Baccalauréat ES 1997

L'intégrale de mars à décembre 1997

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

∽ Baccalauréat ES Pondichéry juin 1997 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Sur les 700 salariés d'une usine, 140 sont des cadres, les autres sont des ouvriers.
Des stages sont organisés :

— Chaque salarié participe à un stage au plus.
— 9 % des salariés partent en stage.
— 10 % des ouvriers partent en stage.

Un salarié est choisi au hasard :

1. **a.** Quelle est la probabilité que ce soit un ouvrier ?
   b. Quelle est la probabilité que ce soit un ouvrier partant en stage ?
   c. Quelle est la probabilité que ce soit un cadre partant en stage ?
2. Quel est le pourcentage de cadres partant en stage ?
3. Le stage dure 10 jours pour un ouvrier, et 8 jours pour un cadre. On définit la variable aléatoire X égale au nombre de jours de stage suivis par un salarié de l'usine.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Déterminer la loi de probabilité de X ?
   c. Calculer l'espérance mathématique de cette variable aléatoire. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans un carnet de santé, on peut lire le poids moyen d'un enfant de sa naissance à 12 ans.

Âge en années x_i	0	1	2	4	7	11	12
Poids en kg y_i	3,4	7	10,5	14,5	20,5	33	37,5

Aucun calcul manuel n'est demandé.
Dans cet exercice les résultats seront donnés à 10^{-1} près.
Le plan est rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 année en abscisse, 1 cm pour 2 kg en ordonnée).

1. **a.** Représenter le nuage de point s associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$.
   b. Déterminer et représenter le point moyen de cette série.
2. **a.** Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série $(x_i\ ;\ y_i)$.
   Un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de y en x est-il envisageable ? Pourquoi ?
   b. Donner alors une équation de la droite de régression D de y en x. La tracer sur le graphique précédent.
3. **a.** Déterminer graphiquement, en expliquant votre raisonnement, à partir de quel âge le poids moyen d'un enfant dépasse 25 kg.
   b. Retrouver ce résultat par le calcul en utilisant l'équation de D.

PROBLÈME **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par

$$f(x) = \mathrm{e}^{\left(-\frac{x^2}{8}+x\right)}$$

et on note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. f' étant la fonction dérivée de f, déterminer $f'(x)$, étudier son signe, en déduire le tableau de variation de f.
3. Tracer (C).

Partie B

Une action est introduite en bourse à l'instant $t = 0$. On suppose que la cote de l'action, exprimée en centaines de francs, est :

$$g(t) = f(t) + \mathrm{e}$$

où t (exprimé en mois) appartient à l'intervalle $[0\,;\,12]$ et e est le réel tel que $\ln \mathrm{e} = 1$.

1. Exprimer $g(t)$ en fonction de t.
2. En utilisant les résultats de la partie A, donner le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,12]$.
3. À quel instant la cote de l'action est-elle maximale ? Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de cette cote.
4. Un gestionnaire prudent décide de revendre son action lorsque la cote de celle-ci retombe en dessous de sa valeur initiale.
   a. Déterminer la valeur exacte de la cote de l'action à l'instant $t = 0$.
   b. Pour quelle autre valeur de t l'action retrouve-t-elle cette cote ? Justifier la réponse par le calcul.
5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $g(11)$. En déduire que, pour tout t tel que $11 \leqslant t \leqslant 12$, la cote de l'action est strictement inférieure à 275 F.

Sur les 700 salariés d'une usine, 140 sont des cadres, les autres sont des ouvriers.
Des stages sont organisés : r
— Chaque salarié participe à un stage au plus.
— 9 % des salariés partent en stage.
— 10 % des ouvriers partent en stage.
Un salarié est choisi au hasard.

1. **a.** Quelle est la probabilité que ce soit un ouvrier ?
   b. Quelle est la probabilité que ce soit un ouvrier partant en stage ?
   c. Quelle est la probabilité que ce soit un cadre partant en stage ?
2. Quel est le pourcentage de cadres partant en stage ?
3. Le stage dure 10 jours pour un ouvrier, et 8 jours pour un cadre. On définit la variable aléatoire X, égale au nombre de jours de stage suivis par un salarié de l'usine.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Déterminer la loi de probabilité de X ?
   c. Calculer l'espérance mathématique de cette variable aléatoire. Interpréter ce résultat.

4. Chacun des 10 mots de la phrase « rien ne sert de courir, il faut partir à point » est inscrit sur un carton. On suppose les cartons indiscernables au toucher et on les place dans une urne. On tire au hasard un carton (les tirages sont donc supposés équiprobables).

- Si le mot inscrit sur le carton contient une voyelle, on gagne 10 points.

- Si le mot inscrit sur le carton contient deux voyelles, on perd 20 points.

- Si le mot inscrit sur le carton contient trois voyelles, on gagne 20 points.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de points obtenus (positif ou négatif).

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X et l'écart-type de X.

c. On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique est nulle.

Sans changer les gains obtenus pour les mots contenant une ou trois voyelles, quelle devrait être la perte pour un mot contenant deux voyelles dans un jeu équitable ?

Baccalauréat ES Amérique du Nord juin 1997

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des parfums haut de gamme, qui seront appelés par la suite des originaux.
Il existe sur le marché des contrefaçons qui seront appelées par la suite des copies. On sait que 0,5 % des flacons proposés à la vente sont des copies.
Pour éliminer ces copies, l'entreprise a mis au point un test optique per- mettant, sans rompre le ruban de garantie, de se faire une opinion concernant la conformité du produit.
On sait que :

- la probabilité que le test soit positif (c'est-à-dire qu'il indique qu'il s'agit d'une copie) sachant que le produit est une copie est $0,85$;
- la probabilité que le test soit négatif sachant que le produit est un original est $0,95$.

On tire un flacon au hasard et on le soumet au test.

1. Montrer que :
   a. la probabilité que le produit soit un original est égale à $0,995$.
   b. la probabilité que le test soit positif sachant que le produit est un original est égale à $0,05$.

2. Calculer la probabilité que :
   a. le produit soit une copie et que le test soit positif.
   b. le produit soit un original et que le test soit positif.
   c. le test soit positif.
   d. le produit soit un original sachant que le test est positif.
   e. le produit soit une copie sachant que le test est positif.

3. Exprimer brièvement votre opinion sur la fiabilité de ce test.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une étude statistique a montré qu'un archer de très bon niveau, tirant dans une cible à onze zones numérotées 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, a atteint avec une flèche :

- la zone 10 avec une fréquence de $0,3$
- la zone 9 avec une fréquence de $0,6$
- la zone 8 avec une fréquence de $0,1$.

À chaque flèche tirée est associé un nombre de points égal au numéro de la zone atteinte. On admet que, pour cet archer se présentant à une compétition, les probabilités des évènements
« la flèche marque 10 »
« la flèche marque 9 »
« la flèche marque 8 »
sont respectivement égales aux fréquences observées et que les tirs sont indépendants les uns des autres.
On appelle volée deux tirs successifs d'une flèche.

1. Cet archer tire une volée. On associe à une volée la variable aléatoire X, somme des points marqués à chacun des deux tirs de la volée. On appelle volée réussie toute volée telle que $X \geqslant 19$.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ? Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Vérifier que la probabilité de l'évènement « $X \geqslant 19$ » est $\dfrac{9}{20}$.
   Calculer la probabilité de l'évènement « $17 \leqslant X \leqslant 19$ ».

c. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

2. Cet archer tire trois volées successives, que l'on suppose indépendantes. On considère la variable aléatoire Y, nombre de volées réussies parmi les trois tirées. Calculer la probabilité des évènements suivants :

a. « $Y = 2$ ».

b. « $Y \geqslant 1$ ».

3. Cet archer tire n volées successives, que l'on suppose indépendantes.
Quelle doit être la valeur minimale n_0 de n pour que la probabilité de l'évènement « une volée au moins est réussie » soit supérieure ou égale à 0,999 ?

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 - 1 + 2\ln x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son intervalle de définition.

2. étudier le sens de variation de g (le tracé de la courbe représentative de g n'est pas demandé).

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet le nombre réel 1 comme unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$.

4. De l'étude précédente, déduire le signe de $g(x)$, en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}.$$

1. Montrer que, pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et Γ les courbes représentatives des fonctions f et ln dans un repère orthonormal, $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 4 cm).
étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Γ. Tracer Γ puis $\mathcal{C}_f$.

Partie C

On désigne par Δ le domaine représentant sur le graphique précédent l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & \leqslant & x & \leqslant & 4 \\ f(x) & \leqslant & y & \leqslant & \ln x. \end{array}\right.$$

On note $\mathcal{A}(\Delta)$ l'aire, en cm^2, de Δ.

1. Hachurer Δ sur le graphique précédent.
Exprimer $\mathcal{A}(\Delta)$ sous forme d'une intégrale (le calcul n'est pas demandé).

2. **a.** On considère la fonction h, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

Calculer $h'(x)$. En déduire une primitive, sur $]0\,;\,+\infty[$ de la fonction qui, à x associe $\dfrac{\ln x}{x^2}$.

b. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}(\Delta)$. En donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

∽ Baccalauréat ES Antilles-Guyane juin 1997 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Inde	Koweït	Mauri-tanie	France	Ghana	Congo	Vénézuéla	Japon	Madagascar
X_i	25,7	69,6	17	98,7	42,8	55,4	87,8	100	61,6
Y_i	95	34	127	7,7	90	73	25,1	5	120

D'après Les Chiffres du Monde Universalis - 1990

Dans le tableau ci-dessus, i désigne le numéro de l'observation, X_i désigne le taux d'alphabétisation des femmes (%) et Y_i désigne le taux de mortalité infantile (‰).

1. Construire le nuage de points associé à cette série statistique double, (On prendra 1 cm pour 10 % en abscisse et 1 cm pour 10 ‰ en ordonnée).

   Dans les questions suivantes, le détail des calculs n'est pas demandé.

2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(X_i,\ Y_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant 9$, puis celui de la série $(X_i,\ Y_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant 8$.
   Pour laquelle de deux séries un ajustement affine est-il le plus approprié ? Justifier la réponse.
   Dans la suite on élimine les données concernant Madagascar en considérant la série $(X_i,\ Y_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant 8$.
3. Déterminer une équation de la droite de régression linéaire de Y en X. Tracer cette droite. Donner le résultat à 10^{-2} près par défaut.
4. Si on appliquait le modèle précédent à un pays où le taux d'alphabétisation des femmes est de 61,6 %, quel taux de mortalité infantile le calcul donnerait-il ?
   Le résultat sera donné à 10^{-1} près,

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Une grave maladie affecte le cheptel bovin d'un certain pays, On estime 7 % des bovins atteints, On vient de mettre au point un test pour diagnostiquer la maladie, on a établi que :

— quand un animal est malade, le test est positif dans 87 % des cas ;
— quand un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 98 % des cas.

On note F l'évènement « être malade »et T l'évènement « avoir un test positif ».

1. Calculer la probabilité des trois évènements suivants :
   a. « F et T » ;
   b. « $\overline{F}$ et $\overline{T}$ » ;
   c. « F et $\overline{T}$ ».
2. En déduire la probabilité de T.
3. Quelle est la probabilité pour qu'un animal ayant un test négatif soit malade ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Dans une urne se trouvent :
cinq boules marquées du numéro 10 ;
quatre boules marquées du numéro 15 ;
trois boules marquées du numéro 20,
On tire simultanément trois boules de cette urne, Les tirages sont supposé équiprobables,

1. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   A : « on tire au moins une boule marquée 15 » ;
   B : « ont tire trois boules portant trois numéros différents » ;
   C : « on tire trois boules portant le même numéro » ;
   D : « parmi les trois boules tirées, deux exactement portent le même numéro ».
2. Il faut payer 51 francs pour effectuer un tirage de trois boules, et chaque tirage rapporte en francs la somme des points marqués.
   Montrer que la probabilité d'être gagnant est de $\dfrac{13}{220}$.
3. On effectue cinq tirages successifs de trois boules en remettant les trois boules dans l'urne après chaque tirage.
   Déterminer la probabilité d'être gagnant exactement trois fois. Donner le résultat à 10^{-3} près par excès.

PROBLÈME **11 points**

Enseignement de spécialité

1. Soit P le polynôme tel que
$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1.$$
   Vérifier que $P(x) = (x-1)\left(3x^2 + X + 1\right)$ puis étudier le signe de $P(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par
$$g(x) = x^3 - x^2 + 1 - \ln x.$$
   étudier le sens de variation de g sur $]0~;~+\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.
   En déduire que pour tout $x \in]0~;~+\infty[$, $g(x) > 0$.
3. La fonction f est définie sur $]0~;~+\infty[$ par
$$f(x) = 2\frac{\ln x}{x} + x^2 - 2x + 3.$$
   a. étudier les limites de f en zéro et en l'infini.
   b. Calculer la fonction dérivée de f et exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. En déduire le sens de variation de f.
   c. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0,2~;~4]$ une solution unique α ; déterminer la valeur décimale approchée de α à 10^{-1} près par défaut.
4. Soit un repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unités : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).
   Soit P la courbe d'équation $y = x^2 - 2x + 3$ et soit C la courbe représentative de la fonction f dans ce repère.
   a. Calculer $f(x) - \left(x^2 - 2x + 3\right)$. En déduire la limite quand x tend vers l'infini de $f(x) - \left(x^2 - 2x + 3\right)$. Que peut-on en déduire pour les courbes P et C ?
   b. étudier les positions relatives de P et C.
   c. Déterminer une équation de la tangente T à C au point A d'abscisse 1.
   d. Tracer P, T et C.
5. **a.** En remarquant que $\dfrac{\ln x}{x}$ peut s'écrire $\dfrac{1}{x}\ln x$, déterminer une primitive de la fonction $x \longmapsto 2\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0~;~+\infty[$.
   b. Calculer l'aire, en cm^2, de la partie du plan comprise entre les courbe C et P et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$.

Baccalauréat ES Centres étrangers juin 1997

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans une classe de 30 élèves, 14 sont des filles. Par ailleurs, 8 filles et 4 garçons sont internes. Les autres élèves sont externes.
On choisit un élève au hasard dans cette classe.
On considère les évènements suivants :
A : « l'élève choisi est interne » ;
B : « l'élève choisi est un garçon ».
Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions simplifiées et seront justifiés.

1. Calculer la probabilité de l'évènement A puis de l'évènement B.
2. **a.** Calculer $p(B/A)$, c'est-à-dire la probabilité que l'élève choisi soit un garçon, sachant qu'il est interne.
   b. Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap B$.
3. Calculer $p(A/B)$.
4. Calculer la probabilité de l'évènement $A \cup B$, à partir des questions précédentes, ou par une justification directe.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les calculs peuvent être effectués à la calculatrice ; leur détail n'est pas exigé.

Le tableau ci-dessous donne la charge maximale y_i en tonnes, qu'une grue peut lever pour une longueur x_i en mètres, de la flèche.

Longueur x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	32	35	39	41,7
Charge y_i	10	9	8	7	6	5,5	5	4,5	4	3,5	3,2

1. Les réponses numériques à cette question seront données à 10^{-2} près.
   a. Représenter le nuage de points $M\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ à l'aide d'un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités 1 cm pour 2 mètres en abscisses et 1 cm pour une tonne en ordonnées.
   b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
   c. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Construire cette droite sur le graphique précédent.
   d. Utiliser cette équation pour déterminer la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres.
2. On pose $z_i = \dfrac{1}{y_i}$.
   a. Recopier et compléter le tableau suivant (les z_i seront arrondis à 10^{-3} près.

x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	32	35	39	41,7
z_i	0,100										

   b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z puis une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés (les résultats numériques seront arrondis à 10^{-4} près.
   c. En se fondant sur les résultats obtenus en 2. b, calculer la valeur de z correspondant à $x = 26$; en déduire la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres.

d. Ce résultat vous paraît-il plus satisfaisant que celui de 1. a ? Pourquoi ?

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un lycée, 55 % des élèves sont des filles. Dans ce même lycée, 22 % des filles et 18 % des garçons étudient l'allemand.

1. On choisit au hasard un élève du lycée.

a. Sachant que l'élève choisi est un garçon, quelle est la probabilité qu'il apprenne l'allemand ?

b. Calculer la probabilité que l'élève choisi apprenne l'allemand et qu'il soit un garçon.

c. Montrer que la probabilité que l'élève choisi étudie l'allemand est $p = 0,202$.

2. *Dans cette question les résultats seront donnés à* 10^{-4} *près.*

On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante 5 élèves du lycée. (On suppose que l'effectif du lycée est suffisamment élevé pour que cette expérience soit assimilée à un schéma de Bernoulli.)

a. Quelle est la probabilité que, sur les 5 élèves choisis, aucun n'étudie l'allemand ?

b. Quelle est la probabilité que les 5 élèves étudient l'allemand ?

c. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 élèves étudiant l'allemand ?

PROBLÈME — 10 points

Commun à tous les candidats

Le coût de production, en milliers de francs, de x centaines d'appareils fabriqués par une entreprise est donné par la fonction C, définie par :

$$C(x) = 3x + 25 + \mathrm{e}^{3-0,1x}.$$

1. a. Calculer, en arrondissant à un franc près, le coût de production de 3 centaines d'appareils. Quel est dans ce cas le coût moyen de production, arrondi au franc près, d'un appareil ?

b. Vérifier que lorsqu'on fabrique x centaines d'appareils, le coût moyen, en francs, d'un appareil est $\dfrac{10C(x)}{x}$.

2. Calculer $C'(x)$ et en déduire le sens de variation de C dans l'intervalle $[0\ ;\ 10]$.

3. Chaque appareil est vendu 200 F pièce, mais, en raison de défauts de fabrication et de distribution, seulement 95 % des appareils fabriqués sont effectivement vendus.

a. Montrer que le bénéfice, en milliers de francs, obtenu avec la fabrication de x centaines d'objets est :

$$B(x) = 16x - 25 - \mathrm{e}^{3-0,1x}.$$

b. Calculer $B'(x)$ et étudier le sens de variation de B dans l'intervalle $[0 ; 10]$.

c. Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0 ; 10]$. On note α cette solution.

d. Déterminer un encadrement de α, d'amplitude 10^{-2}.

e. En déduire le nombre entier minimum d'appareils à produire pour réaliser un bénéfice.

f. Quel est, en francs, le bénéfice obtenu en fabriquant 1 000 appareils ? (Arrondir au franc le plus proche.)

Baccalauréat ES La Réunion juin 1997

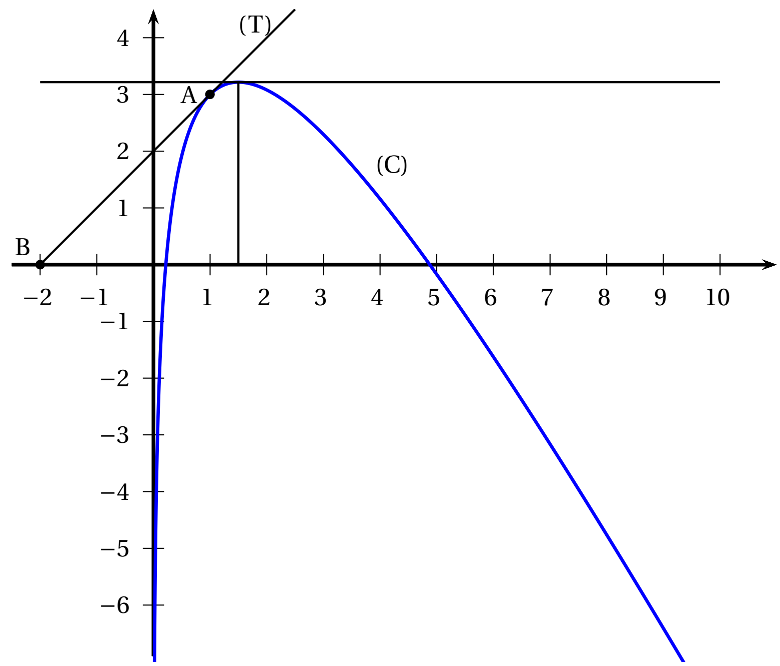
EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

La fonction f est définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = a\ln(x) + bx + c$$

où a, b, c désignent des nombres réels que l'on cherche à déterminer.
La courbe (C) représente la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.



Il est précisé que :

— le point A(1 ; 3) appartient à (C) ;

— la droite T, tangente à (C) au point A, passe par le point B(−2 ; 0) ;

— f admet un maximum en $x = \dfrac{3}{2}$ et la tangente à (C) au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

2. **a.** Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

b. À l'aide des informations fournies, démontrer que les réels a et b vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ 2a+3b & = & 0 \end{array}\right.$$

En déduire les valeurs de a et b.

c. Démontrer que $c = 5$.

3. On pose $g(x) = x(3\ln(x) - x + 2)$ pour tout x appartenant à $]0~;~+\infty[$

a. Démontrer que g est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

b. En déduire la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise entre (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

On s'intéresse dans cet exercice aux abonnés d'un magazine. Une enquête porte sur les abonnés de l'année en cours. Ils sont de deux types :

— les nouveaux abonnés (25 %) ;

— les anciens abonnés (75 %).

Cette enquête a démontré que ces abonnés ont choisi l'une des deux formules dans les proportions suivantes :

	Nouveaux abonnés	Anciens abonnés
Abonnement de 6 mois	37 %	28 %
Abonnement d'un an	63 %	72 %

Un sondage téléphonique est effectué auprès des lecteurs abonnés.

On désigne par N l'évènement : « le lecteur interrogé est un nouvel abonné ».

On désigne par S l'évènement : « le lecteur interrogé a souscrit un abonnement de 6 mois ».

1. Calculer la probabilité des évènements :

— A : « le lecteur est un nouvel abonné et a souscrit l'abonnement d'un an » ;

— B : « le lecteur est un ancien abonné et a choisi l'abonnement de 6 mois » ;

— C : « le lecteur s'est abonné pour un an ».

2. D'après les estimations, 40 % des nouveaux abonnés et 80 % de anciens reprendront un abonnement une fois terminé l'abonnement en cours.

a. Montrer que la probabilité qu'un lecteur abonné se réabonne est égale à $0,7$.

b. Sachant que le lecteur interrogé se réabonne, quelle est la probabilité qu'il fasse partie des nouveaux abonnés ? (Donner la valeur exacte)

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Voici la liste des quinze pays composant l'Union européenne avec, pour chacun d'eux, la date d'entrée dans l'Union :

Allemagne (1958) ; Autriche (1995) ; Belgique (1958) ; Danemark (1973) ; Espagne (1986) ; Finlande (1995) ; France (1958) ; Grèce (1981) ; Irlande (1973) ; Italie (1958) ; Luxembourg (1958) ; Pays-Bas (1958) ; Portugal (1986) ; Royaume-Uni (1973) ; Suède (1995).

Pour représenter l'Union européenne à une conférence internationale, on décide de choisir au hasard deux pays délégués. Pour cela, on place dans une urne quinze jetons portant chacun le nom d'un pays de l'Union et on tire simultanément deux jetons de l'urne.

Les résultats des questions 1, 2 et 3 seront donnés sous forme fractionnaire, les résultats de la question 4 seront donnés sous forme décimale arrondie à 10^{-3} près.

1. Quelle est la probabilité pour que la France soit choisie ?

2. Sachant que les deux pays choisis font partie de l'Union depuis 1958, quelle est la probabilité pour que la France soit choisie ?

3. Soit X la variable aléatoire associant, à chaque tirage de deux jetons, le nombre de pays faisant partie de l'Union depuis 1958.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

4. Dans cette question, on choisit les délégués pour les cinq prochaines années. Pour cela on tire au hasard cinq fois de suite. deux jetons simultanément, les jetons étant remis dans l'urne avant chaque nouveau tirage.

a. Quelle est la probabilité pour que la France fasse partie de la délégation deux années exactement ?

b. Quelle est la probabilité pour que la France fasse partie de la délégation au moins une année ?

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous rend compte de l'évolution de la population d'une ville moyenne au cours des cinq dernières années :

Année	1992	1993	1994	1995	1996
Rang : x_i	0	1	2	3	4
Nombre d'habitants (en milliers) : z_i	58	59,04	59,88	60,55	61,1
$y_i = z_i - 58$	0	1,04	1,88	2,55	3,1

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques, 2,5 cm pour une unité en abscisse et 2,5 cm pour 1 millier d'habitants en ordonnée.
On construira sur le même dessin les différentes représentation graphiques demandées dans ce problème.

Partie A

1. Représenter le nuage de points associés à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.
2. **a.** Déterminer à 10^{-2} près une valeur approchée du coefficient de corrélation linéaire de la série $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ (on ne donnera pas le détail des calculs).
   Expliquer pourquoi un ajustement linéaire semble justifié ici.

   b. Déterminer une équation de la droite (Δ), droite de régression de y en x, et construire cette droite.

   c. Calculer une estimation de la population de cette ville pour l'année 1998.
3. On appelle taux annuel de croissance pour l'année n, le pourcentage d'accroissement de la population entre l'année n et l'année $n+1$.
   Calculer, en arrondissant à 10^{-2} près les taux annuels de croissance pour 1992, 1993, 1994 et 1995.

Partie B

Une modélisation prenant en compte une évolution du taux annuel de croissance analogue à celle des quatre dernières années amène à envisager la fonction f définie par :

$$f(x) = 5,3\left(1 - \text{e}^{x \ln 0,8}\right)$$

pour $x \in [0\ ;\ +\infty[$.
Selon ce modèle, pour une valeur entière de x, $f(x)+58$ représente la population pour l'année $1992+x$ (en milliers d'habitants).

1. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que :
   $f'(x) > 0$ pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$.

   b. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   En déduire l'existence d'une asymptote (D) à la courbe (C) représentant la fonction f.
   Donner l'équation réduite de cette droite.

c. Dresser le tableau de variation de f.

d. Construire la courbe (C) et la droite (D) sur le dessin de la partie A.

2. **a.** D'après l'étude précédente, conclure sur la façon selon laquelle évolue la population de la ville suivant ce modèle.

b. Donner une estimation de la population pour 1998 à 10 habitants près.

Baccalauréat ES Asie juin 1997

Exercice 1

Le tableau ci-dessous donne l'évolution des obligations (capitalisation en fin d'anée en milliards de francs) en France de 1980 à 1986.

Années	1980	1981	1982	1983	19874	1985	1986
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Montant des obligations y_i	567,3	580,5	778,9	1 032,9	1 296,7	1 598,1	1 870,6

La Bourse : temple de la spéculation au marché financier ; B.Bellante - juillet 1989

1. On envisage un ajustement exponentiel de y en x : on pose donc $Y_i = \ln y_i$. Recopier sur la copie et compléter le tableau suivant (les valeurs de Y_i seront arrondies à $0,01$ près par défaut).

x_i	1	2	3	4	5	6	7
Y_i	6,34						

Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série $((x_i\ ;\ Y_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités : 2 cm pour unité en abscisse (origine 1979) ; 10 cm pour une unité en ordonnée (origine 6).

Donner le coefficient de corrélation de la série $((x_i\ ;\ Y_i)$ à $0,01$ près par défaut.

(Le détail des calculs n'est pas demandé).

En déduire que, pour cette série, un ajustement affine par la méthode des moindres carrés est satisfaisant.

Donner alors une équation de la droite de régression de Y en x sous la forme $Y = ax + b$ (a et b donnés à $0,01$ près par défaut), aucune justification n'est demandée.

Tracer cette droite.

2. En utilisant la droite de régression trouvée à la question précédente, avec les valeurs approchées de a et b, et l'égalité $Y = \ln y$, donner les valeurs estimées de Y_i, puis de y_i pour les années 1986 et 1987 (valeurs données à $0,01$ près par défaut).

Placer ces deux nouveaux points$\left(x_i\ ;\ \text{valeur estimée de } y_i\right)$ correspondant aux années 1986 et 1987 dans le repère précédent.

3. On remarque que cette estimation est bonne pour 1986 mais l'année 1987 a connu un krach boursier et le montant réel des obligations en 1987 a été de 1 941,6 milliards de francs,.

À quelle erreur (en pourcentage de la valeur réelle) l'estimation conduit-elle ? Le résultat sera donné au centième près par défaut.

Exercice 2

Une entreprise décide de fabriquer et de commercialiser un produit.
Sa capacité maximale de production est de 20 tonnes. La courbe C ci-jointe représente le coût de production $C(x)$, exprimé en milliers de francs, en fonction du nombre x de tonnes produites.

1. Après une étude de marché, l'entreprise espère vendre son produit 84 milliers de francs la tonne.

a. Déterminer, en fonction du nombre x de tonnes produites, la recette $R(x)$ en milliers de francs espérée par cette entreprise.

b. Tracer la représentation graphique Δ de la fonction R sur le graphique ci-dessous, pour $x \in [0\ ;\ 20]$.

Déterminer graphiquement à quel intervalle doit appartenir x pour assurer un bénéfice à l'entreprise.

c. Déterminer graphiquement, à une tonne près, le nombre de tonnes à produire pour assurer un bénéfice maximum.

2. On considère maintenant que

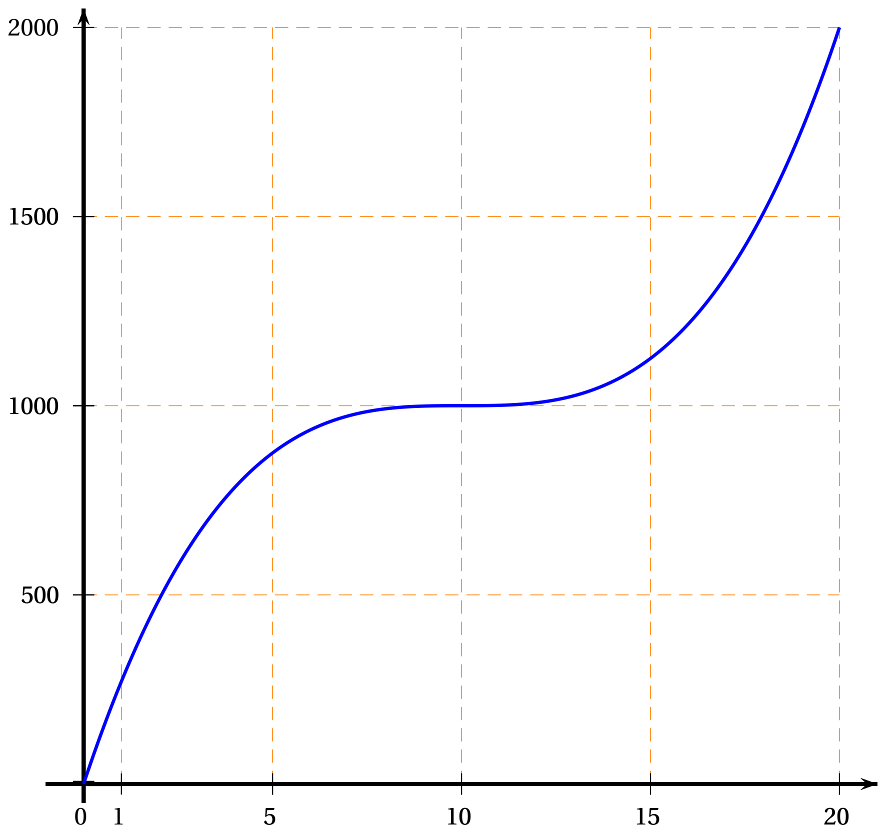
$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x \quad \text{avec } x > 0.$$

Pour affaiblir la concurrence, l'entreprise décide de vendre son produit le moins cher possible sans perdre d'argent.

Soit $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ le coût moyen de fabrication.

a. Exprimer $C_m(x)$ en fonction de x.
Étudier les variations de $C_m(x)$ sur l'intervalle $[0\,;20]$.

b. En déduire la valeur x_m qui assure un coût moyen minimum. Quel est alors le prix d'une tonne ?



Problème

Le but de ce problème est l'étude d'une fonction, le tracé de sa représentation graphique et le calcul d'une aire liée à cette représentation.

1. Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = -1 + (1 - x)\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Calculer $g'(x)$. étudier son signe.

b. Démontrer que la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à 1.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction g. On précisera $g(0)$.

d. Démontrer que pour tout x de $[0~;~+\infty[$, $g(x) < 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\text{e}^{-x} - x + 4.$$

Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Unité : 2 cm.

a. Vérifier que, pour tout x de $[0~;~+\infty[$, $f'(x) = g(x)$.

b. étudier les variations de f sur $[0~;~+\infty[$; préciser la limite en $+\infty$.

c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

d. Construire la courbe $\mathcal{C}$ et préciser la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.

3. **a.** Soit h la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = -\frac{x}{2} + 4.$$

Tracer sa représentation graphique D dans le même repère que $\mathcal{C}$.

b. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D.

c. étudier le signe de $f(x) - h(x)$ sur $[0~;~+\infty[$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et D.

4. **a.** Soit G la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$G(x) = (-x - 1)\text{e}^{-x}$$

.
Calculer $G'(x)$.

b. En déduire une primitive de la fonction qui à x associe $x\text{e}^{-x} - \dfrac{x}{2}$, sur $[0~;~+\infty[$.

c. Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, la droite D et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 2$.
On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de cette aire.

TES Baccalauréat Métropole groupe I bis juin 1997

Exercice 1 **4 points**

Le tableau suivant donne le total des prestations sociales reçues par les ménages en France de 1988 à 1992 :

Année	1988	1989	1990	1991	1992
Rang x_i, de l'année	0	1	2	3	4
Total des prestations en milliards de francs : y_i	1 338	1 415	1 505	1 606	1 700

SOURCE : INSEE, Tableaux de l'économie française 1993- 1994.

N.B. - *Aucun détail des calculs statistiques, à effectuer à la machine, n'est demandé dans cet exercice.*

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$: le plan est rapporté à un repère orthogonal.

   Les unités graphiques sont :

   2 cm par année sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 100 milliards de francs sur l'axe des ordonnées, en commençant la graduation à 1 000 milliards.

2. **a.** Calculer à 10^{-3} près par excès, le coefficient de corrélation linéaire de la série $\left(x_i;\ y_i\right)$.
   En déduire qu'un ajustement affine est justifié.

   b. Écrire une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés : on donnera les coefficients à 10^{-1} près par défaut.
   Tracer cette droite sur le graphique de la question **1)**.

   c. Estimer le total des prestations sociales reçues par les ménages en 1997.

3. En supposant que la tendance ainsi constatée se maintienne, à partir de quelle année le total des prestations dépassera-t-il 2 200 milliards ?

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Un groupe industriel possède deux usines, l'usine Alpha et l'usine Bêta.
L'usine Alpha emploie 30 % des salariés, l'usine Bêta 70 %. La répartition des salaires mensuels dans les deux usines est la suivante :

Salaire mensuel x en francs	Pourcentage des salariés de l'usine Alpha	Pourcentage des salariés de l'usine Bêta
$4000 \leqslant s < 6000$	32	22
$6000 \leqslant s < 8000$	35	43
$8000 \leqslant s < 14000$	22	23
$14000 \leqslant s < 18000$	7	12
$18000 \leqslant s < 30000$	4	0

On choisit un au hasard parmi l'ensemble des salariés du groupe. On admet l'équiprobabilité des choix. On considère les évènements suivants :

— E « le salarié gagne au moins 8 000 F par mois » ;
— A « le salarié travaille dans l'usine Alpha » ;
— B « le salarié travaille dans l'usine Bêta ».

1. **a.** Calculer la probabilité de A puis celle de B.

   b. Calculer la probabilité qu'un salarié de l'usine Alpha gagne au moins 8 000 F par mois.
   Faire le même calcul pour un salarié de l'usine Bêta.

   c. Montrer que la probabilité de E est : 0,344.

2. On considère maintenant les deux variables aléatoires X et Y dont les valeurs et les lois de probabilités sont données dans les tableaux suivants :

x_i	5	7	11	16	24
$P(X = x_i)$	0,32	0,35	0,22	0,07	0,04

y_i	5	7	11	16
$P(Y = y_i)$	0,22	0,43	0,23	0,12

a. Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique et l'écart type de chacune des variables aléatoires X et Y.

b. Utiliser le résultat de a. pour comparer les salaires moyens dans les usines Alpha et Bêta.
Comment interpréter alors le résultat sur les écarts-types ?

Exercice 2 (spécialité) — 5 points

Une entreprise dispose de deux machines, appelées machine « a » et machine « b », pour fabriquer le même type de pièces.
Certaines des pièces produites sont écartées comme défectueuses :

— pour la machine « a » la probabilité d'obtenir une pièce sans défaut est 0,9 ;
— pour la machine « b » cette probabilité est 0,95.

La machine « a » fournit les deux tiers de la production, la machine « b » le tiers restant.
On notera p(E) la probabilité d'un évènement E, $p(E/F)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

1. On choisit une pièce au hasard, avec équiprobabilité des choix.

a. Calculer la probabilité des évènements suivants :
A : « la pièce provient de la machine "a" » ;
B : « la pièce provient de la machine "b" ».

b. Soit S l'évènement : « la pièce est sans défaut ».
Calculer $p(S/A)$ et $p(S/B)$. En déduire que $p(S) = \dfrac{11}{12}$.

2. On considère un échantillon de 7 pièces produites par l'entreprise et on admet que le choix des 7 pièces suit une loi binomiale.

a. Calculer la probabilité que l'échantillon ne comporte que des pièces sans défaut.

b. Calculer la probabilité que l'échantillon comporte exactement 6 pièces sans défaut.

c. En déduire la probabilité d'avoir au moins 2 pièces défectueuses dans l'échantillon.
Les résultats de cette question **2)** seront donnés à 10^{-3} près.

Problème — 11 points

On considère les fonctions définies dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2 e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; le point O est placé à 5 cm du bord gauche de la feuille, et l'unité graphique est 3 cm.
Les courbes représentatives de f et de g sont appelées respectivement $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

1. Tracer la courbe $\mathscr{P}$.

2. étude de la fonction f.

a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$ $\left(\text{on pourra écrire } f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{2x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$.

Donner une interprétation graphique de ce résultat pour la courbe $\mathscr{C}$.

c. On note f' la fonction dérivée de f. Vérifier que :

$$f'(x) = (x-1)(3-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Dresser le tableau de variation de f.

d. Tracer la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

3. **a.** Déterminer les coordonnées des points communs à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{P}$.

b. étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

En donner une interprétation graphique.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur le même graphique que $\mathscr{P}$.

5. Soit F la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = -\,\mathrm{e}^{-x}\left(x^2+1\right).$$

a. Vérifier que F est une primitive de f.

b. Donner la valeur exacte de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

Quelle est l'interprétation géométrique de 1. ?

TES Baccalauréat Métropole groupe II bis juin 1997

Exercice 1 **4 points**

Le tableau ci-dessous indique le taux de départ en vacances des Français de 1965 à 1993 :

Année x_i	1965	1975	1980	1985	1990	1992	1993
Taux t_i	41	52,5	57,2	57,5	59,1	60	60,9

SOURCE : INSEE, *Tableaux de l'économie française 1994-1995*

N. B . - *Aucun détail des calculs statistiques, à effectuer à la machine, n'est demandé dans cet exercice.*

1. **a.** Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ t_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal :
   — sur l'axe des abscisses on placera 1965 à l'origine et on choisira 0,5 cm pour unité;
   — sur l'axe des ordonnées on placera 40 à l'origine et on choisira 1 cm pour unité.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série double et placer ce point sur le graphique précédent.
2. **a.** Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et t. Peut-on envisager un ajustement affine?

   b. Déterminer une équation de la droite de régression D de t en x par la méthode des moindres carrés : on prendra les valeurs approchées à deux décimales par excès pour les coefficients.

   c. Tracer la droite D sur le graphique de la question 1. a.
3. En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon pour les années suivantes, donner une estimation du taux de départ en vacances de Français en l'an 2000.

Exercice 2 (obligatoire) **4 points**

Dans une usine d'automobiles, trois chaînes « a », « b » et « c » fournissent respectivement 25 %, 35 % et 40 % de la production de moteurs.
Certains de ces moteurs sont écartés comme défectueux, dans les proportions suivantes :
5 % pour la chaîne « a »;
4 % pour la chaîne « b »;
1 % pour la chaîne « c ».
On prend un moteur au hasard et on définit les évènements suivants :

A : « le moteur est issu de la chaîne "a" »;

B : « le moteur est issu de la chaîne "b" »;

C : « le moteur est issu de la chaîne "c" »;

D : « le moteur est défectueux ».

On notera $p(E)$ la probabilité d'un évènement E et $p(F/F)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.
Les résultats des calculs seront donnés à 10^{-4} près.

1. Traduire les données de l'énoncé en utilisant le vocabulaire des probabilités.
2. Montrer que $p(D) = 0{,}030\,5$.
3. Quelle est la probabilité qu'un moteur sorte de la chaîne « a » sachant qu'il est défectueux?
4. Calculer la probabilité qu'un moteur sorte de la chaîne « c » sachant qu'il n'est pas défectueux.

Exercice 2 (spécialité) 4 points

Le gérant d'un hôtel souhaite renouveler le linge de toilette de son établissement. Il a besoin de 90 draps de bain, 240 serviettes et 240 gants de toilette.
Une première entreprise de vente lui propose un lot A comprenant 2 draps de bain, 4 serviettes et 8 gants de toilette pour 200 F.
Une deuxième entreprise vend pour 400 F un lot B de 3 draps de bain, 12 serviettes et 6 gants de toilette.
Pour répondre à ses besoins, le gérant achète x lots A et y lots B.

1. Traduire par un système d'inéquations les contraintes auxquelles satisfont x et y.
2. On considère un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. À tout couple $(x\,;\,y)$ on associe le point M de $\mathcal{P}$ de coordonnées x et y, en convenant que 2 cm représentent 5 lots sur chaque axe, soit 4 mm par lot.

   Représenter dans $\mathcal{P}$ l'ensemble G des points $M(x\,;\,y)$ satisfaisant aux inéquations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x \geqslant 0 & \text{et} & y \geqslant 0\\ 2x+3y & \geqslant & 90\\ x+3y & \geqslant & 60\\ 4x+3y & \geqslant & 120 \end{array}\right.$$

   On hachurera la partie du plan formée des points pour lesquels le contraintes ne sont pas vérifiées.
3. **a.** Exprimer en fonction de x et de y la dépense en francs occasionnée par l'achat de x lots A et de y lots B.

   b. Est-il possible de procéder aux achats nécessaires avec 5 000 F ? On justifiera la réponse.
4. Déterminer graphiquement, en précisant la démarche choisie, le nombres de lots A et B à acheter pour avoir une dépense minimale.

   Quelle est cette dépense minimale ?

Problème 10 points

Ce problème est consacré à l'étude d'une fonction (partie A) et au calcul d'une intégrale (partie B).

Partie A

Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(2x^2+3x-3\right)\text{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ - unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm ur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Quelle est la limite de f en $-\infty$?

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$: on rappelle que pour tout nombre réel α positif on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\text{e}^{-x} = 0$.

   Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
2. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

   étudier son signe et dresser le tableau de variation de f.
3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera pour $f(x)$ des valeurs décimales approchées à 10^{-1} près).

x	$-2,3$	$-2,2$	$-2,1$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	1	2	4	6
$f(x)$	6,8		$-3,9$		$-13,4$		$-6,6$		0,7			0,2

4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Donner une interprétation graphique du résultat.
5. Tracer la partie de la courbe composée des points d'abscisse comprise entre $-2,3$ et 6.

Partie B

Soit F la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \left(-2x^2 - 7x - 4\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Vérifier que F est une primitive de f dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{-1}^{0} [-f(x)]\,\mathrm{d}x$.
   Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?

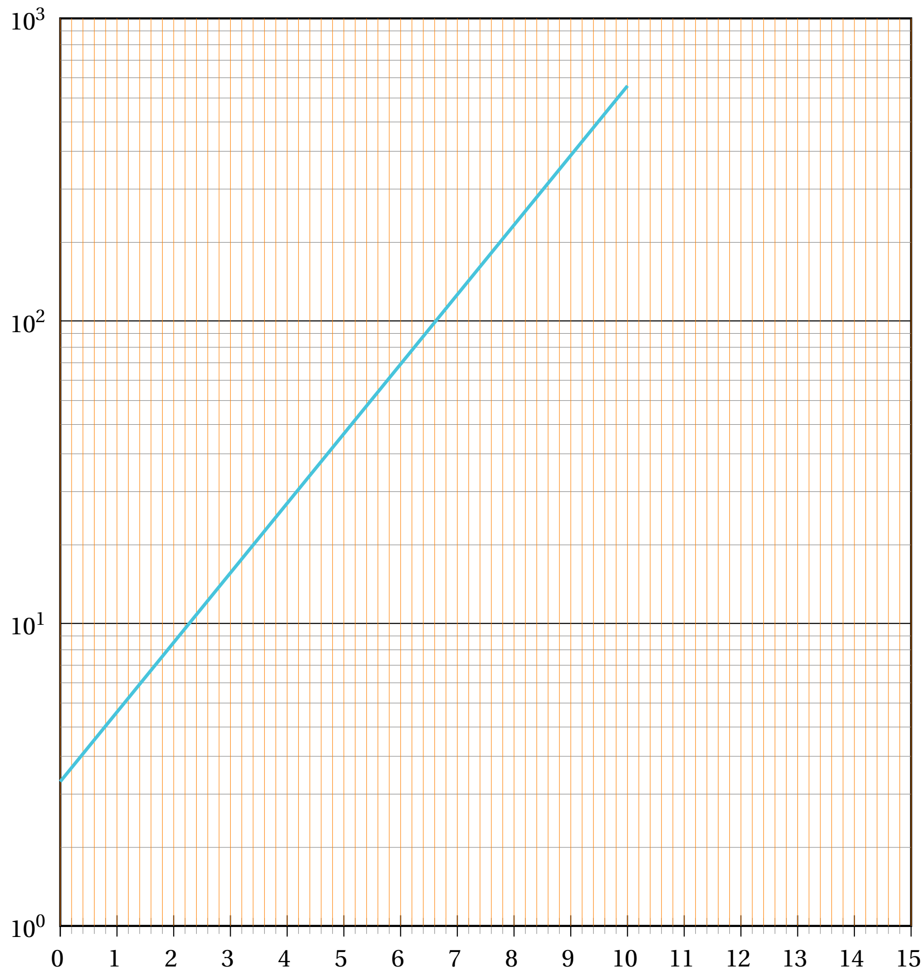
∽ Baccalauréat ES Polynésie juin 1997 ∾

Exercice 1 **4 points**

Soit G une grandeur économique définie en fonction du temps t, exprimé en années, par :

$$G(t) = 3 \times (1,7)^t.$$

1. Quelle est la valeur de G à l'instant $t = 0$?
2. Montrer que le rapport : $\tau = \dfrac{G(t+1) - G(t)}{G(t)}$ est constant.
3. Exprimer $\ln G(t)$ en fonction de t (ln désigne la fonction logarithme népérien).
4. Dans le tracé ci-joint, on a représenté la fonction G dans un plan P rapporté à un repère semi-logarithmique pour $t \in [0 ; 10]$.
   Pourquoi la fonction G a-t-elle pour représentation graphique une droite Δ ?
   Exprimer en fonction de τ le coefficient directeur de cette droite.



Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

La cote d'une voiture d'occasion est donnée dans le tableau suivant :

Année de mise en circulation	1991	1992	1993	1994	1995
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Cote y_i	42 900 F	54 200 F	64 100 F	81 600 F	102 000 F

1. Le plan est muni d'un repère orthogonal. Les unités graphiques sont : en abscisses : 2 cm pour un an ; en ordonnées : 1 cm pour 10 000 F.
   Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ (fig. 1).
2. Les points n'étant pas parfaitement alignés, on pose :

$$z = \ln y.$$

   a. Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
$z_i = \ln y_i$					

   Les valeurs de z_i seront données sous forme décimale approchée à 10^{-2} près par défaut.

   b. On rapporte le plan à un nouveau repère orthogonal.
   Les unités graphiques sont désormais :
   en abscisses : 2 cm pour un an ; en ordonnées : 1 cm pour 0,1.
   Représenter le nuage de points $N_i\left(x_i\ ;\ z_i\right)$ (fig. 2).
   (*Dans la suite, le détail des calculs n'est pas demandé*).

   c. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z. Un ajustement affine est-il justifié ?

   d. Donner une équation de la droite de régression D de z en x. (On arrondira les coefficients à 10^{-2} par défaut.)
   Représenter D sur la figure 2.

   e. Calculer la valeur de z donnée par l'équation précédente pour l'année 1988. En déduire une estimation de la cote de cette voiture de l'année 1988. (On donnera une valeur arrondie à 100 F près.)

Exercice 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

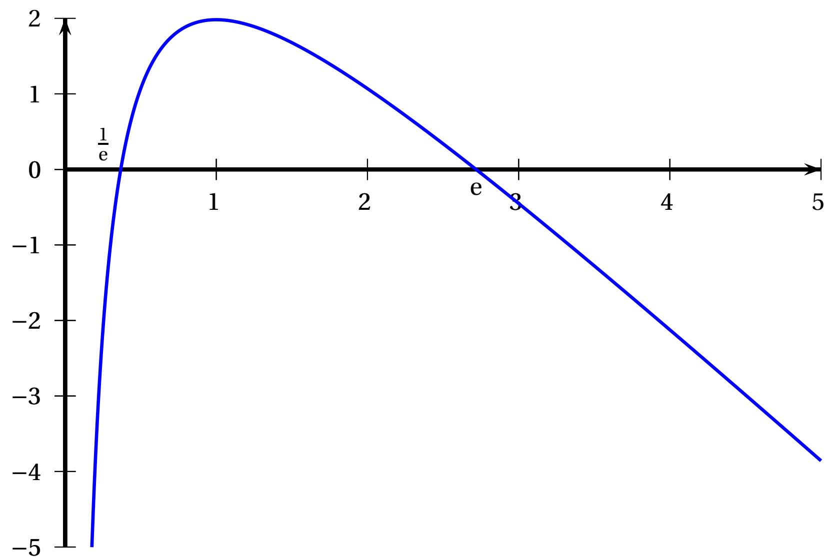
Une étude statistique effectuée par une librairie montre que 30 % des livre qu'elle vend sont primés, c'est-à-dire distingués par un prix littéraire ; 15 % sont des livres reliés.
Pour chaque question, on donnera le résultat exact, puis une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut

1. Un client achète un livre.
   La probabilité pour qu'il soit relié, sachant qu'il est primé, est égale à $0,2$.
   a. Calculer la probabilité p_1 pour qu'il soit relié et primé.
   b. Calculer la probabilité p_2 pour qu'il soit primé, sachant qu'il est relié.
2. Un client achète cinq livres. On suppose que les choix de ces livres sont indépendants.
   a. Quelle est la probabilité p_3 pour qu'exactement trois d'entre eux soient des livres primés ?
   b. Quelle est la probabilité p_4 pour que, parmi ces cinq livres, l'un aumoins soit un livre primé ?

Problème **5 points**

Partie A

Soit f une fonction définie sur $[0\,;\,5]$, dérivable sur $]0\,;\,5]$. Sa fonction dérivée f' est représentée graphiquement ci-après.



1. Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0\,;\,5]$.

2. On donne :

$$f(0) = \frac{2-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}},\ f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\frac{2}{\mathrm{e}},\ f(\mathrm{e}) = 2,\ f(1) = 0.$$

a. Construire le tableau de variation de f.

b. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel α dans $\left]\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,\mathrm{e}\right[$ tel que :

$$f(\alpha) = 0.$$

Désormais, on supposera que $\alpha = 1$.

c. étudier le signe de $f(x)$ pour $x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,\mathrm{e}\right]$.

d. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan définie par :

$$\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant \mathrm{e} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f'(x).$$

Donner le résultat exact, puis le résultat arrondi à 10^{-2} près.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{2}{\mathrm{e}}\,;\,2\right]$ par

$$g(x) = \ln(1+x),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. étudier ses variations et dresser son tableau de variation.

2. Soit h la fonction composée de g et de f : $h = g \circ f$.

On étudie h sur l' intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}~;~\mathrm{e}\right]$.

a. Calculer $h(\mathrm{e}), h(1), h\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs arrondies à 10^{-2} près.

b. Déterminer le sens de variation de h.

c. Justifier que :

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{1 + f(x)}.$$

Calculer $h'(\mathrm{e})$, $h'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

d. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de h, dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 5 cm).

On représentera en particulier les points d'abscisses e, 1, et $\frac{1}{\mathrm{e}}$ et les tangentes en ces points.

On pourra résumer les résultats de cette partie dans le tableau suivant :

x	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	1	e
$h(x)$			
$h'(x)$		1,8	
Nom du point de $\mathscr{C}$	A	B	C

∽ Baccalauréat ES Antilles-Guyane septembre 1997 ∾

Exercice 1 **5 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - \mathrm{e}^{2x}$$

et f' sa fonction dérivée.

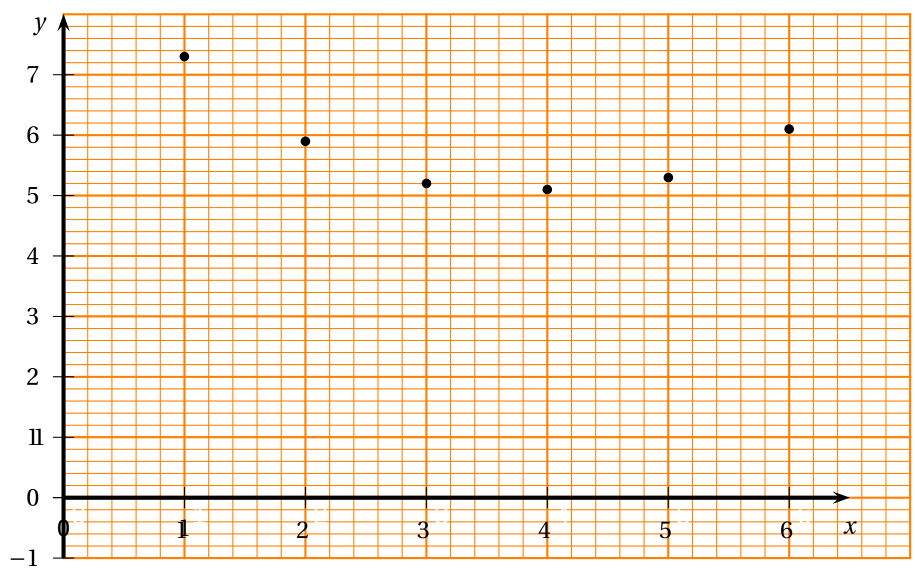
1. Dans $\mathbb{R}$, par le calcul, résoudre les équations ou inéquations suivantes :
   a. $f(x)?0$;
   b. $f(x) = -2$;
   c. $f(x) = -1$.
2. étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   En déduire l'équation d'une asymptote horizontale s'il y a lieu.
3. étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de touristes (en dizaines de milliers) d'un département français entre 1991 et 1996.

Année	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de touristes y_i	7,3	5,9	5,2	5,1	5,3	6,1

Le nuage de points associé à cette série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ est donné sur le graphique suivant :



1. Le coefficient de corrélation linéaire entre x et y est environ égal à $-0,5$.
   Est-ce en accord avec le graphique ? (justifier votre réponse).

2. Afin d'effectuer un ajustement à l'aide d'une parabole on effectue le changement de variable $t_i = (x_i - 4)^2$.
   Présenter dans un tableau la nouvelle série $\left(t_i\ ;\ y_i\right)$ et calculer son coefficient de corrélation linéaire r à 10^{-3} près.
   Qu'en déduisez-vous?
3. Donner l'équation de la droite de régression de y en t. On donnera les résultats à 10^{-2} près par excès.
4. Si la tendance ne change pas, effectuer une prévision pour 1998.
5. À l'aide de l'équation 3, trouver un ajustement de la forme $y = ax^2 + bx + c$.

Exercice 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

À partir de l'année 1990, Pierre verse au le 1er janvier de chaque année 9 000 F sur un compte rémunéré à un taux annuel de 6 % À intérêts composés. Ainsi, chaque 1er janvier, on ajoute 9 000 F au capital déjà acquis.
On note u_n le capital disponible à partir du 1er janvier de l'année 1990 + n, ainsi $u_0 = 9\,000$.

1. Montrer que $u_1 = 18\,540$ et que $u_{n+1} = 1,06u_n + 9\,000$.
2. Soit la suite auxiliaire (v_n) telle que $v_n = u_n + 150\,000$.
   a. Calculer v_0 et v_1.
   b. Montrer que $v_{n+1} = 1,06v_n$; en déduire la nature de la suite (v_n).
   c. Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
3. À partir de quelle année Pierre disposera-t-il de plus de 200 000 F ? (On pourra utiliser la fonction logarithme népérien).

Problème **12 points**

On donne à la page suivante dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ les courbes représentatives (C_f), $(C_{f'})$, (C_g) pour $x > 0$ de trois fonctions f, f' et g.

Partie A : étude de f

La fonction f est définie Sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x+2}}{(x+2)^2}.$$

1. étudier la limite de f en $+\infty$. (On pourra poser $X = x + 2$).
2. f' étant la fonction dérivée de f, montrer que $f'(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{x+2}}{(x+2)^3}$.
3. Donner le tableau de variation de f.
4. Montrer que l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe $(C_{f'})$ l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$ est égale à $\dfrac{\mathrm{e}^4}{144}\left(4\mathrm{e}^2 - 9\right)$ en unités d'aire.

Partie B Coût marginal et bénéfice

Une entreprise constate que pour une quantité x d'un article A (en milliers d'articles) le coût total C_T (en milliers de francs) peut être évalué par $C_T(x) = f(x)$ pour x appartenant à $[1 ; 5]$.
Le coût marginal C_m est alors défini pour tout x appartenant à $[1 ; 5]$ par $C_m(x) = f'(x)$.
On note f'' la fonction dérivée de f' sur l'intervalle $[1 ; 5]$.
On admettra que, $f''(x) = \dfrac{x^2+2}{(x+2)^4}\mathrm{e}^{x+2}$

1. étudier le signe de f'' et en déduire le tableau de variations de f'.
2. **a.** Justifier que l'équation $f'(x) = 4$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1 ; 5]$.

   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) \geqslant 4$ sur l'intervalle $[1 ; 5]$ puis donner sous forme d'un tableau le signe de $4 - f'(x)$.
4. Le prix de vente d'un article est 4 francs. Soit $B(x)$ le bénéfice correspondant À x milliers d'articles vendus. On a donc $B(x) = 4x - f(x)$.

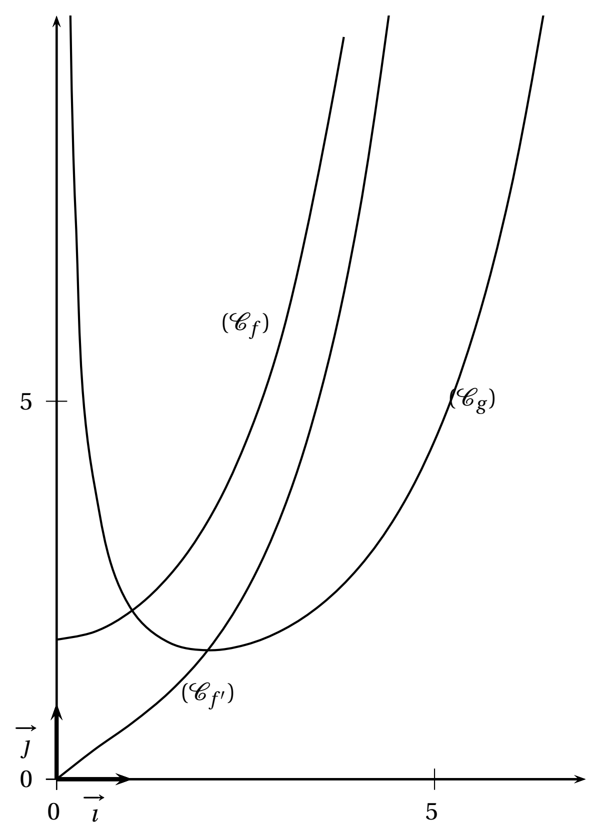
   a. établir le tableau de variation de B.

   b. En déduire une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de x pour lequel le bénéfice est maximum.

Partie C Coût moyen

Si x est le nombre de milliers d'articles, on note g, la fonction définie sur $[1 ; 5]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
Cela représente donc le coût moyen d'un article. Les courbes (C_g) et $(C_{f'})$ sont sécantes en un point I.

1. Vérifier que I a pour abscisse 2. Graphiquement, que représente l'ordonnée de I pour la fonction g ?
2. Soit J le point de la courbe de (C_f) de même abscisse que I. Déterminer l'équation de la tangente (Δ) en J à (C_f) et vérifier que (Δ) passe par l'origine du repère.



∽ Baccalauréat ES Métropole septembre 1997 ∾

Exercice 1 **5 points**

Pour l'achat d'un nouveau matériel, un chef d'entreprise a réalisé un emprunt d'un coût total de 285 000 francs sur cinq ans. À la fin de chaque mois, on note y_i le montant en milliers de francs (en abrégé : kF) des bénéfices cumulés réalisés depuis l'achat du nouveau matériel.
Le tableau ci-dessous correspond au relevé des neuf premiers mois de remboursement :

Rang x_i du mois	Montant y_i des bénéfices cumulés en kF
1	35
2	40
3	46
4	54
5	65
6	80
7	90
8	102
9	120

N. B. - *Dans cet exercice, aucun détail des calculs statistiques, à effectuer à la machine, n'est demandé.*

1. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal avec, pour unités graphiques : 1 cm en abscisses, 1 cm pour 10 kF en ordonnées, en faisant débuter la graduation sur l'axe des ordonnées à 30.
2. Si on effectue un ajustement affine sur la série statistique considérée, on obtient l'équation :

$$y = 10,66x + 16,88$$

comme équation de la droite de régression D de y en x.
En admettant que la tendance décrite par D se maintienne, à partir de quel mois l'emprunt sera-t-il amorti par les bénéfices assurés par l'achat du nouveau matériel ?
3. L'expérience prouve que l'hypothèse d'une croissance linéaire des bénéfices est trop optimiste. Dans cette question on va envisager une croissance plus lente.
   a. On pose $t_i = \sqrt{x_i}$.
   Représenter sous forme de tableau la série statistique (t_i, y_i) pour les valeurs non entières de t_i on prendra les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près par défaut.
   Un ajustement affine est-il envisageable pour cette série ?
   b. On procède à cet ajustement, les coefficients étant évalués à 10^{-2} près par défaut. Quelle relation obtient-on entre y et x ?
   c. En admettant la validité de la relation obtenue en b), l'emprunt sera-t-il amorti à son échéance ?

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Un sac contient des jetons indiscernables au toucher et marqués de l'une des trois lettres « a », « b » et « c ». Il y a autant de jetons marqués « a » que de jetons marqués « b » et que de jetons marqués « c ».
On forme des « mots » de trois lettres en tirant successivement trois jetons, le jeton tiré étant remis dans le sac avant d'effectuer le tirage suivant :
« abc », « aaa », « cbc », « bca »sont des exemples de tels « mots ».

1. **1.** Calculer le nombre de mots différents qu'il est possible d'obtenir.
2. **2.** Calculer la probabilité des évènements suivants :
   A « le mot ne contient pas la lettre "a" » ;
   B « le mot est formé de trois lettres distinctes » ;
   C« le mot contient au moins deux fois la même lettre » ;
   D « la première et la dernière lettre sont identiques ».
   N. B. - *On donnera les résultats sous forme exacte.*
3. **3.** Déterminer les probabilités des deux évènements « A ou B »et « A ou D ».

Exercice 2 5 points
Enseignement de spécialité
Un touriste revient de vacances avec 15 films :
2 films de photographies d'Italie ;
8 films de photographies de Grèce ;
5 films de photographies de Turquie.
Aucune marque distinctive ne permet d'identifier les films.
Pour des raisons financières le touriste ne fait développer à son retour que 11 de ces 15 films.
N.B. - *On donnera les résultats sous forme décimale approchée à* 10^{-4} *près.*

1. **1.** Combien y a-t-il de choix différents possibles de 11 films parmi les 15 ?
2. **2.** Quelle est la probabilité que, parmi les 11 films développés, il y ait :
   - **a.** Tous les films sur la Grèce ?
   - **b.** Aucun film sur l'Italie ?
   - **c.** Autant de films sur la Grèce que sur la Turquie ?
   - **d.** Deux fois plus de films sur la Turquie que sur l'Italie ?
3. **3.** Le photographe, d'origine italienne, propose à son client de lui faire cadeau du développement des films sur l'Italie, s'il en trouve parmi les 11 films. On appelle X la variable aléatoire « nombre de films sur l'Italie développés ».
   Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

PROBLÈME **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction numérique de variable réelle définie dans $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 100(2x-5)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A. étude de la fonction f

1. **1.** Calculer la limite de f en $+\infty$ (on pourra écrire $f(x) = 100\left(\dfrac{2x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{5}{\mathrm{e}^x}\right)$).
   Quelle est l'interprétation graphique ?
2. **2.** Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.
   Dresser le tableau de variation de f.
3. **3.** Construire la partie de la courbe $\mathscr{C}$ correspondant aux points dont l'abscisse est comprise entre 2 et 8.

4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une solution et une seule α dans l'intervalle $\left[2\,;\,\dfrac{7}{2}\right]$.
   On admettra que cette même équation admet une solution et une seule β dans l'intervalle $\left[\dfrac{7}{2}\,;\,8\right]$.

   b. Utiliser une calculatrice pour donner de α un encadrement décimal à 10^{-2} près.
   On admettra que $4,70 < \beta < 4,71$.

Partie B. Calcul de primitive

1. Déterminer deux nombres a et b tels que la fonction F définie dans $[0, +\infty[$ par : $F(x) = 100(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de f sur $[0\,,\,+\infty[$
2. Calculer la valeur exacte de

$$I = \int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partie C. Application

Le nombre $f(x)$ représente le bénéfice en milliers de francs que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x centaines de pièces (pour x compris entre 2 et 8).
Par exemple, si l'entreprise fabrique 300 pièces, elle réalise un bénéfice de
$f(3) \times 1\,000$ F.

1. En utilisant si nécessaire la courbe $\mathscr{C}$ et les résultats de la partie **A**, déterminer :
   a. Les quantités de pièces à produire pour que l'entreprise ne travaille pas à perte.
   b. La quantité de pièces à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal que l'on précisera au franc près.
   c. Les quantités de pièces à produire pour que l'entreprise réalise un bénéfice d'au moins 4 000 F.
2. Lorsque l'entreprise produit entré 300 et 600 pièces, elle réalise un bénéfice moyen qui, exprimé en milliers de francs, est égal à :

$$\frac{1}{3}\int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Utiliser la partie **B** pour déterminer au franc près ce bénéfice moyen.

∽ Baccalauréat ES Polynésie septembre 1997 ∾

Exercice 1 **5 points**

Le tableau ci-dessous, dans lequel x_i est le nombre annuel de mariages en milliers et y_i le nombre annuel de divorces (également en milliers), donne l'évolution des mariages et des divorces en France de 1977 à 1986 :

Année	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986
x_i	368	355	340	334	315	312	300	281	269	266
y_i	71	74	78	81	86	92	97	102	106	107

Exemple de lecture : en 1979 il y a eu 340 000 mariages et 78 000 divorces (nombres arrondis au millier).

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal, en graduant l'axe des abscisses à partir de 265 et l'axe des ordonnées à partir de 71 – unités graphiques : 1 cm pour 5 milliers en abscisse, 1 cm pour 2 milliers en ordonnée,

2. a. Déterminer les coordonnés du point moyen G du nuage et le coefficient de corrélation linéaire entre x et y au centième près. Quel type d'ajustement peut-on envisager?

b. Donner une équation de la droite de régression $y = ax + b$ de y en x par la méthode des moindres carrés. On arrondira a au centième et b à l'unité.

N. B. : Le détail des calculs n'est pas demandé,

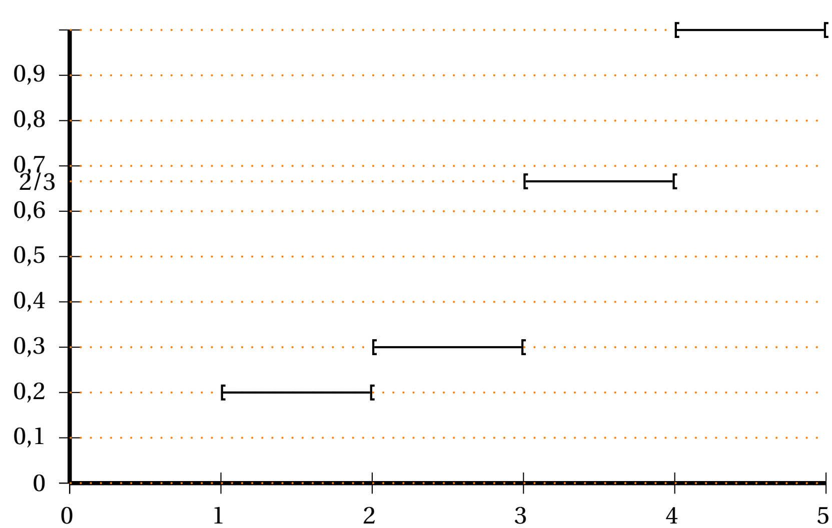
c. Tracer la droite de régression sur la figure utilisée pour le nuage de points,

3. a. Sachant que le nombre de divorces en 1988 était de 140 000, à quelle estimation du nombre de mariages conduit la méthode précédente pour cette même année 1988?

b. En réalité le nombre des mariages a été de 271 000. À quelle erreur l'estimation conduit-elle? Exprimer cette erreur en pourcentage de la valeur réelle.

Exercice 2 **5 points**

Soit X la variable aléatoire, pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 et 4, dont la fonction de répartition F, définie par $F(x) = p(X \leqslant x)$ (c'est-à-dire probabilité de l'évènement : « $X \leqslant x$ »), est représentée graphiquement par la figure ci-dessous :



Exemple : La probabilité que $X \leqslant 2,7$ est $0,3$.

1. Justifier que la probabilité de l'évènement : « $X = 4$ » est égale à $\dfrac{1}{3}$, puis donner, à l'aide de fractions irréductibles, et sans justifications, la loi de probabilité de X.
2. Calculer la valeur exacte de l'espérance mathématique de X puis une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de l'écart type de X.
3. On dispose de deux urnes :
   l'urne A qui contient : 3 boules noires et 2 boules blanches ;
   l'urne B qui contient : 3 boules noires et 4 boules blanches.
   Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
   On considère l'expérience suivante :
   — lorsque X prend la valeur 4, on tire une boule au hasard de l'urne A
   — lorsque X ne prend pas la valeur 4, on tire une boule au hasard de l'urne B.

   a. En traduisant les conditions de l'énoncé, expliciter les probabilités des évènements suivants :
   tirer une boule blanche sachant que $X = 4$;
   tirer une boule blanche sachant que $X \neq 4$.
   En déduire la probabilité de l'évènement : « $X = 4$ » et on tire une boule blanche ».

   b. Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche.

N. B. : On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles,

Problème **10 points**

On considère la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x + 2 - \mathrm{e}^{3x}.$$

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. En écrivant $f(x) = 3x\left(1 + \dfrac{2}{3x} - \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{3x}\right)$ pour $x \neq 0$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

   c. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f. étudier son signe et dresser le tableau de variation de f.

   d. Démontrer que sur $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

   e. Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant (formé à l'aide de valeurs décimales approchées à 10^{-2} près) :

x	-2	-1	$-0,7$	$-0,5$	$-0,4$	$-0,3$	$-0,2$	$-0,1$	0	0,3	0,4	0,7	1
$f(x)$	$-4,00$	$-1,05$		0,28						0,44	$-0,12$	$-4,07$	$-15,09$

   En déduire un encadrement de α.

2. Le plan est rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées). On appelle Γ la courbe représentative de f dans ce plan.
   Montrer que la droite Δ d'équation $y = 3x + 2$ est asymptote à la courbe Γ lorsque x tend vers $-\infty$.
   étudier la position relative de Δ et Γ.
   Tracer Δ, puis Γ, pour x dans l'intervalle $[-2\,;\,0,7]$.
3. Déterminer le point A de Γ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$.
   Représenter, sur la figure précédente, le point A et la tangente en A à Γ.
4. On considère l'ensemble des points du plan situés entre Γ et Δ et entre les droites d'équations $x = -0,5$ et $x = 0$.
   Hachurer cette partie du plan, sur la figure précédente.
   Calculer son aire, en unités d'aire (on donnera la valeur exacte, puis une va- leur décimale approchée à 10^{-1} près),

Baccalauréat ES Sportifs de haut-niveau septembre 1997

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une salle de spectacle peut contenir 400 places. Le tableau suivant donne le nombre moyen de spectateurs enregistrés sur une large période, en fonction du prix d'une place.
p est le prix d'une place.
n est le nombre moyen de spectateurs.

p	5	10	15	20	25	30	35	40	45
n	362	323	275	248	198	162	117	88	34

1. Dans cette partie, les résultats doivent être arrondis au millième près et le détail des calculs n'est pas demandé.
   a. Donner le coefficient de corrélation linéaire r de cette série statistique à deux variables p et n.
   b. écrire une équation de la droite de régression linéaire de n en p.
2. Dans cette partie, on pose $n = -8p + 400$.
   a. Exprimer la recette pour un spectacle en fonction de p.
   b. Les frais fixes pour un spectacle s'élèvent à 3 200 F, exprimer le bénéfice pour un spectacle en fonction de p.
   c. Dans quel intervalle le directeur doit-il fixer le prix des places pour amortir au moins les frais fixes ?
   d. Quel prix doit-il fixer pour obtenir le bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Un restaurateur propose trois types de menu : le premier à 150 F, le deuxième à 90 F et le troisième à 70 F. Il constate que 30 % de ses clients prennent le menu à 150 F et 50 % celui à 90 F.
De plus, parmi ceux qui prennent le menu à 150 F, 85 % donnent un pourboire au serveur ; parmi ceux qui prennent le menu à 90 F, 65 % donnent un pourboire au serveur et parmi ceux qui prennent le menu à 70 F, 25 % donnent un pourboire au serveur.
Pour un client, on désigne par :
A : l'évènement« prendre un menu à 150 F ».
B : l'évènement « prendre un menu à 90 F ».
C : l'évènement « prendre un menu à 70 F ».
S : l'évènement « donner un pourboire au serveur ».

1. À la sortie du restaurant, on interroge un client choisi au hasard. Calculer la probabilité :
   a. qu'il ait pris un menu à 70 F ;
   b. qu'il ait pris un menu à 90 F et qu'il ait donné un pourboire au serveur ;
   c. qu'il ait donné un pourboire au serveur ;
   d. qu'il ait pris un menu à 150 F sachant qu'il a donné un pourboire au serveur (le résultat de cette question sera donné sous forme exacte, puis sous forme décimale approchée à 10^{-2} près par défaut).
2. On suppose que, quand un pourboire est donné au serveur, son montant est 5 % du prix du menu. On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le montant en francs du pourboire donné au serveur par un client.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$.

b. Quelle somme le serveur peut-il espérer gagner, s'il sert 30 clients ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Dans une station de sport d'hiver, on a observé qu'un tiers des skieurs emprunte une télécabine les emmenant directement au sommet des pistes.
Les autres skieurs utilisent un télésiège qui les transporte dans un domaine intermédiaire.
Parmi ceux-ci, un quart emprunte un téléski pour se rendre au sommet des pistes, les autres skient dans ce domaine intermédiaire. Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On considère, dans cette station, une personne partant skier. Calculer la probabilité :
   a. que ce skieur aille au sommet des pistes en utilisant le télésiège, puis le téléski ;
   b. que ce skieur aille skier au sommet des pistes.
2. Au sommet des pistes, on interroge un skieur choisi au hasard. Prouver que la probabilité qu'il soit arrivé en télécabine est $\frac{2}{3}$.
3. Dans un moment de très grande affluence au sommet des pistes, on interroge au hasard quatre skieurs.
   a. Calculer la probabilité qu'au moins un d'entre eux ne soit pas venu en télécabine.
   b. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de skieurs venus en télécabine.
   Déterminer la loi de probabilité de X.
   Calculer son espérance $\mathrm{E}(X)$ et sa variance $V(X)$.

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats

Le but de ce problème est de déterminer une approximation du prix d'équilibre d'un produit manufacturé. (On rappelle que le prix d'équilibre est le prix pour lequel l'offre est égale à la demande).
Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 4 cm).

Partie A : étude de la fonction d'offre

- x désigne le prix d'une unité de produit, exprimé en milliers de francs.
- $f(x)$ désigne la quantité offerte sur le marché, exprimée en milliers d'articles.

On admet que la fonction d'offre f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Soit φ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $\varphi(x) = x$. Déterminer la limite de $\varphi - f$ en $+\infty$.
   c. Soit D la droite d'équation $y = x$. Interpréter graphiquement le résultat de la question b.
2. étudier le sens de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.

Partie B : étude de la fonction de demande

x désigne toujours le prix d'une unité, exprimé en milliers de francs.
$g(x)$ désigne la quantité demandée, exprimée en milliers d'articles.
On admet que la fonction de demande g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ est de la forme

$$g(x) = \frac{a}{x} + b\ln x \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ réels.}$$

1. On note Γ la courbe représentative de g dans $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   Déterminer les nombres a et b sachant que Γ passe par le point A(1 ; 2) et admet en ce point une tangente Δ de coefficient directeur −3.
2. On pose dans toute la suite $g(x) = \dfrac{2}{x} - \ln x$.
   a. étudier le sens de variation de g sur $]0~;~+\infty[$.
   b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
   c. Construire, sur l'annexe , la courbe Γ ainsi que sa tangente Δ en A.

Partie C : Détermination du prix d'équilibre

1. **Méthode graphique**
   À l'aide des graphiques de $\mathscr{C}$ et de Γ, indiquer le prix d'équilibre (à 100 F près).
2. **étude théorique**
   Soit la fonction h définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

   a. étudier le sens de variation de h.
   b. Déterminer la limite de h en 0, puis en $+\infty$.
   c. Prouver que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à [1,73 ; 1,74].
   Déduire de ce qui précède un encadrement du prix d'équilibre à 10 F près.

∽ Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie décembre 1997 ∾

Exercice 1 **5 points**

Dans cet exercice les résultats pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice. Le tableau suivant donne l'évolution de 1955 à 1995 de l'espérance de vie des hommes et des femmes en France.

Année i	1955	1965	1975	1985	1995
Rang x_i de l'année i	0	10	20	30	40
Espérance de vie des hommes h_i	65	67,5	69	71,3	73
Espérance de vie des femmes f_i	71,2	74,4	76,9	79,4	82

1. Représenter les deux nuages de points associés aux séries statistiques $(x_i,\ h_i)$ et $\left(x_i,\ f_i\right)$, dans le plan rapporté à un repère orthogonal. Unités graphiques : sur l'axe des abscisses 0,25 cm ; sur l'axe des ordonnées 1 cm ; de plus, sur l'axe des ordonnées, on placera 65 à l'origine.
2. **a.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et h (on donnera la valeur décimale arrondie à 10^{-3} près).

   b. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite (D) de régression de h en x (pour les coefficients, on donnera les valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près).

   c. Tracer (D) dans le repère précédent.
3. **a.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et f (on donnera la valeur décimale arrondie à 10^{-3} près).

   b. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite (D$'$) de régression de f en x (pour les coefficients, on donnera les valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près).

   c. Tracer (D$'$) dans le repère précédent.
4. En supposant que les évolutions correspondent durant les années à venir aux équations des droites précédentes, déterminer par le calcul :

   a. quelle serait l'espérance de vie des hommes et des femmes en l'an 2000 ?

   b. en quelle année l'espérance de vie des femmes deviendrait supérieure de 10 ans à celle des hommes ?

Exercice 2 5 points
Enseignement obligatoire

Dans un sac se trouvent 6 jetons numérotés de 1 à 6. Un jeu consiste à tirer au hasard l'un des jetons.
Si le numéro obtenu est un multiple de 2, le joueur gagne 1 franc ;
s'il obtient « 1 »ou « 3 », il gagne 2 francs ;
s'il obtient « 5 »il garde le jeton tiré et il tire un second jeton parmi les cinq restants ;
si le second numéro obtenu est un multiple de 2, il gagne 2 francs ; si le second numéro obtenu est « 1 », il gagne 9 francs ;
et si le second numéro est « 3 », il gagne k francs, où k est un nombre réel.
Pour jouer à ce jeu, le joueur achète au préalable un ticket à 3 francs. On suppose à chaque fois que les tirages sont équiprobables.
Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la différence entre le gain et le prix du ticket.

1. À l'aide d'un arbre, représenter les différentes issues possibles.
2. **a.** À l'aide de la question précédente, donner les valeurs x_i, que peut prendre la variable aléatoire X ; donner ensuite la loi de probabilité de X.

   b. Montrer que l'espérance mathématique de X est égale à $\dfrac{k-40}{30}$.

c. Déterminer k pour que l'organisateur du jeu gagne 0,10 franc en moyenne par ticket vendu.

3. Dans cette question, on prend $k = 32$.

a. Un joueur joue une fois à ce jeu. Montrer que $\text{P}(X \geqslant 0) = \dfrac{1}{15}$.

b. Ce joueur joue maintenant 3 parties indépendantes. Calculer la probabilité d'avoir un gain aux deux premières parties et une perte à la troisième (donner la valeur arrondie de cette probabilité à 10^{-3} près).

Exercice 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Dans un rayon d'un magasin ouvert dix heures par jour, on peut trouver soit un vendeur A pendant six heures de temps, soit pendant son absence, un vendeur B pendant trois heures de temps, soit en l'absence de A et B, aucun vendeur pendant une heure de temps. Les plages horaire de présence varient, si bien que le fait qu'un client soit conseillé par A, par B ou ne soit pas conseillé est aléatoire. Quand ils sont conseillés par A, 70 % des clients effectuent un achat, 50 % l'effectuent quand ils sont conseillés par B et 20 % seulement quand personne n'est là pour les conseiller.
Pour un client qui se présente dans ce rayon, on considère les évènements suivants :
A : « Le client est conseillé par A.
B : « Le client est conseillé par B.
C : « Le client n'est conseillé par personne.
H : « Le client effectue un achat.

1. Traduire, en terme de probabilités conditionnelles, les données numériques de l'énoncé à l'aide des évènements A, B, C et H.

a. Un client se présente dans le rayon. Quelle est la probabilité que le client soit conseillé par A et qu'il effectue un achat ?

b. Quelle est la probabilité que le client effectue un achat ?

c. Le client effectue un achat. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas été conseillé par A ?

2. Pendant n jours, n clients viennent dans ce rayon indépendamment les uns des autres, à raison de un client par jour.

a. On prend $n = 7$. Quelle est la probabilité qu'au moins cinq des clients aient été conseillés par A ?

b. Maintenant, n est quelconque.
Montrer que la probabilité qu'au moins un des clients ait été conseillé par A est égale à $1-(0,4)^n$.
Calculer n pour que cette probabilité soit au moins égale à 0,99.

Problème **10 points**
Partie I

On considère les fonctions numériques f et g, définies sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = 13t^2 + 50t \quad ; \quad g(t) = 2\,000\text{e}^{-0,116t}.$$

On note $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ leurs courbes représentatives respectives dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
Unités graphiques : axe des abscisses 0,5 cm pour une unité ; axe des ordonnées 0,5 cm pour 100 unités.

1. **a.** étudier le sens de variation de la fonction f.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** étudier le sens de variation de la fonction g.

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$. En déduire une droite asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_2)$; quelle est la position de $(\mathscr{C}_2)$ par rapport à cette asymptote ?

3. Tracer, dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.

Partie II

Une usine, fabriquant uniquement un produit B, décide la fabrication d'un produit A. Les nombres $f(t)$ et $g(t)$, définis à la partie I, représentent les quantités respectives de produit A et de produit B fabriquées par jour, où t est la durée, exprimée en mois, écoulée depuis le lancement de A.

1. On considère la fonction h, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $h(t) = f(t) - g(t)$.

a. étudier le sens de variation de la fonction h.

b. Montrer que l'équation $h(t) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[6\,;\,7]$.

c. En déduire combien de mois après son lancement la fabrication de A dépasse celle de B.

2. On considère la fonction q, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $q(t) = f(t) + g(t)$.

a. Que représente $q(t)$?

b. Donner une primitive Q de q.

c. Calculer la valeur moyenne de la fonction q sur l'intervalle $[0\,;\,10]$, c'est-à-dire le nombre $N = \dfrac{1}{10}\displaystyle\int_1^{10} q(t)\,\mathrm{d}t$.

Après avoir calculé la valeur exacte de N, on en donnera une valeur approchée à 1 unité près.

3. L'usine ne peut pas fabriquer une quantité journalière de produit A supérieure à 3 000. Par lecture graphique, déterminer au bout de combien de mois ce rythme est atteint.