 rangements possibles.

b. On suppose que tous les rangements ont la même probabilité de se réaliser. Calculer les probabilités des évènements suivants :

E : « toutes les boules sont dans la case A »

F : « il n'y a pas de boule dans la case A »

G : « A contient la boule portant le numéro 2 ».

c. Soit X la variable aléatoire qui, à tout rangement associe le nombre de boules contenues dans la case A.

i. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

ii. Calculer l'espérance mathématique de X.

N. B. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x - \mathrm{e}^x$$

et C_1 sa courbe représentative.

a. Calculer $g'(x)$. Étudier les variations de g, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ (on pourra mettre x en facteur) puis déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

Dresser le tableau de variation de g.

b. Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à C_1 et préciser la position de C_1 par rapport à D.

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \mathrm{e}^x.$$

Soit C_2 sa courbe représentative.

a. Montrer que $f'(x) = g(x)$. Déduire de la partie A le signe de $f'(x), x \in \mathbb{R}$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (on pourra mettre x^2 en facteur), puis déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Dresser le tableau de variation de f.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$, cette solution appartenant à $[-1 ; 0]$.

Partie C

a. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. En déduire la position de C_2 par rapport à C_1·

b. Construire D, C_1 et C_2 dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

c. Déterminer en cm^2 l'aire de la portion du plan comprise entre les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

Baccalauréat B Polynésie
juin 1994

Exercice 1 **5 points**

Le tableau ci-dessous présente la répartition des ménages en France en 1982 par catégories socio-professionnelle et selon le nombre d'enfants.

La catégorie socio-professionnelle (C.S.P.) est celle de la personne de référence. Les nombres de ménages sont donnés en milliers.

	Nombre d'enfants							
	0	1	2	3	4	5	>5	TOTAL
Agriculteurs exploitants	480	146	119	52	14	4	1	816
Artisans, commerçants, chefs d'entreprise	634	285	232	72	15	4	2	1244
Cadres, professions intellectuelles supérieures	737	330	323	102	18	3	1	1 514
Professions intermédiaires	1 259	608	504	136	21	4	1	2 533
Employés (y compris personnels des services)	1 307	468	315	99	22	6	3	2 220
Ouvriers (y compris ouvriers agricoles)	2 156	1 184	930	423	137	54	36	4 920
Retraités	4 822	77	18	5	2	1	1	4 926
Autres personnes sans activité professionnelle	1 177	119	65	32	14	6	4	1 417
TOTAL	12 572	3 217	2 506	921	243	82	49	19 590

Source : recensement de 1982 - Sondage au 1/20

a. D'après ce tableau, quelles sont les probabilités (arrondies à 10^{-2} près)

i. qu'un ménage dont la personne de référence est dans la catégorie Ouvriers ait 2 enfants ?

ii. qu'un ménage qui a 2 enfants soit dans la catégorie Ouvriers ?

iii. qu'un ménage qui a 2 enfants ne soit pas dans la catégorie Ouvriers ?

iv. qu'un ménage soit dans la catégorie Ouvriers et ait 2 enfants ?

b. i. Calculer les fréquences marginales du caractère « Nombre d'enfants » (arrondies à 10^{-3} près).

ii. Quelle est la probabilité qu'un ménage pris au hasard ait au minimum 2 enfants ?

c. On interroge 10 ménages sur leur catégorie socio-professionnelle et le nombre d'enfants qu'ils ont.

Les réponses données par chacun de ces ménages sont supposées indépendantes de celles des autres.

La probabilité de l'évènement « Ouvrier sans enfant » est : $p = 0,11$.

Quelle est la probabilité (arrondie à 10^{-2} près) que 3 des 10 ménages interrogés soient dans la catégorie Ouvriers et n'aient pas d'enfants ?

EXERCICE 2 **4 points**

Le tableau donne le nombre de salariés de l'un des constructeurs français d'automobiles, selon les années :

Année	Rang de l'année x_i	Nombre de salariés y_i
1986	1	196 731
1987	2	188 936
1988	3	178 665
1989	4	174 573
1990	5	157 378
1991	6	147 185

Sources : Les Balises de l'Express, M 4326 ; Hors série n° 2

a. représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à la série statistique ci-dessus. Le plan est rapporté à un repère orthogonal, avec les indications suivantes :
- l'unité, sur l'axe des abscisses, est 2 cm pour 1 année.
- l'origine, sur l'axe des ordonnées, correspondant à 147 000 salariés.
- l'unité, sur l'axe des ordonnées, est 0,5 cm pour 1 000 salariés.

b. Le détail des calculs n'est pas demandé.
  i. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
  ii. Écrire une équation de la droite de régression de y en x, par la méthode des moindres carrés. La tracer sur la figure précédente.

c. En supposant que l'évolution continue de façon analogue, estimer le nombre de salariés en 1993.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + (x+2)\text{e}^{-x}.$$

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm). On note C la courbe représentative de f dans P.

a. i. Calculer la limite de f quand x tend vers $-\infty$.
  ii. Montrer qu'on peut écrire :

$$f(x) = x + \frac{x}{\text{e}^x} + \frac{2}{\text{e}^x}.$$

  Calculer la limite de $d(x) = \dfrac{x}{\text{e}^x} + \dfrac{2}{\text{e}^x}$ quand x tend vers $+\infty$.
  En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et une conséquence graphique pour C.
  iii. Soit D la droite d'équation $y = x$.
  Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D et C.
  Étudier, suivant les valeurs de x, la position de C par rapport à D.
  Représenter D.

b. i. Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$, où f' et f'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de f.
  ('On vérifiera que $f''(x) = x\text{e}^{-x}$).

ii. Recopier, puis compléter, à l'aide de tous les résultats précédents, le tableau suivant :

s	$-\infty$ 0 $+\infty$
Signe de $f''(x)$	
Sens de variation de f'	
Signe de $f'(x)$	
Variation de f	

iii. Représenter, dans le plan P, le point A de C d'abscisse 0 et la tangente à C en ce point.

Tracer la courbe C.

c. Soit l'équation : $f(x) = 0$ (E).

Calculer $f(-2)$ et $f(-1)$. Justifier que (E) admet une racine unique α dans l'intervalle $[-2 ; -1]$.

d. À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I = \int_{-2}^{0} (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

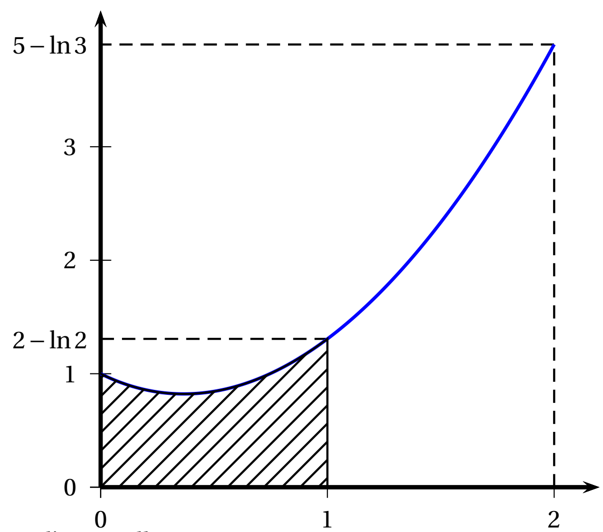
Donner une interprétation graphique du résultat.

↜ Baccalauréat B Antilles–Guyane ↝ septembre 1994

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ ayant comme unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées. La courbe tracée ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$.



On sait que sur l'intervalle $[0\,;2]$, on a :

$$f(x) = x^2 + 1 - \ln(ax + b)$$

où a et b sont deux nombres réels positifs.

a. i. En utilisant les points A et B placés sur le graphique montrer que les réels a et b sont solutions du système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b & = & 2\\ 2a+b & = & 3. \end{array}\right.$$

ii. Déterminer alors $f(x)$.

b. Au moyen d'une intégration par parties calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \ln(x+1)\,\text{d}x.$$

Indication : on posera $u'(x) = 1$ et on remarquera que pour $x \neq -1$, on a :

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

c. Soit $\mathscr{A}$ l'aire en cm^2 du domaine hachuré sur la figure.

Exprimer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ à l'aide notamment d'un logarithme.

En donner ensuite une valeur approchée.

EXERCICE 2 SÉRIE B **5 points**

On dispose de deux urnes U et V et d'un jeu de 32 cartes ; l'urne U contient trois boules blanches et cinq boules noires, indiscernables au toucher ; l'urne V contient six boules blanches et quatre boules noires, indiscernables au toucher.

Les questions 1. *et* 2. *sont indépendantes.*

a. Une première expérience consiste à tirer une boule de l'urne U puis une boule de l'urne V.
Calculer la probabilité de tirer :
  i. deux boules noires ;
  ii. deux boules de couleurs différentes.

b. On réalise maintenant une deuxième expérience consistant en le tirage d'une carte du jeu suivi du tirage d'une boule dans l'une des urnes.
Une carte est une figure si c'est un ROI, une DAME ou un VALET. Il y en a douze.
On tire une carte du jeu ; si cette carte est une figure, on tire une boule de l'urne U.
Si la carte n'est pas une figure alors on tire une boule de l'urne V.
On note F l'évènement « la boule provient de l'urne U », G l'évènement « la boule provient de l'urne V » et B l'évènement « la boule tirée est blanche ».
  i. Montrer que $p(B/F) = \dfrac{3}{8}$. En déduire $p(B \cap F)$.
  ii. Calculer de même $p(B \cap G)$.
  iii. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 4x + 3\right).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

a. Calculer les limites de f en -1, -3, $+\infty$ et $-\infty$.

b. Calculer la fonction dérivée de f.

c. Déterminer le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

d. Construire $\mathcal{C}_f$.

e. Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

f. Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x - 1.$$

  i. Calculer la dérivée de g ; en déduire le sens de variation de g ainsi que son tableau de variations.
  ii. Montrer que sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}~;~6\right]$ l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$ admet une solution unique notée α.
  iii. Calculer $g(-0,2)$ et $g(-0,1)$ au centième près. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.

Baccalauréat Inde–Liban A1 et B septembre 1994

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une population est constituée de 100 personnes (40 hommes et 60 femmes), telles que :

50 ont les yeux bleus,

60 % des hommes ont les yeux bleus.

On tire au sort une personne. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.

Calculer, sous forme de fractions, les probabilités des évènements suivants :

A : « avoir choisi un homme »

B : « avoir choisi un homme aux yeux bleus »

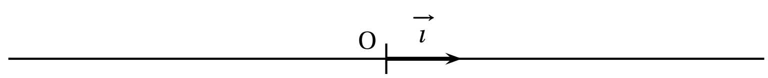
C : « avoir choisi une femme aux yeux bleus »

D : « avoir choisi une personne aux yeux bleus, sachant que c'est une femme »

E : « avoir choisi une femme, sachant que c'est une personne ayant les yeux bleus ».

EXERCICE 2 SÉRIE B **6 points**

Un pion se déplace par sauts successifs sur la droite Δ munie du repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\right)$.



Son point de départ est le point O.

Deux types de sauts sont possibles :

D : 2 unités vers la droite,

G : 1 unité vers la gauche.

Les sauts successifs sont supposés indépendants les uns des autres, et chaque type de saut a la même probabilité d'être effectué.

On suppose que le pion va effectuer 3 sauts successifs.

a. Donner la liste des différents parcours possibles. On pourra, éventuellement, dessiner « l'arbre des parcours », et désigner chaque parcours à l'aide d'un triplet, par exemple : (D, D, G) signifie que le pion s'est déplacé d'abord deux fois vers la droite, puis une fois vers la gauche.

b. Pour chaque parcours trouvé, préciser l'abscisse du point occupé par le pion après les 3 sauts.

c. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque parcours, associe l'abscisse du point où aboutit le pion. Donner la loi de probabilité de X, et son espérance mathématique.

PROBLÈME **10 points**

Le but de ce problème est l'étude de la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x-1)\ln x}{x},$$

sa représentation graphique et le calcul d'une aire qui lui est liée.

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
La courbe représentative de f dans P est notée $\mathscr{C}$.

Étude de f

a. i. Calculer la limite de f en 0.
Quelle en est la conséquence graphique ?
ii. Calculer la limite de f en $+\infty$.

b. On note f' la fonction dérivée de f
Montrer que : $f'(x) = \dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2}$.

c. Déterminer le signe de la somme : $(x - 1) + \ln x$, lorsque $0 < x < 1$, puis lorsque $x > 1$.

d. En déduire le tableau de variation de f.

Courbe représentative de f

a. Déterminer, selon les valeurs de x, le signe de la différence $d(x) = f(x) - \ln x$.

b. Soit Γ la courbe représentative, dans P, de la fonction ln. Interpréter géométriquement le nombre $d(x)$, et déduire, de la question précédente, la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

c. Tracer Γ, puis $\mathscr{C}$.

Calcul d'une aire

a. Hachurer la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = 1$, $x = \text{e}$, et les deux courbes précédentes.

b. Déterminer une primitive de la fonction définie par $g(x) = (\ln x)x$.

c. En déduire l'aire, en cm^2, de la partie hachurée.

ൟ Baccalauréat A1 et B Métropole septembre 1994 ൟ

EXERCICE 1 **5 points**

Un document statistique donne les renseignements suivants, concernant la région Rhône-Alpes :

« La population totale augmente régulièrement de 1,2 % par an ; La population agricole diminue régulièrement de 3 % par an.

Au 1er janvier 1990, la population totale est de 4 650 000 habitants, et la population agricole représente 9 % de la population totale. »

a. i. Quelle était la population théorique totale au 1er janvier 1991 ?

ii. Quelle était celle au 1er janvier 1992 ?

iii. On désigne par $p(n)$ la population totale prévue au 1er janvier $(1990+n)$, où n est un entier positif.

Démontrer que $p(n) = (1,012)^n \times p(0)$.

iv. Quelle population totale peut-on prévoir au 1er janvier 1995 ?

b. i. Quelle est la population agricole au 1er janvier 1990 ?

ii. On désigne par $a(n)$ la population agricole au 1er janvier $(1990+n)$. Calculer $a(n)$.

iii. Quelle population agricole peut-on prévoir au 1er janvier 1995 ?

c. i. Exprimer le rapport $r(n) = \dfrac{a(n)}{p(n)}$ en fonction de n.

ii. Calculer la valeur minimale de n pour laquelle $r(n) \leqslant 0,03$.

EXERCICE 2 SÉRIE B **5 points**

On s'intéresse aux visiteurs de la « Tour Mathématiques ».

Cette tour a trois étages. Elle est desservie par un ascenseur et par un escalier.

Neuf visiteurs sur dix utilisent l'ascenseur et, parmi ceux-ci :

— la moitié va au troisième étage ;
— un tiers va au deuxième étage ;
— les autres vont au premier étage.

Les autres visiteurs utilisent l'escalier, et, parmi ceux-ci :

— la moitié va au deuxième étage ;
— les autres vont au premier étage.

a. On interroge un visiteur, au hasard, à la sortie de la tour. Quelle est la probabilité pour que :

i. il soit allé au deuxième étage, en ascenseur ?

ii. il soit allé au deuxième étage ?

iii. il soit monté à pied, sachant qu'il est allé au deuxième étage ?

(On donnera les valeurs exactes des résultats.)

b. Les tarifs affichés pour la visite de la tour sont les suivants :

Ascenseur :
Premier étage . . . . 17 F
Deuxième étage . . . . 34 F
Troisième étage . . . . 51 F
Escalier, quel que soit l'étage . . . . . . 7 F

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque visiteur, associe le prix qu'il a payé pour la visite.

i. Déterminer la loi de probabilité de X.

ii. Calculer son espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$, sa variance $V(X)$ et son écart-type.

PROBLÈME **10 points**

Le but de ce problème est la représentation graphique de la fonction f définie dans $]2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - 3 - \frac{\ln x}{x-2}$$

dans le plan P muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

ÉTUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE

Soit g la fonction définie sur $I =]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \frac{2}{x} - \ln x.$$

a. Montrer que $g'(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$.

b. Dresser le tableau de variations de g sur I, et en déduire le signe de $g(x)$ sur I. On ne demande aucun calcul de limite.

Partie B

ÉTUDE DE f ET DE SA COURBE REPRÉSENTATIVE C DANS P

a. Calculer la limite de f pour la valeur 2. Quelle est la conséquence graphique ?

b. i. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-2} = 0$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

ii. Montrer que la droite D d'équation $y = x - 3$ est asymptote à C. Montrer que C est située au-dessous de D.

c. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

Vérifier que $f'(x) = 1 - \dfrac{g(x)}{(x-2)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f.

d. Dans le plan P, construire D, puis en tenant compte des résultats obtenus dans les questions précédentes, construire C.

e. i. On constate graphiquement que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans l'intervalle $]3\,;\,4[$, une solution unique, α.

Justifier rigoureusement ce résultat.

ii. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Justifier.

Baccalauréat A1 et B Polynésie septembre 1994

EXERCICE 1 **5 points**

Marie et Thomas participent, avec 18 autres personnes, à un stage sportif en montagne où leur sont proposées plusieurs randonnées en vélo tout terrain. Les organisateurs du stage ne disposent que de 15 vélos. Avant chaque randonnée ils choisissent donc au hasard 15 personnes parmi les 20 stagiaires pour former un groupe de randonnée.
On supposera dans tout l'exercice que chaque stagiaire a la même probabilité d'être choisi, et que les divers choix de groupes de randonnée sont indépendants les uns des autres.

a. i. Calculer le nombre de groupes de randonnée différents que les organisateurs peuvent former.

ii. On note A l'évènement « Marie participe à la première randonnée ». Montrer que la probabilité de A est égale à $\dfrac{3}{4}$.

b. On note B l'évènement « Marie et Thomas ne participent pas ensemble à la première randonnée ». Montrer que la probabilité, de B est égale à $\dfrac{17}{38}$.

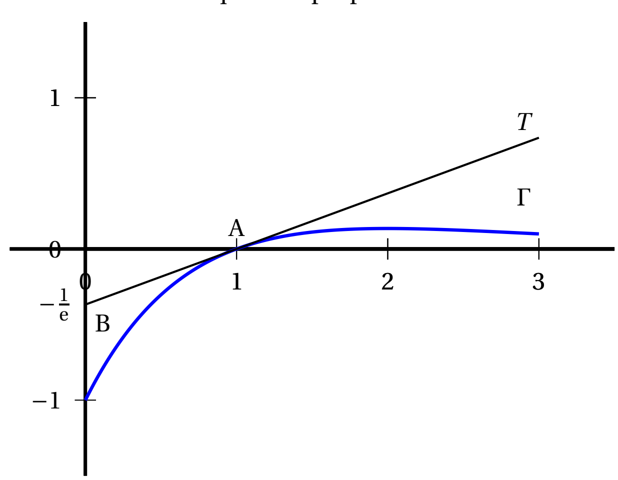
c. Le résultat de cette question sera donné sous forme de fraction irréductible.
Il y a en tout cinq randonnées organisées. On note C l'évènement « Marie participe à au moins une randonnée » et D l'évènement « Marie participe à exactement trois randonnées ».
Calculer la probabilité de l'évènement $C \cap D$.

EXERCICE 2 SÉRIE B **4 points**

Le plan P est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.
La courbe Γ, tracée ci-dessous à une échelle réduite, représente une fonction numérique f définie sur $[0\,;\,3]$ par

$$f(x) = (ax+b)\text{e}^{-x},$$

où a et b sont deux nombres qu'on se propose de déterminer.



a. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.

b. Le point A(1 ; 0) est un point de Γ. Quelle relation entre a et b en déduit-on ? Cette relation sera notée (1).

c. La droite T est tangente en A à Γ et passe par le point B$\left(0\ ;\ -\dfrac{1}{\text{e}}\right)$. Quel est son coefficient directeur ?
Quelle relation entre a et b en déduit-on ? Cette relation sera notée (2).

d. Montrer que $f(x) = (x-1)\text{e}^{-x}$.

PROBLÈME **5 points**

a. QUESTION PRÉLIMINAIRE

Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x$$

i. Calculer $g'(x)$, où g' désigne la fonction dérivée de g. Étudier son signe.

ii. Établir le tableau de variations de g. En déduire le signe de $g(x)$ (on ne demande pas le calcul des limites de g aux bornes de $\mathcal{D}_g$).

b. ÉTUDE DE LA FONCTION NUMÉRIQUE f DÉFINIE PAR :

$$f(x) = 2x - 1 + 2\frac{\ln x}{x}.$$

i. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_g$.

ii. Calculer $f'(x)$ et, en utilisant la question préliminaire déterminer son signe.

iii. Établir le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_g$.

iv. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $J = \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ une solution unique, notée x_0.

c. COURBE REPRÉSENTATIVE DE f ET CALCUL D'AIRE

Le plan P est rapporté au repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées. La courbe représentative de f est notée $\mathcal{C}$.

i. Calculer $f(x) - (2x-1)$, et montrer que la droite D d'équation $y = 2x-1$ est asymptote à $\mathcal{C}$. En déduire la position relative de D et $\mathcal{C}$.

ii. Construire D et $\mathcal{C}$ sur la figure et hachurer la partie du plan définie par $x_0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 2x-1$. On se propose dans la suite de calculer l'aire A de cette partie du plan.

iii. Exprimer A à l'aide d'une intégrale.

iv. On pose $\varphi(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$, et $u(x) = \ln x$. Calculer $u'(x)$ et écrire φ en fonction de u et de u'. En déduire une primitive de φ, puis l'expression de A en fonction de x_0.

v. On rappelle que $f(x_0) = 0$. Utiliser cette relation pour montrer que $A = \dfrac{1}{4}x_0^2\left(1 - 2x_0^2\right)$ (en unités d'aire).

Baccalauréat A1 Sportifs de haut-niveau septembre 1994

EXERCICE 1 **5 points**

Soit f la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par

$$f\,:\,x \longmapsto \frac{5-x^2}{(x+2)^2}.$$

a. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que pour tout $x \in]-2\,;\,+\infty[$,

$$f(x) = a + \frac{b}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}.$$

b. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

PROBLÈME **10 points**

Le but du problème est d'étudier l'équation :

$$(E)\,:\,(\ln x)^2 - 2\ln x + 2 - x = 0, \quad \text{où } x > 0$$

en utilisant une méthode d'approximation.
À cet effet, on considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x + 2.$$

On note C la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

Partie A

Étude de la fonction *f*

a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer la dérivée f' de f.

c. Étudier le signe de $\ln x - 1$. En déduire le signe de $f'(x)$.

d. Dresser le tableau de variation de f.

e. Tracer la courbe C en précisant la tangente T au point A d'abscisse 1.

Partie B

Étude de l'équation (*E*)

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

L'équation (E) est donc équivalente à l'équation $g(x) = 0$.

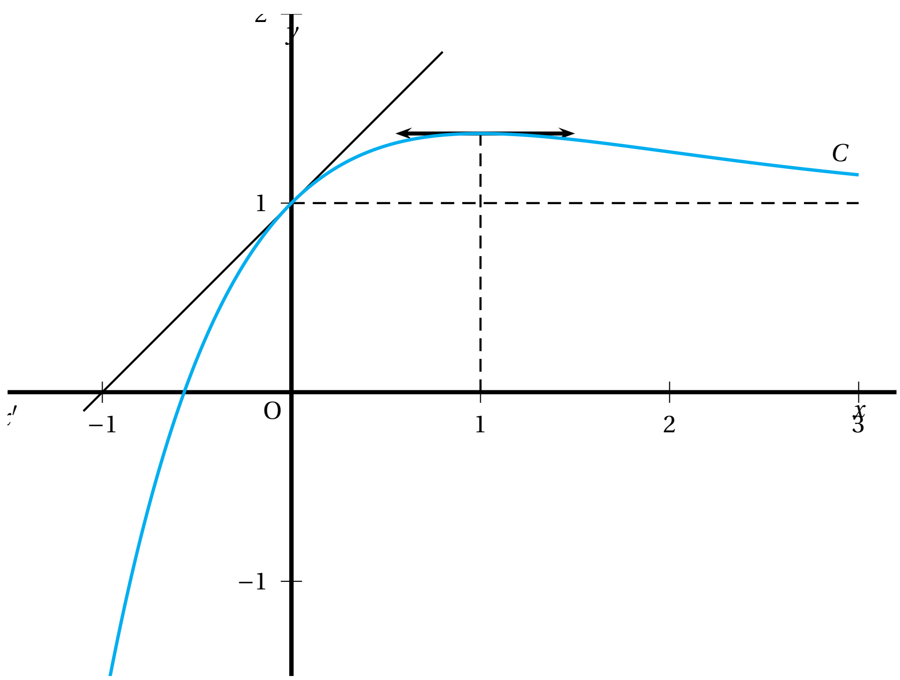
a. Étude graphique
Tracer la droite D d'équation $y = x$. En déduire graphiquement que l'équation (E) a une solution α telle que $1 < \alpha < \mathrm{e}$.

b. Étude de g sur [1 ; e]
Calculer $g(1)$ et $g(e)$.
En utilisant A - 3, montrer que $g'(x) < 0$ sur [1 ; e].

c. Existence et approximation de α
Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule dans l'intervalle [1 ; e].
Établir que $1,42 < \alpha < 1,43$.

PROBLÈME **10 points**

La courbe C représentée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a + bx\text{e}^{-x}$, où a et b sont deux nombres réels.
La droite T est la tangente à la courbe C au point d'abscisse zéro.



Reproduire l'allure de la courbe C sur la copie (repère orthonormal : unité graphique : 2 cm).

a. Lecture graphique.

i. Lire sur le graphique proposé ci-dessus $f(0)$ et $f'(0)$.

ii. En déduire la valeur de a et celle de b.

Dans toute la suite, on prend $f(x) = 1 + x\text{e}^{-x}$.

b. Variations de f

i. Calculer la dérivée f' de f.
Déterminer la tangente à C au point d'abscisse 1.

ii. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

iii. Déterminer la limite de f en $+\infty$; interpréter graphiquement le résultat obtenu.

iv. Dresser le tableau de variations de f.

c. Étude du point d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

i. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule telle que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

ii. On pose $\alpha' = -0,56$. Calculer $f(\alpha')$ à la précision 10^{-4}.
Prouver que $\alpha < \alpha'$ et que $\alpha' - \alpha < 10^{-2}$ (on pourra calculer $f(-0,57)$.

Baccalauréat A1 Amérique du Sud décembre 1994

EXERCICE 1 **5 points**

On considère les 5 suites numériques suivantes pour tout entier naturel n :

(a_n) définie par $a_n = (-1)^n$;
(b_n) définie par $b_n = n\mathrm{e}^{-n}$;
(c_n) définie par $c_n = \dfrac{n+5}{n+1}$;
(d_n) définie par $\left\{\begin{array}{lcl} d_0 & = & 5 \\ \text{et} & & \\ d_{n+1} & = & d_n - 5 \end{array}\right.$
(u_n) définie par définie par $d_n = \ln\left(n^2+n+1\right)$ (où ln représente le logarithme népérien).

On sait que, parmi ces 5 suites,
une et une seule est géométrique ;
une et une seule est minorée par 1 ;
une et une seule est croissante ;
une et une seule converge vers 0.

a. Reproduire et compléter le tableau suivant. en cochant les cases qui correspondent à une réponse « oui » :

	(a_n)	(b_n)	(c_n)	(d_n)	(u_n)
est géométrique					
est minorée par 1					
est croissante					
converge vers 0					

b. Si le tableau ci-dessus était rempli par un dispositif aléatoire qui, ligne par ligne et de manière indépendante, coche au hasard une case unique par ligne, quelle serait la probabilité qu'il y ait au moins une réponse exacte ?

N. B. : « au hasard » signifie qu'il s'agit d'équiprobabilité.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Soit la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - x^3 - 2\ln x$$

où ln représente le logarithme népérien.

a. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

b. Calculer la dérivée de g et établir le tableau de variation de la fonction g.

c. Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.
En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B

Soit la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par : 2

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2} - 2x + 3.$$

Soit $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 4 cm).

a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Calculer la dérivée de f.
Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = 2g(x)$.
En déduire le signe de $f'(x)$, puis le sens de variation de f.
Établir le tableau de variation de f.

Partie C

a. Montrer que la droite D d'équation $y = -2x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

b. Étudier les positions relatives de D et $\mathscr{C}$.

c. Tracer, dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, la droite D et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie D

a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

b. Calculer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \dfrac{3}{2}$.

Baccalauréat B Amérique du Sud décembre 1994

EXERCICE 1 **5 points**

Lors d'un prochain match, l'équipe F aura à affronter l'une des 4 équipes : A, B, C, D.
Un tirage au sort désignera l'équipe adverse de F.

a. Quelle est la probabilité que l'équipe A soit désignée pour affronter F ?

b. Il n'y a pas de match nul.
La probabilité que F gagne si elle affronte A est $0,6$.
Elle est la même si F affronte B. Si F joue contre C, sa probabilité de gagner est $0,7$, mais si F affronte D, la probabilité qu'elle perde le match est $0,8$.
Calculer les probabilités des évènements suivants :
E_1 : « F affronte A et gagne le match »
E_2 : « F affronte C et gagne le match »
E_3 : « F affronte D et gagne le match ».

c. En déduire la probabilité que F gagne le match.

EXERCICE 2 **4 points**

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de cas d'une maladie M, de 1985 à 1991.

ANNÉE	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
Rang x_1 de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Nombre y_i de cas en milliers	29	57	112	189	286	385	418

(Source Organisation Mondiale de la Santé)

a. Représenter graphiquement la série $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal (2 cm pour unité graphique en abscisse ; 1 cm pour 20 milliers de cas en ordonnée).

b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de x et de y.

c. Déterminer une équation dela droite de régression de y en x,sous la forme : $y = mx + p$ où m et p seront arrondis à 10^{-1} près.
Représenter cette droite dans le repère précédent, en faisant apparaître le point moyen G de la série.

d. Combien de cas de la maladie M peut-on prévoir pour 1993, en supposant que l'évolution se poursuive de la même manière ?
On donnera le résultat à 1 000 cas près.

PROBLÈME **11 points**

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3\mathrm{e}^x - 1$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

a. i. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.
$\left(\text{On rappelle que } \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(x^3 \mathrm{e}^x\right) = 0\right)$.

ii. Étudier les variations de f. Dresser son tableau de variations.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0 ; 1]$.
Trouver un encadrement de cette solution d'amplitude 10^{-1}.

c. Construire la courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = -1$.
Préciser la tangente à (C) au point d'abscisse 0 et l'asymptote.

d. i. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 \mathrm{e}^x$.
Vérifier que la fonction G définie par $\mathrm{G}(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) \mathrm{e}^x$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

ii. En déduire l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = -3$.
Donner une valeur approchée de cette aire à 10^{-2} près par excès.

∽ Baccalauréat A1 et B Nouvelle-Calédonie ∾ novembre 1994

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on donnera tous les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Le coffre de jouets d'un enfant contient :

- 7 balles : 2 rouges, 3 bleues et 2 vertes ;
- 18 cubes : 7 rouges, 10 bleus et 1 jaune ;
- 5 voitures : 1 rouge, 1 bleue, 2 vertes et 1 jaune.

a. Dans cette question, l'enfant tire au hasard un objet du coffre.

i. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
A : l'enfant a tiré une balle.
B : l'enfant a tiré un objet rouge.

ii. Déterminer la probabilité pour que l'enfant ait tiré un objet bleu, sachant qu'il a tiré un cube.

b. Dans cette question, l'enfant choisit au hasard, simultanément, deux objets dans le coffre.

i. Déterminer la probabilité de l'évènement suivant :
« Il y a au moins un cube parmi les deux objets choisis. »

ii. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de cubes tirés du coffre.
Déterminer la loi de probabilité de X, et son espérance mathématique.

EXERCICE 2 SÉRIE B **6 points**

Enseignement de spécialité

N. B. : *Le détail des calculs intermédiaires nécessaires à l'obtention des résultats n'est pas exigé.*

Le tableau suivant indique la cote de la voiture FORD « Fiesta 1,1 Fun » suivant le nombre d'années écoulées depuis la date de mise en circulation.

x désigne le nombre d'années écoulées depuis la date de mise en circulation (âge de la voiture).

y désigne la cote de la voiture en millier.

x_i (en année)	1	2	3	4	5
y_i (en milliers de francs)	43	33,6	24,75	19,7	14,7

a. Représenter graphiquement cette série statistique par un nuage de points.
En abscisse : 2,5 cm représentent 1 an.
En ordonnée : 1 cm représente 2 milliers de francs.

b. i. Donner une équation de la droite de régression de y en x. On rappelle que :
la droite de régression de y en x a pour équation : -

$$y-\overline{y}=\frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x^2}\left(x-\overline{x}\right).$$

ii. Tracer cette droite sur le graphique.

iii. Quel est le coefficient de corrélation linéaire entre x et y ? En donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près.

iv. En utilisant le résultat obtenu en 2. a. donner une estimation de la cote y d'une voiture de 6 ans.

c. On se propose de déterminer un nouvel ajustement de ce nuage de points.

On pose $z_i = \ln y_i$.

Pour tous les résultats, on donnera une valeur décimale approchée à 10^{-3} près.

i. Calculer les z_i et dresser le tableau de valeurs de la série double $(x_i\ ;\ z_i)_{1\leqslant i\leqslant 5}$.

ii. Donner une équation de la droite de régression de z en x.

iii. Quel est le coefficient de corrélation linéaire entre z et x ?

iv. À partir de la relation entre z et x obtenue en 3. b. et de l'égalité $z = \ln y$, donner une nouvelle estimation de la cote y d'une voiture de 6 ans.

PROBLÈME **9 points**

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]-4\ ;\ 2[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+4}{2-x}\right)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers -4 puis quand x tend vers 2.

(C) admet-elle des asymptotes ? Si oui, préciser leurs équations.

b. i. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est strictement positif pour tout réel x de l'intervalle $]-4\ ;\ 2[$.

ii. En déduire le tableau de variation de f.

c. Calculer une valeur décimale approchée à 10^{-1} près de $f(x)$ pour les valeurs suivantes de x : -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1.

d. Tracer soigneusement la courbe (C) ainsi que ses asymptotes.

e. Calculer l'abscisse du point A de (C) d'ordonnée 1. En donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

f. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]-4\ ;\ 2[$ par :

$$g(x) = (x+4)\ln(x+4) + (2-x)\ln(2-x).$$

Montrer que $g'(x) = f(x)$.

Calculer l'aire exacte, en cm^2, au domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = -1$ et l'axe des ordonnées.