Baccalauréat ES 1998

L'intégrale de juin à décembre 1998

Baccalauréat ES Amérique du Nord juin 1998

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Aucun détail des calculs statistiques à effectuer à la machine n'est demandé dans cet exercice.
Dans une région imaginaire sévit depuis quelques années une mystérieuse maladie : toute personne atteinte est, pendant plusieurs mois, plongée dans un profond sommeil.
Le tableau ci-dessous concerne la population de cette région.
Il indique, au 1[er] janvier de chaque année :

— l'année, variable x (l'année 1992 a été notée 92 et ainsi de suite jusqu'à l'année 1998 notée 98) ;
— le nombre de personnes atteintes, variable z.

Année x_i	92	93	94	95	96	97	98
Nombre de personnes atteintes, z_i	45 400	49 100	52 300	50 400	52 600	53 900	55 000

1. Déterminer la valeur décimale arrondie au dixième du coefficient de corrélation linéaire entre x et z.

   Ce résultat permet-il d'envisager un ajustement affine entre les variables x et z?

2. Représenter le nuage de points associé à la série $(x~;~z)$. Unités : en abscisse, 91 est l'origine des années et 1 cm représente une année ; en ordonnée, 40 000 est l'origine et 5 cm représentent 10 000 personnes.

3. **a.** Donner une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés. Pour les coefficients, on prendra les valeurs décimales arrondies au dixième.

   Tracer cette droite sur le graphique précédent.

   b. En supposant que l'évolution de la maladie se poursuive de la même façon au cours de l'année 1998, donner une estimation de la population atteinte par cette maladie le 1[er] janvier 1999.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Le tableau suivant donne le montant des cotisations qu'ont eu à payer en 1997 les adhérents à une médiathèque, selon la catégorie à laquelle ils appartiennent :

Adhérents	Catégories	Cotisation
Résidents	Catégorie A : scolaires	gratuit
	Catégorie B : étudiants	60 F
	Catégorie C : autres	100 F
Non résidents	Catégorie D	140 F

La recette totale de la médiathèque se compose :

— d'une subvention municipale ;
— des cotisations des adhérents.

1. En 1997 :

   — la subvention municipale a été de 200 000 F ;
   — il y a eu au total 5 000 adhérents, dont 72 % de résidents ; parmi les résidents, 45 % appartiennent à la catégorie A et 30 % à la catégorie B.

   a. Combien y a-t-il eu d'adhérents dans chaque catégorie ?

   b. Quelle a été la recette totale ?

2. En 1998 :

— pour équilibrer le budget, la recette totale doit augmenter de 10 % ;

— la subvention municipale est augmentée de 3 %.

a. Montrer que, pour équilibrer le budget, la part de la recette totale provenant des cotisations en 1998 doit être égale à 399 880 F.

b. Le nombre d'adhérents augmente en 1998 de 10 % dans chaque catégorie. On modifie uniquement les cotisations des catégories C et D ; la cotisation de la catégorie C passe à 105 F. Calculer, à 10 F près par excès, la cotisation minimale de la catégorie D, pour que la part de la recette provenant des cotisations en 1998 soit au moins de 399 880 F.

c. Calculer dans ces conditions les pourcentages d'augmentation des cotisations des catégories C et D entre 1997 et 1998.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Un lycée compte 660 élèves.

La fréquentation mensuelle du CDI (Centre de Documentation et d'Information) suivant les niveaux est donnée par le tableau suivant :

Niveaux	Seconde			Première				Terminale			
Nombre de visites mensuelles	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3
Effectifs	56	140	84	10	60	70	60	18	70	38	54

(Par exemple, 84 élèves de seconde sont venus au CDI 2 fois par mois).

1. On interroge un élève choisi par hasard et on considère les évènements suivants :

— A « l'élève est en seconde » ;

— B « l'élève vient une fois par mois au CDI » ;

— C « l'élève est en seconde et vient une fois par mois au CDI ».

a. Calculer la probabilité $p(A)$ de l'évènement A.

b. Montrer que $p(B) = \dfrac{9}{22}$.

c. Calculer $p(C)$.

d. L'élève choisi au hasard est l'un de ceux qui viennent une fois par mois au CDI. Quelle est la probabilité qu'il soit en seconde ? (Donner le résultat sous forme de fraction irréductible).

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de visites mensuelles au CDI d'un élève du lycée.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

c. On répète dix fois, de façon indépendante le choix au hasard d'un élève parmi les élèves du lycée.

Quelle est la probabilité que, parmi les élèves choisis, cinq élèves exactement se rendent une fois par mois au CDI ? (Donner le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-3}).

PROBLÈME **10 points**

Les objectifs de ce problème sont de déterminer une fonction qui ajuste de manière satisfaisante une série statistique (parties A et B), puis d'étudier un coût moyen résultant de l'étude précédente (partie C). Une entreprise a noté les valeurs du coût total de production d'un engrais, notées $\text{CT}(x)$, en fonction de la masse x produite (où x est exprimée en tonnes et $\text{CT}(x)$ est exprimé en milliers de francs) :

x	10	12	14	16	18
$\text{CT}(x)$	100	110	145	196	308

Partie A

Sur une feuille de papier millimétré, reporter les cinq points de coordonnées $(x\ ;\ \text{CT}(x))$ dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Unités : 1 cm pour une tonne sur l'axe des abscisses ; 0,05 cm pour un millier de francs sur l'axe des ordonnées.

Partie B

On recherche une fonction, définie sur l'intervalle $[10\ ;\ 18]$, dont la courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ s'ajuste de façon acceptable avec les cinq points tracés sur le graphique.
Une fonction f est déclarée « acceptée » si, pour chacune des cinq valeurs de x citées dans le tableau, on a $-10 \leqslant f(x) - \text{CT}(x) \leqslant 10$.

1. On essaie la fonction g, définie sur l'intervalle $[10\ ;\ 18]$ par

$$g(x) = 3,25(x-10)^2 + 100.$$

a. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	10	12	14	16	18
$g(x)$	100				308
$g(x) - \text{CT}(x)$					

b. Pourquoi g n'est-elle pas « acceptée » ?

2. On essaie la fonction h, définie sur l'intervalle $[10\ ;\ 18]$ par : $h(x) = \text{e}^{0,3x} + 80$.

a. Montrer que la fonction h est « acceptée ».

b. Étudier le sens de variation de h sur l'intervalle $[10\ ;\ 18]$.

c. Tracer la courbe représentative de h sur le graphique de la partie **A**.

Partie C

Dans cette partie, on utilise sur l'intervalle $[10\ ;\ 18]$ la fonction h, « acceptée », de la partie **B**. Ainsi, le coût moyen de production d'une tonne, en fonction de la masse x produite, est, en milliers de francs

$$\text{CM}(x) = \frac{h(x)}{x} = \frac{\text{e}^{0,3x} + 80}{x}.$$

1. On note CM' la dérivée de la fonction CM.

a. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[10\ ;\ 18]$, $\text{CM}'(x)$ a le même signe que $s(x) = (0,3x-1)\text{e}^{0,3x} - 80$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $[10\ ;\ 18]$.

c. Montrer que l'équation $s(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[10\ ;\ 18]$. On note α cette solution et, pour la suite, on prendra $\alpha = 11,59$.

2. **a.** Déduire de ce qui précède le sens de variation de CM sur l'intervalle $[10\ ;\ 18]$.

b. Pour quelle production a-t-on un coût moyen minimal ? Quel est ce coût, à un franc près par excès ?

∾ Baccalauréat ES Antilles–Guyane juin 1998 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Le directeur d'une fabrique de microprocesseurs constate que 4 % de la production journalière est défectueuse. Un responsable qualité propose une vérification systématique des microprocesseurs. Cette vérification n'est pas parfaite, elle ne détecte que 95 % des microprocesseurs défectueux et déclare défectueux 2 % des microprocesseurs qui ne présentent pourtant aucun défaut.
On prend au hasard l'un des microprocesseurs dans une production journalière.
On appelle :
- M l'évènement « le microprocesseur est défectueux » ;
- R l'évènement « le microprocesseur est rejeté après vérification ».
La notation $p(A/B)$ désignant la probabilité de l'évènement A sachant que B est réalisé.

1. Préciser les probabilités : $p(M)$, $p(R/M)$, $p\left(R/\overline{M}\right)$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement (M et R) ainsi que celle de l'évènement $\left(\overline{M} \text{ et } R\right)$.
3. Calculer la probabilité que le microprocesseur soit défectueux et déclaré bon par la vérification.
4. Calculer la probabilité que le microprocesseur soit bon sachant que la vérification va le déclarer « à rejeter ».

Exercice 2 5 points
(obligatoire)

Dans cet exercice, les résultats numériques pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice, sans justification. lis seront arrondis à 10^{-2} près, sauf indication contraire.

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'étudiants inscrits dans l'enseignement supérieur depuis 1960 (en milliers d'étudiants), en France métropolitaine.

Année scolaire	1960-1961	1970-1971	1980-1981	1990-1991	1993-1994
Rang de l'année : x_i	1	11	21	31	34
Nombre d'étudiants (en milliers) : y_i	309,7	850,6	1 174,8	1 698,7	2 074,6

Source : *Repères et références statistiques sur les enseignements et la formation.* Édition 1995. D.E.P.

1. **a.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Peut-on envisager un ajustement affine ?

   b. Donner une équation de la droite de régression de y en x.

   c. En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'étudiants qui seront inscrits dans l'enseignement supérieur en 1998-1999. (Arrondir au millier supérieur).

2. **a.** On décide de faire un ajustement exponentiel, en ignorant la première donnée, correspondant à l'année 1960-1961. Pour cela, on pose $z_i = \ln\left(y_i\right)$.
   Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant par les valeurs de z_i.

Rang de l'année : x_i	11	21	31	34
$z_i = \ln(y_i)$				

   b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z. Peut-on envisager un ajustement affine ?

   c. Donner une équation de la droite de régression de z en x.

d. En supposant que l'évolution se poursuive de cette façon, donner une valeur approchée de z_{39}, puis proposer une deuxième estimation du nombre d'étudiants qui seront inscrits dans l'enseignement supérieur en 1998-1999.

Exercice 2 5 points
(spécialité)

On définit deux suites de nombres réels, U et V par les conditions suivantes $U_0 = 9$ et pour tout n entier ($n \geqslant 0$),

$$U_{n+1} = \sqrt{U_n} \quad ; \quad V_n = \ln(U_n).$$

1. Dans cette question nous nous intéresserons au calcul des premiers termes des suites U et V.
   a. Donner les valeurs de $U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3$.
   b. Exprimer $V_0,\ V_1,\ V_2,\ V_3$ en fonction de $\ln(3)$.
2. Dans les deux questions suivantes nous allons étudier la suite V.
   a. Montrer que la suite V est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   b. Calculer V_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite V ?
3. On s'intéresse dans cette question au comportement de la suite U.
   a. Calculer U_n en fonction de V_n.
   b. Donner alors la limite de U_n lorsque n tend vers l'infini.

Problème **11 points**
Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée (annexe I, ci-après), dans un repère orthogonal.

1. Au moyen d'une lecture graphique, donner, sous forme de tableau, le signe de f sur $[0\ ;+\infty[$.
2. Soit F une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   L'une des trois courbes des figures 2 a, 2 b, 2 c (annexe II) est la représentation graphique de F sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   En utilisant le résultat du 1, déterminer celle de ces courbes qui convient et noter sur votre copie la référence de cette courbe.
3. Calculer, en unité d'aire, la valeur exacte $\mathscr{A}$ de l'aire du domaine D compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $= \frac{1}{2}$ et $x = 2$.
   Sur le graphique, donné ci-dessous, hachurer ce domaine D et joindre cette annexe à votre copie.
4. Au moyen d'une lecture graphique, déterminer les valeurs de $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'\left(\frac{3}{2}\right)$.
   Reporter ces valeurs dans le tableau correspondant (à joindre à votre copie).

Partie B

Soit g la fonction numérique définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{x}.$$

On note Γ la courbe représentative de g.

1. Calculer la limite de g quand x tend vers - ∞.
2. Montrer que $g(x)$ peut s'écrire : $g(x) = \left(\dfrac{2x}{\text{e}^x} - \text{e}^{-x}\right)$.

   Calculer la limite de g en + ∞.

   Quelle conclusion peut-on tirer du résultat de ce calcul ?
3. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
4. Dresser le tableau des variations de g.
5. Écrire une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.

   En admettant que la courbe donnée ci-dessous représente, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, la fonction g, tracer sur ce graphique la droite T et la courbe Γ.

Annexe I : courbe de la fonction f

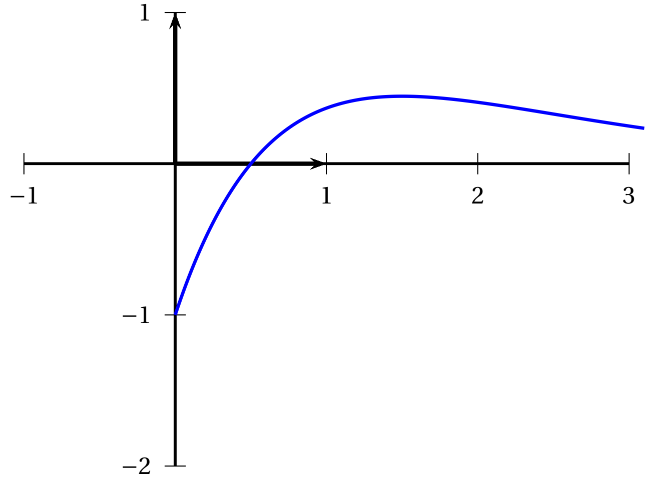


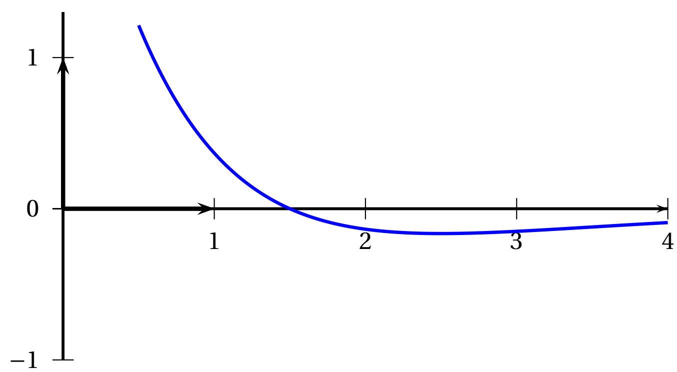
Tableau de valeurs pour la fonction f, à compléter au moyen d'une lecture graphique

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$f(x)$			$2\mathrm{e}^{\left(-\frac{3}{2}\right)}$
$f'(x)$	3	$2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$	

Annexe II :

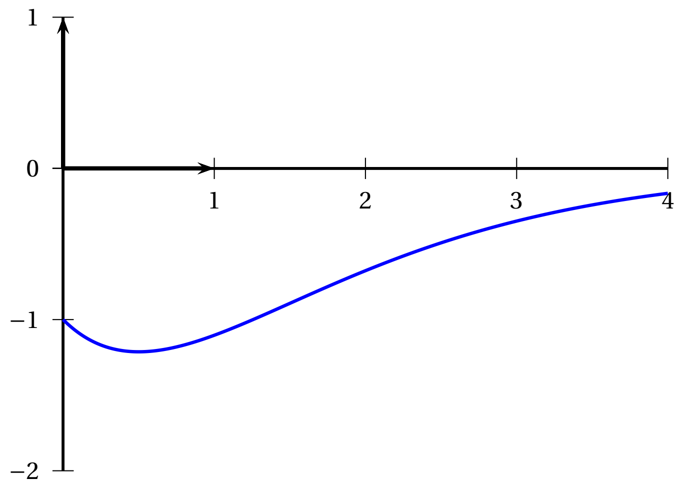
Courbe 2 a représentative de F_{a}.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
$F(x)$	3	$\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	0	$-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$	
$F'(x)$	0				0



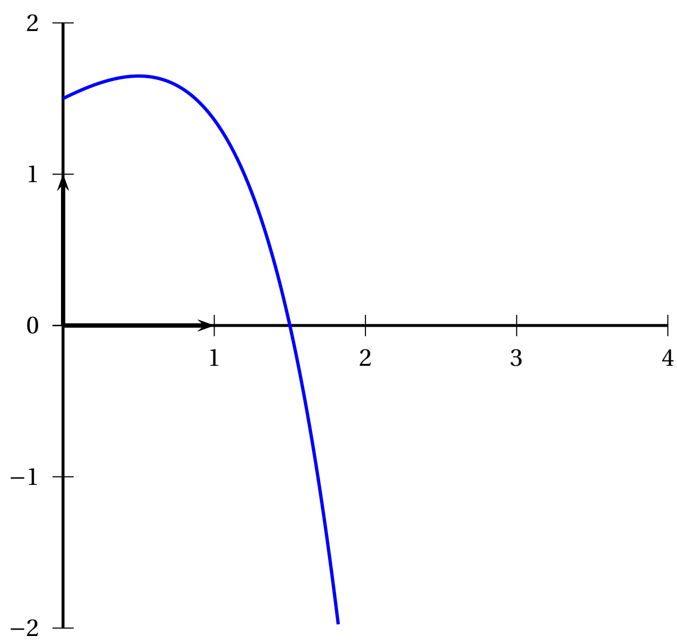
Courbe 2 b représentative de F_{b}.

x	0	$\frac{1}{2}$	2
$F(x)$	-1	$-\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$-\frac{5}{\mathrm{e}^2}$
$F'(x)$		0	



Courbe 2 c représentative de F_c.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$F(x)$	$\frac{3}{2}$	$\sqrt{e}$	0	$-\frac{e^2}{2}$
$F'(x)$		0		



Baccalauréat ES Asie juin 1998

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction de la variable réelle x, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x + a\right) + b$$

où a et b sont deux constantes réelles. Les renseignements connus sur f sont donnés dans le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	-3	$\searrow$		$\nearrow$	

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a (f'désigne la fonction dérivée de f.)
2. **a.** Déterminer a et b en vous aidant des informations contenues dans le tableau ci-dessus.
   b. Calculer $f(0)$ et calculer la limite de f en $+\infty$.
   c. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de variation de f.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 2\right) - 3 = 0$$

   (on pourra poser $X = \mathrm{e}^x$).
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations

$$\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 2\right) - 3 \geqslant -4$$

$$\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 2\right) - 3 \leqslant 0$$

   (On utilisera le tableau de variation donné ci-dessus et en particulier les informations obtenues en **2 b**)

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Un magasin de grande surface procède à des opérations de solde sur tous les disques (CD) de son rayon musique :

- 20 % de ces disques sont des CD « classiques ». 80 % d'entre eux sont vendus à moitié prix, les autres sont vendus avec une remise de 40 % sur le prix initial.
- 30 % de ces disques sont des CD « Jazz ». 70 % d'entre eux sont vendus à moitié prix, les autres sont vendus avec une remise de 20 % sur le prix initial.
- 50 % de ces disques sont des CD « Pop-Rock ». 60 % d'entre eux sont vendus à moitié prix, les autres sont vendus avec une remise de 30 % sur le prix initial.

Les deux questions sont indépendantes.

1. Un client a payé 42 F un disque.
   Quels étaient les différents prix possibles de cet article avant les opérations de solde ?
2. Un client choisit un disque au hasard.

a. Sachant que c'est un CD « Jazz », quelle est la probabilité qu'il le paie à moitié prix ?

b. Son prix marqué avant les opérations de solde est de 90 F ; quelle est la probabilité que ce soit un CD « Pop-Rock » vendu à 45 F ?

c. Quelle est la probabilité que ce disque choisi soit vendu à moitié prix ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Un dé non truqué comporte six faces ainsi marquées :

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 4$$

1. On lance ce dé une fois.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir une face marquée 2 ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir une face marquée 1 ou 2 ?
(les résultats numériques seront donnés sous forme d'une fraction irréductible).

2. On lance ce dé trois fois de suite.
Les différents jets de ce dé sont supposés indépendants.
On note de gauche à droite, chaque fois, le chiffre obtenu.
Un nombre de trois chiffres est ainsi créé.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 421 ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre formé exactement d'un 1, d'un 2, d'un 4 ?

c. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre contenant au moins une fois le chiffre 2 ?
(les résultats numériques seront donnés sous forme d'une fraction irréductible).

3. On jette cinq fois de suite ce dé (les jets sont indépendants).
Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois exactement le chiffre 1 ?
On pourra utiliser un schéma de Bernoulli.
(Le résultat numérique est donné sous forme approchée à 10^{-2} près par défaut.)

PROBLÈME **10 points**

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}.\ln(x)$$

dans laquelle $\mathrm{e}.\ln(x)$ est le produit du nombre e par le logarithme népérien de x.

1. Question préliminaire
Tracer dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm
– la courbe (E) d'équation $x \in [0~;~+\infty[$, $y = \mathrm{e}^x$
– la courbe (H) d'équation $x \in [0~;~+\infty[$, $y = \dfrac{\mathrm{e}}{x}$.
Au moyen d'une lecture graphique, déterminer le signe de $\mathrm{e}^x - \dfrac{\mathrm{e}}{x}$ suivant les valeurs de x dans $]0~;~+\infty[$.

2. Étude de la fonction $\boldsymbol{f}$

a. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

b. En utilisant l'écriture suivante de $f(x)$: $f(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - \mathrm{e}\cdot\dfrac{\ln x}{x}\cdot\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$ calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.
Déduire des résultats de la question 1 l'étude des variations de la fonction f.

3. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.
Préciser la droite asymptote à $(\mathscr{C})$ et la tangente à $(\mathscr{C})$ parallèle à l'axe des abscisses.

4. Calcul d'une aire

a. Vérifier que la fonction s définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$s(x) = x \cdot \ln(x) - x$$

est une primitive de la fonction ln.

b. Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Baccalauréat ES Centres étrangers juin 1998

Exercice 1 **5 points**

Partie A

Soient a et b des nombres réels.
On considère la fonction f, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} + a\mathrm{e}^{x} + b,$$

et on désigne par f' sa fonction dérivée.

1. Calculer $f'(x)$.
2. On sait que $f(\ln 3) = -9$ et $f'(\ln 3) = 0$.
   Déterminer les nombres réels a et b.

Partie B

Le but de cette partie est le calcul de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^{1} \left[(2x+1)\mathrm{e}^{2x} - 6(x+1)\mathrm{e}^{x}\right]\,\mathrm{d}x.$$

1. Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

   $$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^{x}.$$

   On pose, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $g(x) = xf(x)$.
   Calculer $g'(x)$.
2. En déduire la valeur exacte de I.

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Pour chaque probabilité demandée on donnera la valeur décimale arrondie à 10^{-4} près.
Dans une université, 55 % des étudiants possèdent un ordinateur. Parmi les étudiants ayant un ordinateur :

- 20 % ont un violon ;
- 30 % ont une flûte ;
- aucun étudiant ne possède à la fois une flûte et un violon.

Parmi les étudiants n'ayant pas d'ordinateur :

- 5 % ont un violon ;
- 15 % ont une flûte ;
- aucun étudiant ne possède à la fois une flûte et un violon.

On choisit au hasard un étudiant de cette université.
On définit les évènements suivants :

- D, l'étudiant a un ordinateur ;
- V, l'étudiant a un violon ;
- F, l'étudiant a une flûte ;
- R, l'étudiant n'a aucun de ces deux instruments de musique.

Ainsi : la probabilité $p(D)$ de l'évènement D est $0,55$; la probabilité $p(V/D)$ qu'un étudiant ait un violon sachant qu'il a un ordinateur est $0,2$.

1. Calculer la probabilité que l'étudiant ait un ordinateur et un violon.
2. Calculer la probabilité que l'étudiant ait un violon et pas d'ordinateur.

3. Calculer $p(V)$.
4. Calculer $p(F)$.
5. Quelle est la probabilité que l'étudiant ait un ordinateur sachant qu'il a une flûte ?

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

Un éditeur établit ses prix pour l'année chaque 1$^{\text{er}}$ janvier.
Dans tout l'exercice nous nous intéresserons à deux collections publiées par l'éditeur : la collection A et la collection B.
Dans chaque collection, tous les volumes sont vendus au même prix unitaire.

I - Étude de la collection A.

Le prix unitaire des livres de cette collection augmente de 7 F au 1$^{\text{er}}$ janvier de chaque année. On désigne par P le prix unitaire des livres le 1$^{\text{er}}$ janvier 1995. Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par P_n le prix unitaire des livres le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(1995+n)$. Par exemple, P_3 est le prix unitaire le 1$^{\text{er}}$ janvier 1998.

1. **a.** Pour $n \geqslant 1$, exprimer P_n en fonction de P_{n-1}.
   b. Exprimer P_n en fonction de n et de P_0.
2. Le 1$^{\text{er}}$ janvier 1995 le prix unitaire était 150 F.
   a. Quel sera le prix unitaire le 1$^{\text{er}}$ janvier 2007 ?
   b. À quelle date le prix unitaire sera-t-il pour la première fois supérieur à 250 F ?

II - Étude de la collection B

Le prix unitaire des livres de cette collection augmente de 3 % au 1$^{\text{er}}$ janvier de chaque année. On désigne par R_0 le prix unitaire des livres le 1$^{\text{er}}$ janvier 1995.
Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par R_n le prix unitaire des livres le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(1995+n)$. Par exemple, R_3 est le prix unitaire le 1$^{\text{er}}$ janvier1998.

1. **a.** Pour $n \geqslant 1$, exprimer R_n en fonction de R_{n-1}.
   b. Exprimer R_n en fonction de n et de R_0.
2. Le 1$^{\text{er}}$ janvier 1995 le prix unitaire était 150 F.
   a. Quel sera le prix unitaire le 1$^{\text{er}}$ janvier 2007 ? (on donnera la valeur arrondie entière de ce prix à 1 F près).
   b. À quelle date le prix unitaire sera-t-il pour la première fois supérieur à 250 F ?

Problème **10 points**

Les objectifs de ce problème sont l'étude d'une fonction et le tracé de sa courbe représentative (partie II), s'appuyant sur l'étude du signe d'une fonction auxiliaire (partie I).

I Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x - 5 + 5\ln x.$$

1. Étudier le sens de variation de g (ne pas étudier les limites).
2. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique dans l'intervalle $[1~;~7]$. On note α cette solution.
   b. Déterminer la valeur décimale arrondie au centième de α.
3. Étudier le signe de $g(x)$, pour x appartenant à $]0~;~+\infty[$.

II Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(x-5)\ln x}{x}$$

On peut donc aussi écrire

$$f(x) = \frac{1}{x}(x-5)\ln x \quad \text{et} \quad f(x) = \ln x - \frac{5\ln x}{x}.$$

1. **a.** Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. **a.** Soit f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$.

   b. Montrer que $f(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

   a. Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse 1. Donner une équation de la droite $\mathscr{D}$ tangente en A à la la courbe $\mathscr{C}$.

   Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de l'axe des ordonnées.

   b. Tracer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ sur papier millimétré. (Unité graphique : 2 cm)

∽ Baccalauréat ES La Réunion juin 1998 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour se rendre au lycée, Frédéric a le choix entre deux itinéraires A ou B. La probabilité qu'il choisisse l'itinéraire A est $\frac{1}{3}$.

La probabilité qu'il arrive en retard sachant qu'il emprunte l'itinéraire A est $\frac{2}{5}$; celle qu'il arrive en retard sachant qu'il emprunte l'itinéraire B est $\frac{3}{10}$.

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

1. **a.** Quelle est la probabilité que Frédéric choisisse l'itinéraire B ?
   b. Sachant qu'il choisit l'itinéraire A, quelle est la probabilité qu'il arrive à l'heure ?
2. Quelle est la probabilité qu'il arrive à l'heure au lycée et qu'il ait choisi l'itinéraire A ?
3. Quelle est la probabilité que Frédéric arrive à l'heure au lycée ?
4. Sachant que Frédéric est arrivé à l'heure au lycée, quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire B ?

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

1. Une fonction g est définie sur l'intervalle $]-4~;~2[$ par :

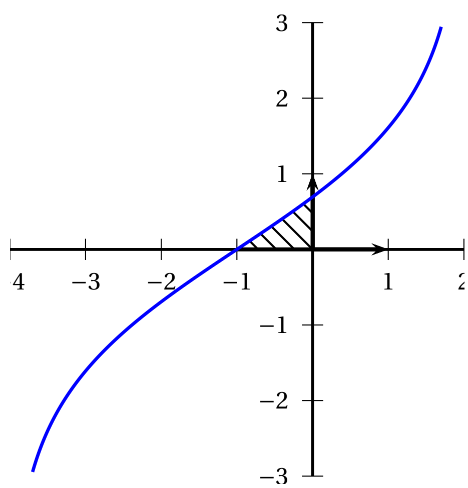
$$g(x) = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x-2},$$

   où a et b désignent deux nombres réels.

   Sa courbe représentative dans un repère donné passe par A $\left(0~;~\frac{3}{4}\right)$ et admet au point d'abscisse - 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
   Déterminer les réels a et b.
2. On considère la fonction f définie sur $]-4~;~2[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+4}{2-x}\right).$$

   Elle est représentée ci-dessous dans un repère orthonormal :



a. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]-4\,;2[$, l'égalité suivante est vraie $f'(x) = g(x)$.

b. On considère la fonction F définie sur $]-4\,;2[$ par :

$$F(x) = (x+4)\ln(x+4) - (x-2)\ln(2-x).$$

Calculer $F'(x)$.

c. En déduire la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire du domaine hachuré sur la figure.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

En 1990, un pays avait une population de 50 millions d'habitants.
Par accroissement naturel, sa population augmente de 1,5 % par an. Par ailleurs, on constate une augmentation supplémentaire de 450 000 habitants par an, due à l'immigration.
L'unité est le million d'habitants.
On note $u_0 = 50$ le nombre d'habitants en 1990 (exprimé en millions d'habitants), et u_n le nombre d'habitants en $(1990 + n)$.

1. **a.** Calculer u_1 et u_2
   b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. On se propose de prévoir directement la population en 2010 si le modèle d'évolution se poursuit de la même façoon.
   Pour cela on considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 30$.
   a. Calculer v_0, v_1 et v_2.
   b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   c. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. En déduire alors la population de ce pays en l'an 2010. On donnera le résultat arrondi au million d'habitants.
3. Déterminer par le calcul en quelle année la population de ce pays dépassera 100 millions d'habitants si l'évolution se poursuit ainsi.

Problème **11 points**

Partie A

1. On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3+x}{2} \qquad g(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1 + x}{\mathrm{e}}$$

   Étudier le sens de variation des fonctions f et g sur $[0\,;1]$.
2. Soit h la fonction définie sur $[0\,;1]$ par : $h(x) = x - g(x)$. étudier les variations de h et en déduire le signe de $h(x)$ sur $[0\,;1]$.
3. On considère un repère orthonormal. On prendra pour unité graphique 10 cm sur chaque axe. On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans ce repère.
   a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	0	0,2	0,5	0,7	1
$f(x)$					
$g(x)$					

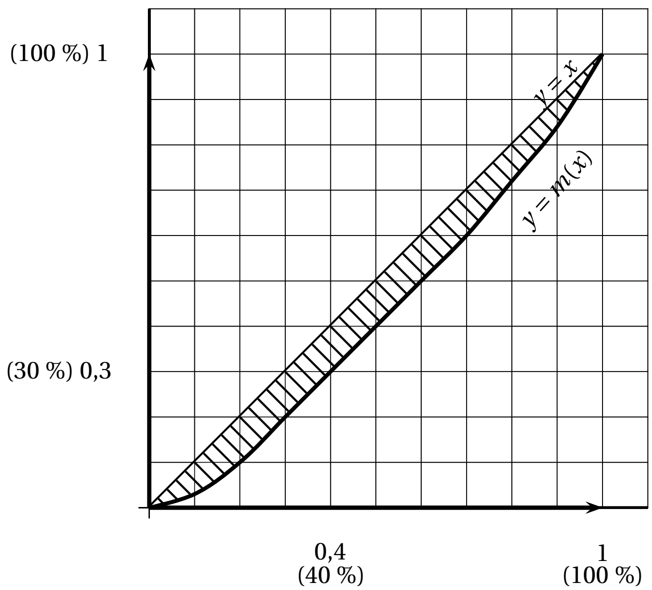
On donnera les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.

b. Représenter dans le repère donné, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et tracer la droite d'équation $y = x$.

c. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre la droite d'équation $y = x$ et la courbe représentative de g. En donner une valeur décimale approchée à 0,01 près.

Partie B

La courbe ci-dessous, appelée **courbe de Lorentz**, représente une fonction m, définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. Elle illustre la répartition des richesses d'un pays donné.



En abscisses x représente le pourcentage des personnes les plus pauvres par rapport à la population totale et en ordonnées $m(x)$ représente le pourcentage des richesses totales qu'ils possèdent.
Par exemple, 40 % des personnes en partant des plus pauvres possèdent 30 % des richesses totales.
Les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ de la première partie sont respectivement les courbes de Lorentz pour un pays F et un pays G.

1. a. Déterminer, par le calcul ou graphiquement, pour chacun de ces deux pays le pourcentage des richesses possédées par 50 % des personnes en partant des plus pauvres.

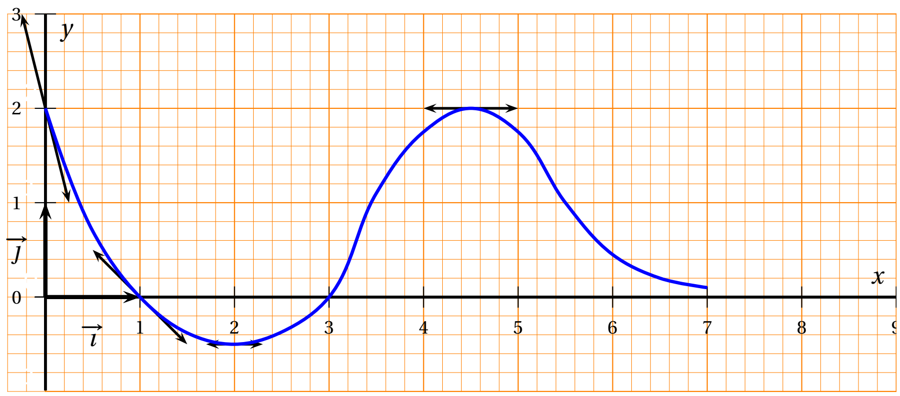
b. Parmi ces deux pays, quel est celui pour lequel les richesses sont réparties de la manière la plus égalitaire ?

2. On appelle **coefficient de Gini** le nombre 2A, où A est l'aire, en unités d'aire, du domaine hachuré sur la figure. Le coefficient de Gini évalue le degré d'inégalité de la répartition des richesses.

Calculer le coefficient de Gini pour chacun des pays F et G.

∽ Baccalauréat ES Métropole juin 1998 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats



Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm), on considère la courbe ci-dessus représentant une fonction f définie et dérivable sur $[0~;~7]$.
Toutes les réponses aux questions suivantes seront obtenues à partir du graphique.

1. Lire $f(0)$, $f(2)$, $f'(1)$, $f'\left(\dfrac{9}{2}\right)$.
2. Déterminer le signe de la fonction f et celui de sa dérivée f'.
3. Déterminer la dérivée logarithmique en 0.
4. Indiquer à 0,1 près des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x) = 1$.
5. On note $\text{I} = \displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{5} f(x)\,\text{d}x$. Parmi les intervalles proposés ci-dessous, indiquer celui qui contient le nombre I (on précisera rapidement la méthode utilisé pour le déterminer) :

$$\left[0~;~\frac{1}{2}\right[,\quad \left[\frac{1}{2}~;~2\right[,\quad [2~;~5[,\quad [5~;~10[$$

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Un magasin de distribution vend deux types de téléphones portables : des téléphones standard et des téléphones miniatures.
Il propose aussi deux types d'abonnements mensuels : l'abonnement 1 heure ; l'abonnement 2 h 30.
Le service marketing effectue une enquête sur un échantillon de 2 000 clients ayant acheté dans ce magasin, pendant l'année en cours, un téléphone, et un seul, de l'un des types vendus et ayant opté pour un seul des abonnements proposés.
Sur les 2 000 clients interrogés, 1 200 ont acheté le modèle standard.
Sur ces 2 000 clients, 960 ont choisi l'abonnement 1 heure.
Un client est pris au hasard dans l'échantillon. On note les évènements :

- S « Le client a acheté le modèle standard » ;
- M « Le client a acheté le modèle miniature » ;
- A_1 « Le client a choisi l'abonnement 1 heure » ;
- A_2 « Le client a choisi l'abonnement 2 h 30 ».

On note $p(E)$ la probabilité d'un évènement E.
Les résultats seront donnés sous forme décimale avec 3 chiffres après la virgule.

1. Déterminer $p(S)$, $p(M)$, $p(A_1)$.
2. **a.** Parmi les clients qui ont acquis le modèle standard, 32 % ont pris l'abonnement A_1. Traduire cette donnée en terme de probabilité.
   b. En déduire la probabilité d'avoir acquis le modèle standard et d'avoir opté pour l'abonnement A_1.
   c. Justifier que la probabilité d'avoir choisi le modèle miniature et l'abonnement A_1 est égale à $0,288$.
3. Le coût d'un téléphone standard est de 1 000 F et celui d'un miniature est de 3 000 F.
   L'abonnement A_1 revient à 170 F par mois.
   L'abonnement A_2 revient à 400 F par mois.
   On appelle X la variable aléatoire correspondant au coût total sur 1 an occasionné par l'achat d'un téléphone et l'abonnement choisi, pour un client pris au hasard dans l'échantillon.
   a. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X, en expliquant votre raisonnement.

x_i	3 040		5 800	
$p(X = x_i)$	0,192	0,288		

   b. Calculer l'espérance mathématique de X et l'interpréter.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Les fabricants d'ordinateurs portables vendent leurs machines à un prix P_n l'année n. Les quantités offertes O_n sont fonction du prix P_{n-1} (à l'année $n-1$), ceci du fait des délais de fabrication. Les quantités demandées D_n sur le marché sont, elles, fonction du prix P_n au cours de l'année n. Les fabricants recherchent l'équilibre du marché, c'est-à-dire qu'à chaque année n on ait $O_n = D_n$ pour qu'il n'y ait pas de stock.

$$\text{On a } \left\{\begin{array}{lcll} O_n & = & 2P_{n-1} - 10 & \text{avec} \quad n \geqslant 1 \\ D_n & = & -3P_n + 140 & \text{avec} \quad n \geqslant 0. \end{array}\right.$$

P_n est exprimé en milliers de francs, O_n et D_n en centaines d'unités.

1. **a.** Sur le document joint (à rendre avec la copie), on a représenté les droites d'équations : $y = 2x - 10$ et $y = 3x + 140$.
   Déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.
   b. On a $P_0 = 15$, déterminer la valeur de O_1 ; O_1 est représenté sur le graphique.
   Les quantités offertes doivent chaque année être égales aux quantités demandées, donc en particulier $O_1 = D_1$. En utilisant D_1 , on a représenté P_1 sur le graphique.
   Ce prix P_1 , détermine une offre O_2 qui doit être égale à D_2. Cette valeur déclenche alors un prix P_2 ; le représenter sur le graphique ainsi que P_3 et P_4. Peut-on émettre une conjecture quant à la limite de la suite (P_n) ?
2. **a.** Dans l'hypothèse d'équilibre, soit $0_n = D_n$, démontrer que :

$$P_n = -\frac{2}{3}P_{n-1} + 50 \text{ avec } n \geqslant 1$$

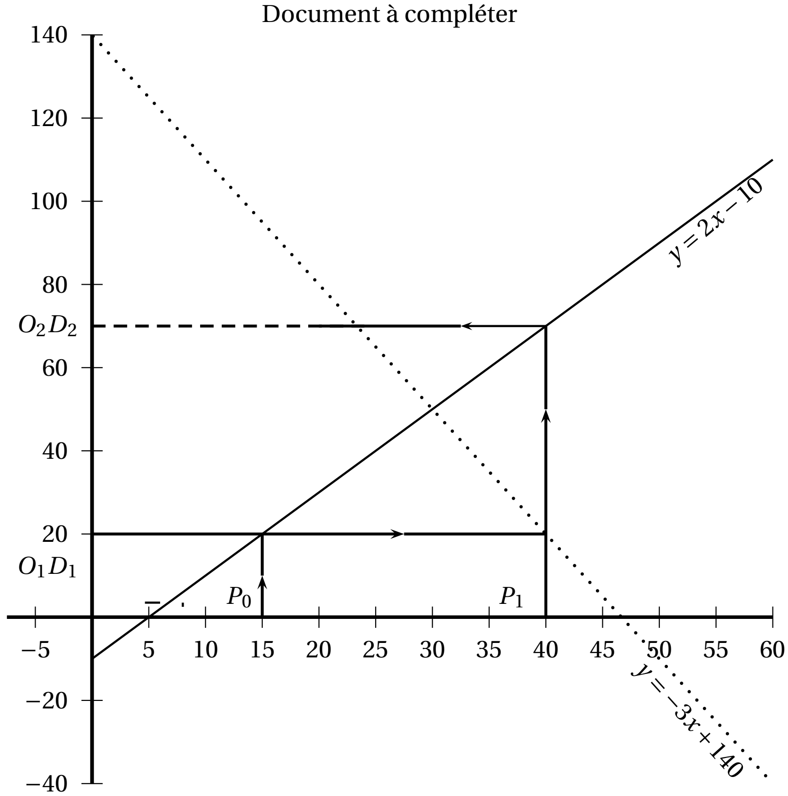
   b. (u_n) est la suite définie pour $n > 0$ par $u_n = P_n - 30$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

c. Exprimer u_n en fonction de n et montrer que :

$$P_n = 30 - 15\left(-\frac{2}{3}\right)^n \text{ pour } n?0$$

d. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |P_n - 30| = 0$. Déterminer alors la limite P de la suite (P_n) . Pour ce prix d'équilibre P, quelles sont alors les quantités offertes et demandées ?

Document à compléter



Problème **10 points**

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'un pays de 1950 à 1985.
t_i désigne le rang de l'année et p_i la population en millions d'habitants.

Année	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985
Rang de l'année t_i	0	5	10	15	20	25	30	35
p_i	8	8,9	9,9	11	12	13,5	15	16,6

A. Exploitation des données - Recherche d'un modèle

1. Représenter le nuage de points $M_i\left(t_i\ ;\ p_i\right)$ associé à la série statistique dans un repère orthogonal.
   - Sur l'axe des abscisses, choisir 2 cm pour 5 unités (5 ans).
   - Sur l'axe des ordonnées, placer 8 à l'origine, puis choisir 2 cm pour une unité (1 million d'habitants).

2. Les experts cherchent à modéliser cette évolution par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points. On pose : $y_i = \ln p_i$. *Le détail des calculs statistiques n'est pas demandé.*

a. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut du coefficient de corrélation linéaire r de la série $(t_i\ ;\ y_i)$.

b. Déterminer une équation de la droite de régression de y en t. (Les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près.)

c. En déduire l'expression de la population p en fonction du rang t de l'année.

B. Étude du modèle exponentiel

On admet que la fonction f définie sur $[0\,;35]$ par :

$$f(t) = 8\mathrm{e}^{0,02t}$$

est une modélisation satisfaisante de l'évolution de la population (en millions d'habitants) de 1950 à 1985.

1. Étudier le sens de variation de f sur $[0\,;35]$ et dresser le tableau de variation complet de f sur cet intervalle.
2. Construire soigneusement la courbe représentative de f, notée $(\mathscr{C})$, dans le repère du **A**. Qu'observe-t-on ?
3. On pose $\mathrm{I} = \int_0^{35} f(t)\,\mathrm{d}t$. Donner une valeur approchée de I arrondie à 10^{-2} près.

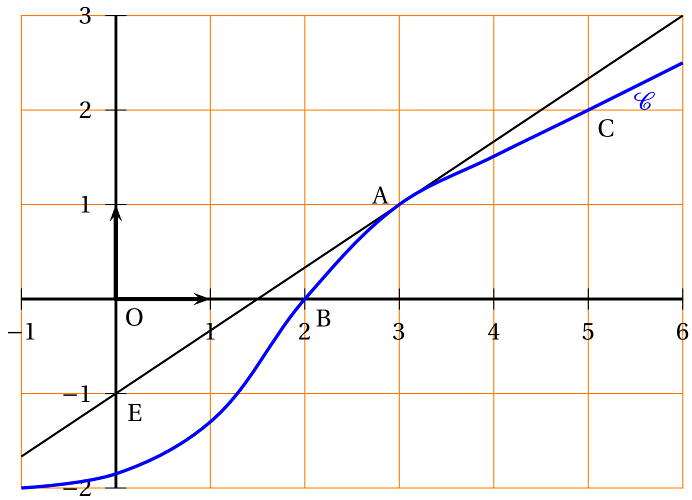
   En déduire la population moyenne m du pays durant ces 35 années et la représenter sur le graphique.
4. Calculer le rapport : $\dfrac{f(t+1)-f(t)}{f(t)}$ et en donner une interprétation en terme de pourcentage.
5. Si le modèle exponentiel étudié dans le **B** restait valable après 1985, en quelle année la population aurait-elle dépassé les 19 millions d'habitants ?

Baccalauréat ES Polynésie juin 1998

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit une fonction f dérivable et strictement croissante sur $[-1\ ;\ 6]$.
La courbe $(\mathscr{C})$ représentant f passe par B$(2\,;\,0)$ et C$(5\,;\,2)$.
Sa tangente $(\mathscr{D})$ au point A$(3\,;\,1)$ passe par E$(0\ ;\ -1)$.
Le graphique donné pourra être exploité dans tout l'exercice.



On désigne par ln la fonction logarithme népérien. Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln[f(x)]$.

1. Pour quelles valeurs de x, $g(x)$ est-il défini ? On note I l'intervalle trouvé.
2. Quel est le sens de variation de g sur I (justifier) ?
3. Résoudre dans l'intervalle I l'équation $g(x) = 0$.
4. Donner une valeur décimale approchée de $g(5)$ à 0,01 près.
5. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f'(x)$. En déduire la valeur de $g'(3)$.
6. Quelle est la limite de la fonction g en 2 ? Interpréter graphiquement ce résultat.
7. En utilisant tous les résultats précédents, donner dans un repère orthonormal (l'unité graphique est le centimètre) l'allure de la courbe (F) représentant la fonction g ainsi que sa tangente au point d'abscisse 3.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

On donnera les réponses sous forme de fractions. On dispose de 10 boules blanches, de 10 boules noires et de deux urnes U_1 et U_2.
Un joueur peut répartir les 20 boules comme il le veut entre les deux urnes. Puis on lui bande les yeux, et il choisit au hasard l'une des deux urnes, dans laquelle il tire une boule. Si cette boule est blanche, il gagne.

1. Luc dépose une boule noire dans l'urne U_1 et les 19 autres boules dans l'urne U_2. Quelle est la probabilité qu'il gagne ?
2. Yves dépose une boule blanche dans l'urne U_1 et les 19 autres boules dans l'urne U_2. Quelle est la probabilité qu'il gagne ?
3. Louise dépose 5 boules blanches dans chaque urne, n boules noires dans l'urne U_1 et $(10-n)$ boules noires dans l'urne U_2 $(0 \leqslant n \leqslant 10)$.

a. Montrer que la probabilité qu'elle gagne est égale à :

$$P_n = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{5+n} + \frac{5}{15-n}\right).$$

b. On donne le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n		$\frac{50}{84}$	$\frac{50}{91}$	$\frac{50}{96}$	$\frac{50}{99}$		$\frac{50}{99}$	$\frac{50}{96}$	$\frac{50}{91}$	$\frac{50}{84}$	

Déterminer les valeurs manquantes.

c. Ranger les probabilités de gagner de Luc, Yves et Louise dans l'ordre croissant.

Exercice 2 5 points
Enseignement de spécialité

Dans une entreprise, la direction et le personnel se sont mis d'accord , afin d'éviter des licenciements, pour réduire la durée hebdomadaire du travail et la faire passer de cinq jours à quatre jours.
L'un des trois jours de congé sera le dimanche, les deux autres étant répartis au hasard dans la semaine.
Dans un sac, on a disposé six boules portant chacune le nom d'un des jours de la semaine, du lundi au samedi. Chaque employé « choisit » ses deux jours de congé autres que le dimanche en tirant au hasard et simultanément deux des boules, supposées indiscernables au toucher. Il remet ensuite les deux boules tirées dans le sac.

1. a. Soit A l'évènement : « L'un des jours de congé est le samedi ». Montrer que la probabilité de A est égale à $\frac{1}{3}$.

b. On définit les évènements B et C suivants :
B : « Parmi les jours de congé figurent le lundi, ou le samedi, ou ces deux jours ».
C : « Les jours de congé sont trois jours consécutifs ».
Calculer la probabilité de ces évènements.

c. Nicolas aimerait bien avoir les mêmes jours de congé qu'Aurélie. Quelle est la probabilité que son souhait se réalise ?

2. L'entreprise compte douze employés. On désigne pas X la variable aléatoire égale au nombre d'employés ayant tiré le samedi comme jour de congé.

a. Calculer la probabilité que X soit égal à 5.

b. Le tableau suivant donne quelques valeurs de la fonction de répartition de X avec une précision de 0,000 1 :

X	0	1	2	3	4
$P(X \leqslant x)$	0,0077	0,0540	0,1811	0,3931	0,6315

En déduire la probabilité que X soit inférieure ou égale à 5.

Problème **10 points**

Une entreprise fabrique un produit chimique liquide. Les coûts seront exprimés en milliers de francs (francs français) et les quantités en tonnes.

1. Coût marginal

On a observé que le coût marginal pour une production de x tonnes est donné pour x réel dans l'intervalle $[0\,;\,40]$ par la fonction h définie par :

$$h(x) = 1,5\mathrm{e}^{0,05x}.$$

a. Étudier les variations de h.

b. Calculer $h(0)$, $h(20)$, $h(30)$, $h(40)$.

c. Représenter la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,40]$. On prendra comme unités 1 cm pour 4 tonnes en abscisse, 1 cm pour 1 millier de francs en ordonnée.

d. Trouver la primitive de h sur l'intervalle $[0\,;\,40]$ qui vaut 30 en 0.

2. Coût total

On note $f(x)$ le coût total pour une production de x tonnes $(0 \leqslant x \leqslant 40)$. Les coûts fixes s'élèvent à 30 milliers de francs (c'est-à-dire $f(0) = 30$). On rappelle que $P(x) = h(x)$.

a. Montrer que $f(x) = 30\mathrm{e}^{0,05x}$.

b. Calculer $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ et vérifier que ce nombre est constant. De quel pourcentage le coût total augmente-t-il quand la production augmente d'une tonne ?

3. Coût moyen

Le coût moyen unitaire est défini sur l'intervalle $]0\,;\,40]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

a. Quel est le coût moyen unitaire d'une tonne, quand l'usine en produit 40 ? (on donnera la réponse arrondie au franc).

b. Étudier la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,40]$ (limite en 0, sens de variation).

Dresser le tableau de variation de g. Tracer la courbe représentative de g sur le graphique précédent.

c. Vérifier sur cet exemple que lorsque le coût moyen est minimal, il est égal au coût marginal.

Baccalauréat ES Antilles-Guyane septembre 1998

EXERCICE 1 **4 points**

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Neuf amis, cinq garçons et quatre filles, décident de tirer au sort deux conducteurs, qui devront rester sobres durant une soirée.
Chacun écrit son nom sur un carton glissé ensuite dans une boîte.
L'un d'entre eux extrait au hasard, successivement et sans remise, deux cartons de la boîte.
On définit les évènements G_1, G_2, F_1 et F_2 par :

- G_1 : « Un garçon est désigné au premier tirage » ;
- G_2 : « Un garçon est désigné au deuxième tirage » ;
- F_1 : « Une fille est désignée au premier tirage » ;
- F_2 : « Une fille est désignée au deuxième tirage ».

1. **a.** Calculer la probabilité que le nom d'une fille apparaisse au deuxième tirage sachant que le nom d'un garçon a été lu sur le premier carton.
   b. Calculer la probabilité de l'évènement $G_1 \cap F_2$. La comparer à celle de l'évènement $G_2 \cap F_1$.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait deux conductrices en fin de soirée.
3. Calculer la probabilité que le sort désigne une fille au deuxième tirage.
4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles désignées.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer son espérance mathématique $\text{E}(X)$.

EXERCICE 2 **4 points**

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du SMIC horaire (Salaire Minimum Interprofessionnel de Croissance) de 1988 à 1996.

Date	07/88	07/89	07/90	07/91	07/92	07/93	07/94	07/95	07/96
Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Montant en francs (y_i)	28,76	29,91	31,28	32,66	34,06	34,83	35,56	36,98	37,91

Source : INSEE

1. Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i\ ;\ y_i)$.
   Le plan est rapporté à un repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1 cm pour 1 an sur l'axe des abscisses et 2 cm pour 1 franc sur l'axe des ordonnées.
   L'origine du repère correspond au point de coordonnées $(0\,;28)$.
2. à l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ y_i)$.
   Pourquoi peut-on envisager un ajustement linéaire ?
3. Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
   (Les coefficients seront donnés par des valeurs approchées à 10^{-2} près.)
   Tracer cette droite sur le graphique précédent.
   (Les coordonnées des points utilisés pour le tracé de la droite seront indiquées.)
4. Estimer, à l'aide de l'équation de la droite de régression et en faisant figurer sur la copie les étapes du calcul, le montant prévisible du SMIC en juillet 1997.

5. Quelle est, en pourcentage, l'erreur commise par rapport au montant réel du SMIC qui était de $39,93$ F en juillet 1997 ?

EXERCICE 3 **5 points**
Enseignement obligatoire

On considère une fonction f de la variable réelle x, dont on donne le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		‖	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	0	$+\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	1

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques 2 cm sur chaque axe).

Partie A

En interprétant le tableau donné ci-dessus :

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Placer dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$:
   a. l'asymptote horizontale (D) ;
   b. l'asymptote verticale (D$'$) ;
   c. le point A où la tangente à $(\mathscr{C})$ est horizontale.

Partie B

On donne maintenant l'expression de f :

$$f(x) = 1 + \frac{4}{(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$

1. Résoudre les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 1$.
2. Au moyen de votre calculatrice remplir le tableau suivant (recopier ce tableau sur votre copie.)

x	-1	$-0,75$	0,5	2	3	4
$f(x)$						

3. Placer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère de la question **A. 2.**

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \frac{1}{2}u_n + 1. \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm, tracer la droite (D) d'équation $y = x$ et droite (D′) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.
   En utilisant (D′) et (D), représenter sur ce graphique les points P, Q, R, S, T, U, V, de coordonnées respectives : $(u_0 ; 0), (u_0 ; u_0), (u_0 ; u_1), (u_1 ; u_1), (u_1 ; u_2), (u_2 ; u_2)(u_2 ; u_3)$.
3. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $v_n = u_n - 2$.
   a. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Exprimer v_n en fonction de n, en déduire l'expression de u_n fonction de n.
   c. Calculer la limite de u_n.

PROBLÈME **10 points**

Le but du problème est d'étudier une fonction, dont on connaît la représentation graphique, d'étudier la position de la courbe par rapport à l'une de ses tangentes et de calculer une aire.

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x\ln x - x.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (voir annexe).
Unités graphiques utilisées : 2 cm sur chaque axe.
Joindre cette annexe à votre copie.

A. Étude de la fonction *f*

1. étude des limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
   a. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$. (On donne $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$).
   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$. (On pourra mettre x en facteur).
2. Montrer que $f'(x) = 2\ln x + 1$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4. Calculer les coordonnées du point A, intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ et de l'axe des abscisses. Placer ce point A sur le graphique donné en annexe.

B. Position de $(\mathcal{C})$ par rapport à l'une de ses tangentes

1. Établir qu'une équation de la droite (Δ), tangente en A à la courbe $(\mathcal{C})$ est : $y = 2x - 2\sqrt{\text{e}}$.
   Placer (Δ) sur le graphique donné en annexe.
2. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - (2x - 22\sqrt{\text{e}}).$$

   a. Calculer $g'(x)$.
   b. À l'aide du tableau de variations de g montrer que $g(x) \geqslant 0$ sur $]0 ; +\infty[$.
   En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ est au-dessus de la droite (Δ) sur $]0 ; +\infty[$.

C. Calcul d'une aire

Soit H la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$H(x) = x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right).$$

1. Calculer $H'(x)$.

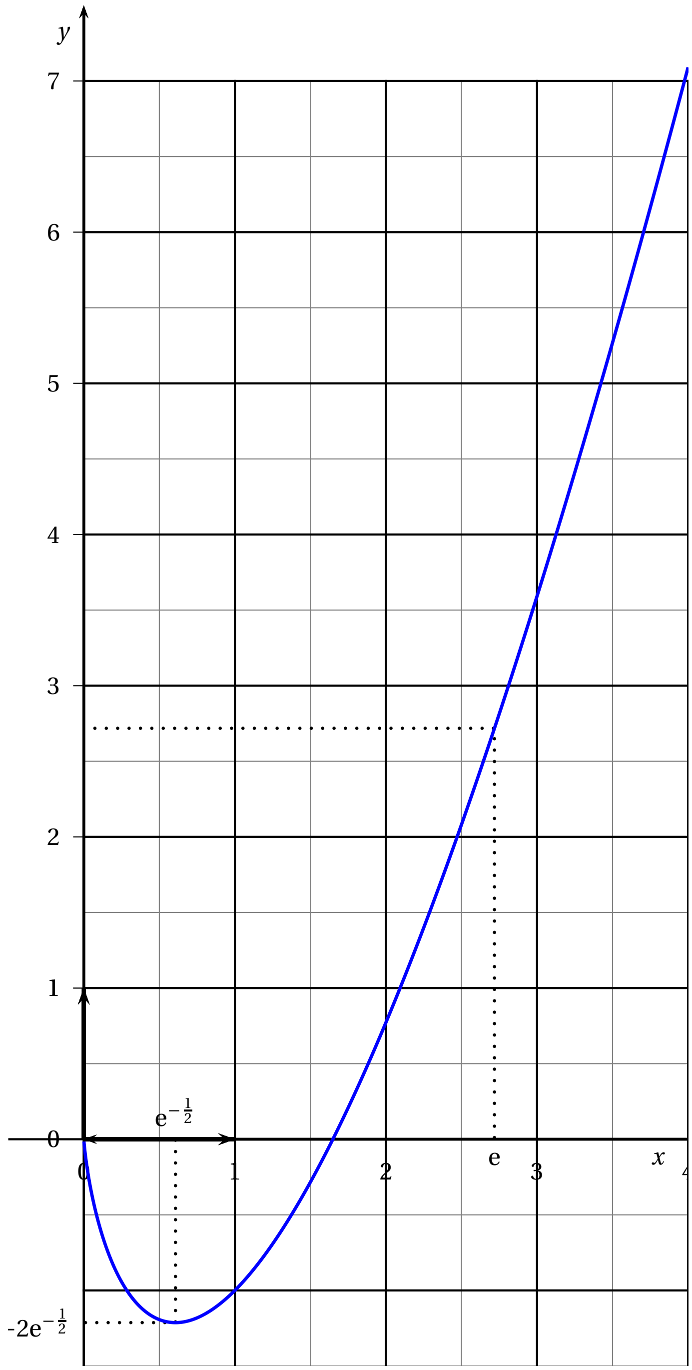
2. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\sqrt{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \left(2x\ln x - 3x + 2\sqrt{\mathrm{e}}\right)\,\mathrm{d}x$.

3. Cette intégrale correspond au calcul de l'aire d'un domaine plan.

  a. Colorier ce domaine sur la figure.

  b. Donner, en cm^2, une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de cette aire.

Annexe



↜ Baccalauréat ES Métropole septembre 1998 ↝

EXERCICE 1 **5 points**

On s'intéresse à l'évolution de la population mondiale entre les années 1950 et 1990. Le document ci-après donne une représentation graphique des données pour les années 1950, 1960, 1970, 1980 et 1990 en papier semi-logarithmique.
L'allure du graphique incite à chercher un modèle sous la forme d'une fonction f définie par :

$$f(t) = A\mathrm{e}^{at}$$

où t désigne le rang de l'année, avec comme origine des temps l'année 1950, et $f(t)$ la population en milliards d'habitants.

1. Déterminer les coefficients A et a en utilisant les données de 1950 et de 1990, à savoir :

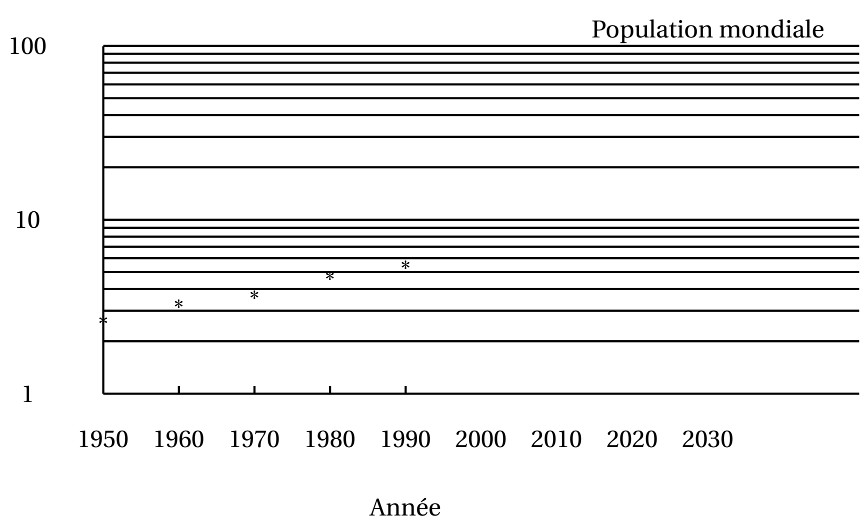
Rang t	0	40
Population en milliards d'habitants	2,5	5,2

On donnera les valeurs exactes de A et a puis des valeurs approchées à 10^{-4} près.
Dans la suite on considérera que : $f(t) = 2,5\mathrm{e}^{0,018t}$.

2. Représenter graphiquement f dans le même repère semi-logarithmique que le nuage (document page suivante). Justifier le tracé.

3. à l'aide du modèle proposé, calculer une estimation de l'année au cours de laquelle la population mondiale devrait dépasser 10 milliards d'habitants. Indiquer sur le graphique comment contrôler ce résultat.

4. Calculer $\dfrac{f(t+1) - f(t)}{f(t)}$.
Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée.
Interpréter ce résultat en terme de taux de croissance annuel.



EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Dans cet exercice on pourra utiliser les notations usuelles $p(E)$ pour désigner la probabilité d'un évènement E, $p(F/E)$ ou $p_E(F)$ pour désigner la probabilité conditionnelle de F, sachant l'évènement E réalisé.
Un concours de recrutement de techniciens hautement qualifiés est ouvert uniquement aux étudiants de deux écoles ; l'une s'appelle l'école Archimède, l'autre l'école Ptolémée.
On dispose des informations suivantes concernant les taux de réussite à ce concours pour l'année 1997 :

— le taux de réussite pour les candidats issus de l'école Archimède est de : 85 % ;
— le taux de réussite pour les candidats issus de l'autre école est de : 80 % ;
— le taux de réussite pour l'ensemble des candidats est de : 82 %.

On peut interpréter ces données en termes probabilistes ; on suppose pour cela qu'on choisit un candidat au hasard.
On note R l'évènement : « le candidat a réussi ».
On note de même A l'évènement : « le candidat est issu de l'école Archimède ».
On note $\overline{R}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires de R et de A.

1. Interpréter les données numériques de l'énoncé en termes probabilistes.

2. Les évènements R et A sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.

3. L'objet de cette question est de déterminer la proportion de candidats issus de l'école Archimède parmi les candidats.

On note x la proportion de candidats issus de l'école Archimède parmi les candidats : c'est aussi la probabilité qu'un candidat, choisi au hasard, soit un candidat issu de l'école Archimède.

a. Exprimer $p(R \cap A)$, $p\left(\overline{A}\right)$ et $p\left(R \cap \overline{A}\right)$ en fonction de x.

b. En déduire l'expression de $p(R)$ en fonction de x.

c. Déterminer la valeur de x.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

*Les deux questions **1.** et **2.** peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

1. On envisage un jeu publicitaire sous la forme d'un QCM (questionnaire à choix multiples).

Il comporte quatre questions et, pour chaque question, trois réponses sont possibles dont une seule exacte.

Un joueur répond en choisissant au hasard une réponse pour chaque question.

a. De combien de façons différentes peut-il remplir le questionnaire ?

b. On nomme X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes obtenues par le joueur. Donner la loi de probabilité de X.

2. Pour accroître la difficulté, on modifie le QCM : il comporte cette fois cinq questions et, pour chaque question, quatre réponses sont possibles dont une seule exacte.

Un joueur remplit au hasard le QCM.

La deuxième ligne du tableau ci-dessous indique les probabilités respectives pour que le joueur ait exactement 0, 1, 2, 3, 4, 5 réponses justes.

Nombre de bonnes réponses	0	1	2	3	4	5
Probabilité correspondante	$\frac{243}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{1}{1024}$
Nombre de points obtenus					$16-x$	20

Il est prévu d'attribuer 4 points par réponse juste, on ne sait comment pénaliser une réponse fausse : on note x le nombre entier de points retirés au joueur par réponse fausse.

a. Recopier le tableau ci-dessus et compléter la dernière ligne, en indiquant dans chaque cas le nombre de points obtenus en fonction de x. On définit ainsi une variable aléatoire N égale au nombre de points obtenus par le joueur.

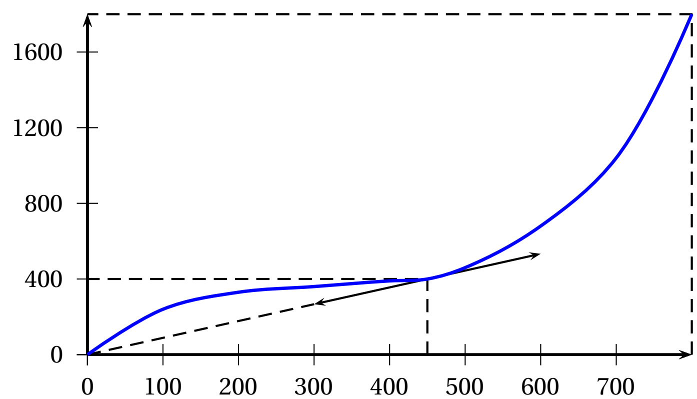
b. Exprimer l'espérance de N en fonction de x.

PROBLÈME **10 points**

Une entreprise spécialisée produit deux types de détergents liquides qu'on nommera A et B pour simplifier.
Les deux parties du problème sont indépendantes.

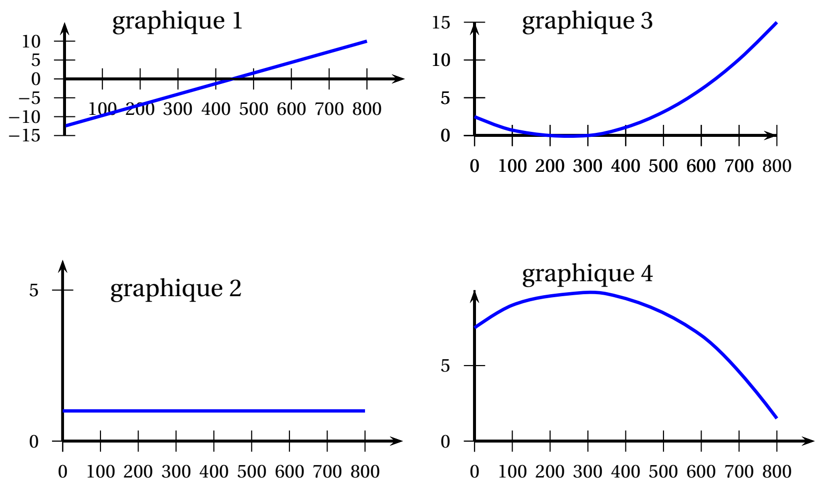
Partie A

La courbe ci-dessous représente le coût total de production du produit A en fonction de la quantité produite. On note x la quantité produite exprimée en litres et $C_{\text{T}}(x)$ le coût total exprimé en francs, x variant de 0 à 800.
On notera que $C_{\text{T}}(0) = 0$, $C_{\text{T}}(450) = 400$, $C_{\text{T}}(800) = 1\,800$ et que la tangente au point d'abscisse 450 passe par l'origine O du repère.



Répondre aux questions suivantes en utilisant les informations portées sur ce graphique.

1. Les économistes définissent le coût marginal comme le supplément de coût de production engendré par la production d'une unité supplémentaire. On considère qu'il peut être modélisé par la dérivée du coût total. Nous le noterons C_m. On a donc $C_m = C'_{\text{T}}$. Parmi les quatre graphiques (1, 2, 3 et 4) de la feuille jointe, un correspond au coût marginal associé à la production du détergent A. Lequel ? Justifier la réponse.



2. Déterminer $\displaystyle\int_0^{450} \mathrm{C}_m(x)\,dx$.

Partie B

Pour le détergent B l'entreprise est en situation de monopole. Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par :

$$f(x) = 0,5x + \frac{8}{x} \quad \text{où } x > 0.$$

Le coût moyen $f(x)$ est exprimé en milliers de francs et la quantité produite x en hectolitres. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan (unité graphique : 1 cm).

1. Étude de la fonction coût moyen

a. étudier le sens de variation de cette fonction sur l' intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Déterminer les limites de $f(x)$ en 0 et $+\infty$.

c. Montrer que la droite D d'équation $y = 0,5x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

d. Construire $\mathscr{C}$ ainsi que D, donner un tableau de valeurs.

2. Seuils de rentabilité pour l'entreprise

L'entreprise ne peut être bénéficiaire que si le prix de vente de l'hectolitre est supérieur au coût moyen de fabrication.

Le prix de vente de l'hectolitre $p(x)$ est fonction de la quantité x vendue.

$$p(x) = -0,8x + 13$$

où $p(x)$ est exprimé en milliers de francs et x en hectolitres.

a. On note $\mathscr{P}$ la représentation graphique de la fonction p. Tracer $\mathscr{P}$ dans les mêmes axes que la représentation de f, puis déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

b. Retrouver le résultat précédent par le calcul. (On pourra se ramener à une inéquation du second degré).

Baccalauréat ES Polynésie septembre 1998

EXERCICE 1 **4 points**

Le tableau ci-dessous représente la dette extérieure en pourcentage du PIB pour la Belgique (PIB : Produit Intérieur Brut).

x_i années	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
y_i dette en % du PIB	0,2	0,1	0,1	0,5	1,8	4,5	11,0	16,6	20,1	23,2	21,2

Source : CEE Eurostat Monnaies et Finances 1987

1. Représenter le nuage de points associés à cette série statistique en choisissant des unités graphiques adaptées.
2. Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique : le résultat sera lu sur la calculatrice et arrondi à 10^{-2} près.
3. On veut déterminer la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindre carrés.

   Caractériser cette droite par une équation de la forme $y = mx + p$ où m est l'arrondi à 10^{-4} près et p l'arrondi à 10^{-1} près des valeurs lues sur la calculatrice.
4. **a.** Utiliser la question précédente pour prévoir la dette extérieure de la Belgique, en pourcentage du PIB en 1986.

   b. La valeur réelle atteinte en 1986 est égale à 20,6. À quelle erreur, en pourcentage de la valeur réelle, l'estimation conduit-elle ?

EXERCICE 2 OBLIGATOIRE **5 points**

Un patineur participe à une compétition. Deux de ses sauts l'inquiètent. Il ne réussit le premier saut que dans 95 % des cas. Comme il est émotif, s'il ne réussit pas ce premier saut, il rate le deuxième 3 fois sur 10 ; sinon, si tout va bien lors du premier saut, il réussit le deuxième dans 90 % des cas.
On notera $\overline{A}$ l'évènement contraire d'un évènement A.
Soit R_1 l'évènement : « le patineur réussit le premier saut ».
Soit R_2 l'évènement : « le patineur réussit le deuxième saut ».

1. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement R_1.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement sachant que R, est réalisé.

   c. Calculer la probabilité de l'évènement R_2 sachant que R_1 n'est pas réalisé.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement : « le patineur réussit les deux sauts ».
3. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement R_2.

   b. Un spectateur, arrivé en retard, voit le patineur réussir le deuxième saut. Calculer la probabilité qu'il ait aussi réussi le premier saut.
4. Manquer le premier saut fait perdre 0,1 point, manquer le deuxième saut fait perdre 0,2 point ; le règlement prévoit que les pénalités s'ajoutent.

   Soit X la variable aléatoire donnant le total des pénalités obtenues par ce patineur lors de la compétition.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X. Quelle interprétation peut-on en faire ?

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unité graphique 1 cm sur chaque axe. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2,5+x)\text{e}^{-0,5x+1}.$$

Partie A

I. Étude de la fonction f.

1. Étudier le sens de variation de f.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{2,5}{\text{e}^{-0,5x+1}} + 2\text{e} \times \dfrac{0,5x}{\text{e}^{-0,5x}}$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f. Tracer sa représentation graphique dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.

II. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 0,3x+1$.

1. Construire dans le même repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$ la représentation graphique de g.
2. On veut résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,10]$ l'équation $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire $f(x) - g(x) = 0$.
   Pour cela on pose, pour tout x de $[0\,;\,10]$, $h(x) = f(x) - g(x)$.
   a. En utilisant les résultats obtenus à la question **1.**, montrer que, pour tout x de $[0\,;\,10]$, $h'(x)$ est strictement négatif.
   b. En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $[0\,;\,10]$ une solution unique que l'on notera α.
   c. Par lecture graphique, encadrer α à l'aide de deux nombres entiers consécutifs.
   d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

I. On considère un produit pour lequel, en fonction du prix unitaire p (en francs), la demande est donnée par $f(p)$ et l'offre par $g(p)$ (p appartient à $[0\,;\,10]$).

1. Donner le prix d'équilibre c'est-à-dire celui pour lequel l'offre est égale à la demande.
2. Vérifier que, pour un prix de 3,10 F, si le prix augmente de 1 %, la demande diminue de 1 % environ.

II. La fonction E est définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par $\text{E}(x) = x\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.
En économie, E désigne l'élasticité de f.

1. Vérifier que, pour tout x de $[0\,;\,10]$, $E(x) = \dfrac{-0,5x^2 - 0,25x}{x+2,5}$.
2. **a.** Résoudre dans $[0\,;\,10]$ l'équation : $E(x) = -1$.
   b. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} par défaut de la solution.

Baccalauréat ES Sportifs de haut-niveau octobre 1998

EXERCICE 1 **4 points**

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
Neuf amis, cinq garçons et quatre filles, décident de tirer au sort deux conducteurs, qui devront rester sobres durant une soirée.
Chacun écrit son nom sur un carton glissé ensuite dans une boite. L'un d'entre eux extrait au hasard, successivement et sans remise, deux cartons de la boîte.
On définit les évènements G_1, G_2, F_1 et F_2 par :

G_1 « Un garçon est désigné au premier tirage » ;
G_2 « Un garçon est désigné au deuxième tirage » ;
F_1 « Une fille est désignée au premier tirage » ;
F_2 « Une fille est désignée au deuxième tirage ».

1. **a.** Calculer la probabilité que le nom d'une fille apparaisse au deuxième tirage sachant que le nom d'un garçon a été lu sur le premier carton.
   b. Calculer la probabilité de l'évènement $G_1 \cap F_2$.
   La comparer à celle de l'évènement $G_2 \cap F_1$.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait deux conductrices en fin de soirée.
3. Calculer la probabilité que le sort désigne une fille au deuxième tirage.
4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles désignées.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer son espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 4 cm), la courbe $\mathscr{C}$, représentée ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left]0\ ;\ \mathrm{e}^{1,5}\right]$.
La fonction dérivée de f est notée f'.
Les variations de f sont données par le tableau suivant :

x	0		a		$\mathrm{e}^{1,5}$
$f(x)$	‖	↗	1/4	↘	

On précise que :
• Les droites (Δ) et (D) sont tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ respectivement aux points A d'abscisse a et B d'abscisse 1.
• La droite (Δ) est parallèle à l'axe des abscisses.
• L'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}$.

I. Par lecture graphique, sans justification des résultats, donner :

1. Les valeurs suivantes : $f(\text{eø})$, $f(a)$, $f'(1)$, $f'(a)$.
2. La limite de f en 0.
3. Le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x, x étant dans l'intervalle I.
4. L'ensemble des solutions, sur l'intervalle I, de l'inéquation : $f'(x) \geqslant 0$.

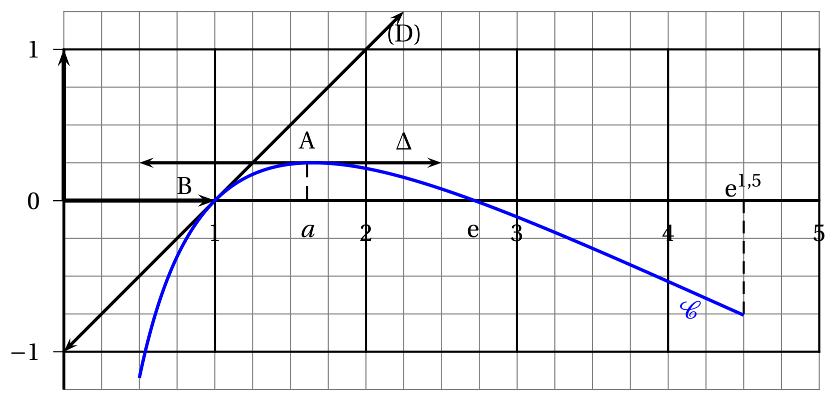
5. Une interprétation du nombre $\int_1^{e} f(x)\,dx$ et trouver parmi les intervalles suivants celui auquel appartient ce nombre :

$$[0~;~0,2[,~~[0,2~;~0,4[,~~[0,4~;~0,6[,~~[0,6~;~1[,~~[1~;~2[.$$

II. La fonction f est définie sur $= \left]0~;~e^{1,5}\right]$ par :

$$f(x) = \ln x - (\ln x)^2.$$

1. Retrouver par le calcul le résultat trouvé en **I. 3.**.
2. Déterminer le nombre a, abscisse du point A de la courbe $\mathscr{C}$.



EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Un salarié remarque qu'il lui reste, chaque mois, 2 000 F (francs français) de son salaire mensuel.
Il décide donc, en 1998, de réaliser une épargne « prudente » de la façon suivante :

• Le 28 de chaque mois, il verse 50 % du solde de son compte courant sur un plan d'épargne.
Le solde est nul le 28 décembre 1997.
• Le 28 janvier 1998, le solde de son compte courant est : $S_1 = 2\,000$ F ; il verse donc la somme $e_1 = 1\,000$ F sur son plan d'épargne et laisse 1 000 F sur son compte courant.
• Le 28 février 1998, le solde S_2 est égal à 3 000 F : c'est-à-dire 1 000 F restant, plus 2 000 F d'économies mensuelles. Il verse donc $e_2 = 1\,500$ F sur son plan d'épargne.

1. Calculer e_3 et e_4, versements respectifs de son compte courant à son plan d'épargne le 28 mars et le 28 avril.
2. On désigne par e_n le montant théorique du versement du compte courant au plan d'épargne le 28 du n^{e} mois qui suit le mois de décembre 1997.
   On a donc $e_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(e_n + 2000\right)$.
   Pour tout nombre entier naturel n non nul, on définit la suite (v_n) par $v_n = 2000 - e_n$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_1 = 1\,000$.
   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   c. Calculer $v_1 + v_2 + \ldots + v_{12}$.
3. **a.** Exprimer e_n en fonction de n.
   b. Trouver le montant de la somme capitalisée sur le plan d'épargne au 29 décembre 1998.

PROBLÈME **11 points**

On considère un produit dont le prix unitaire est x (en milliers de francs français).
D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ (en milliers d'objets) de ce produit sont définies, pour tout x positif ou nul, par les formules :

$$f(x) = \mathrm{e}^{0,5x} - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{8}{\mathrm{e}^{0,5x} + 1}.$$

Partie A

1. **a.** Déterminer $f(0)$ et la limite de f en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f sur $[0~;~+\infty[$.
2. **a.** Déterminer $g(0)$ et la limite de g en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de g sur $[0~;~+\infty[$.
3. Le plan est rapporté à un repère orthonormal (on prendra pour unité graphique 4 cm).
   Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g après avoir déterminé et tracé les tangentes respectives à ces deux courbes aux points d'abscisse 0.

Partie B

L'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution unique p dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

1. Par lecture graphique, donner une approximation à 0,1 près de p et du nombre $n = f(p)$ (on fera apparaître les tracés permettant cette lecture).
2. **a.** Calculer p et n.
   b. Le nombre p est appelé « prix d'équilibre » du produit. Donner le prix d'équilibre, exprimé en francs, arrondi au franc près, ainsi que le nombre correspondant d'objets proposés sur le marché.

Partie C

On considère les nombres $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\ln 9} g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \mathrm{I} - np$.

1. Donner une interprétation géométrique de I.
   En déduire une interprétation géométrique de J (on pourra utiliser des hachures de couleurs différentes).
2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$h(x) = x - 2\ln\left(\mathrm{e}^{0,5x} + 1\right).$$

   a. Déterminer $h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de h.
   b. En déduire que I égale $8\ln 9 - 8\ln 4$.
   c. En économie, on considère que J exprime, en millions de francs, la « rente » des consommateurs.
   Déterminer, au millier de francs près, une estimation de la « rente » des consommateurs.

Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 1998

EXERCICE 1 **5 points**

I. Le tableau ci-dessous indique les pourcentages d'accès au niveau baccalauréat d'une génération d'élèves.

Année x_i	1980	1982	1984	1986	1988	1990	1992	1994
Taux d'accès au niveau baccalauréat y_i	34 %	37,5 %	35,8 %	39,8 %	46,3 %	56,1 %	62,5 %	70,7 %

Source : d'après un document du Ministère de l'éducation nationale

N. B. *Les calculs statistiques seront effectués à la machine, aucun détail n'est demandé dans cette partie.*

1. **a.** Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal :
   - sur l'axe des abscisses on placera 1980 à l'origine et on choisira 1 cm pour une année ;
   - sur l'axe des ordonnées on placera 30 à l'origine et on choisira 1 cm pour 2 %.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série double et placer ce point sur le graphique précédent.
2. **a.** Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Peut-on envisager un ajustement affine ?

   b. Déterminer une équation de la droite de régression D de y en x : on prendra la valeur approchée à trois décimales par défaut pour le coefficient directeur de la droite et l'arrondi à l'unité pour l'autre coefficient.

   c. Tracer la droite D sur le graphique de la question **1. a.** en expliquant sa construction.
3. En supposant que l'évolution ait été la même pour les années suivantes, donner une estimation du taux d'accès au niveau baccalauréat pour 1996.

II. Lors de la publication du tableau de la partie **I.**, le taux d'accès au niveau baccalauréat pour 1996 n'était pas encore connu. On l'a connu seulement plus tard.

1. Déterminer le taux d'accès en 1996 si l'on sait que, pour la période 1980 (incluse) à 1996 (incluse), la moyenne de ce taux est exactement de 50 %, en ne retenant que les années paires.
2. Comparer alors avec l'estimation faite à la question **3.** de la partie **I** et donner en pourcentage l'erreur commise en remplaçant la valeur exacte par l'estimation faite.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Dans une grande ville, une maladie à incubation lente touche 0,1 % de la population. Un test de dépistage est proposé :
- lorsqu'une personne est malade, le test est positif dans 95 % des cas et négatif dans 5 % des cas ;
- lorsqu'une personne n'est pas malade, le test est négatif dans 96 % des cas, mais déclare la personne malade, c'est-à-dire est positif, dans 4 % des cas.
Lorsqu'une personne, prise au hasard, passe le test, on note
— M l'évènement « la personne est malade » ;
— $\overline{M}$ l'évènement « la personne n'est pas malade » ;
— T l'évènement « le test est positif » ;

— $\overline{T}$ l'évènement « le test est négatif ».

1. Donner la valeur de la probabilité $p(M)$ et les valeurs des probabilités conditionnelles suivantes : $p(T/M)$, $p\left(T/\overline{\text{M}}\right)$, $p\left(\overline{\text{T}}/\text{M}\right)$ et $p\left(\overline{\text{T}}/\overline{\text{M}}\right)$.
2. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement « M et T », notée $p(M \cap T)$.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement « M et T », notée $p(M \cap T)$.

   c. En déduire que la probabilité de T vaut $p(T) = 0{,}04091$.
3. Calculer la probabilité pour que le test donne un résultat non conforme à la réalité.
4. Le maire de la ville passe le test : il est positif. Donner la probabilité, à 10^{-1} près, que le maire soit effectivement malade.

EXERCICE 2 — 5 points

Enseignement de spécialité

À partir de 1997 une association d'aide à la recherche médicale envoie chaque année à Monsieur X un courrier pour l'inviter à l'aider financièrement par un don. Monsieur X a répondu favorablement en 1997 en envoyant un don. On admet que, chaque année à partir de 1998, la probabilité pour que Monsieur X fasse un don est égale à 0,9 s'il a fait un don l'année précédente et à 0,4 s'il n'a rien donné l'année précédente.

On note pour tout entier naturel n :

– E_n l'évènement : « Monsieur X est donateur en $1998 + n$ » ;

– P_n la probabilité de E_n ;

– $\overline{E_n}$ l'évènement contraire de E_n.

1. Traduire les données en termes de probabilités conditionnelles concernant les événements E_{n+1}, E_n, $\overline{E_n}$.
2. **a.** Préciser la valeur de P_0.

   b. Calculer $P\left(E_1 \cap E_0\right)$ et $P\left(E_1 \cap \overline{E_0}\right)$. En déduire la valeur de P_1.
3. **a.** Montrer que $P\left(E_{n+1} \cap E_n\right) = 0{,}9P_n$ et que $P\left(\text{E}_{n+1} \cap \overline{E_n}\right) = 0{,}4(1 - P_n)$ pour tout entier n.

   b. En déduire que $P_{n+1} = 0{,}5P_n + 0{,}4$ pour tout entier naturel n.

   c. Quelle est la probabilité pour que Monsieur X soit donateur en 2001 ?
4. On définit une suite (U_n) en posant pour tout entier naturel n : $U_n = P_n - 0{,}8$

   a. Démontrer que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

   b. Exprimer (U_n) en fonction de n.

   c. En déduire que $P_n = 0{,}1 \times 0{,}5^n + 0{,}8$ pour tout entier naturel n.

   d. Déterminer la limite de la suite (P_n).

PROBLÈME — 10 points

Sur le graphique ci-après, sont tracées dans un repère orthogonal, les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g, dérivables sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Partie A - Question préliminaire (les résultats seront donnés à 0,1 près).

1. Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 7$ et $f(x) = 4$.
2. Lire graphiquement $g(0)$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,14]$.
4. En déduire le signe de f' sur l'intervalle $[0\,;\,14]$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

Partie B

La fonction f est la fonction de demande d'un produit, elle met en correspondance le prix $f(x)$ du produit et la quantité x achetée par les consommateurs.
La fonction g est la fonction d'offre, elle met en correspondance le prix $g(x)$ du produit et la quantité x vendue par les producteurs. La quantité est exprimée en milliers d'unités et le prix en centaines de francs.

1. Interprétation économique

À l'aide de la lecture graphique faite en **A**, répondre aux questions suivantes :

a. Quelle quantité est achetée par les consommateurs :

— si le prix est de 700 F ?

— si le prix est de 400 F ?

b. Au-dessous de quel prix les producteurs ne sont-ils pas prêts à vendre ?

2. Étude de la recette marginale

La fonction recette R est définie sur l'intervalle $[0\,;\,14]$ par $R(x) = xf(x)$.
Une valeur approchée de la recette marginale (recette pour le x^{e} produit vendu) est donnée par $R'(x)$, où R' est la fonction dérivée de la fonction R.
On remarque que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,14]$, $R'(x) = f(x) + xf'(x)$.

a. Déduire du **A. 4.** le signe de $\mathrm{R}'(x) - f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,14]$.

b. Comparer alors, pour tout niveau de production, la recette marginale et le prix de vente $f(x)$.

3. Équilibre du marché

a. La fonction f représentée sur le graphique est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{40}{x+2}.$$

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Quelle interprétation économique peut-on faire de ce résultat ?

b. La fonction g représentée sur le graphique est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :
$g(x) = \dfrac{1}{18}x^2 + 3$.
Dans un marché à concurrence pure et parfaite, le prix p_0 qui se forme sur le marché selon la « loi de l'offre et de la demande » correspond à l'égalité de l'offre et de la demande, c'est-à-dire à l'ordonnée du point d'intersection I des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
Soit x_0 l'abscisse du point d'intersection I.

— Montrer par le calcul que x_0 est solution de l'équation

$$\text{(E)} \qquad x^3 + 2x^2 + 54x - 612 = 0.$$

— Développer l'expression $(x-6)(x^2+8x+102)$, résoudre l'équation (E), et en déduire la valeur de x_0.

— Calculer $p_0 = f(x_0)$.

4. Le surplus des consommateurs

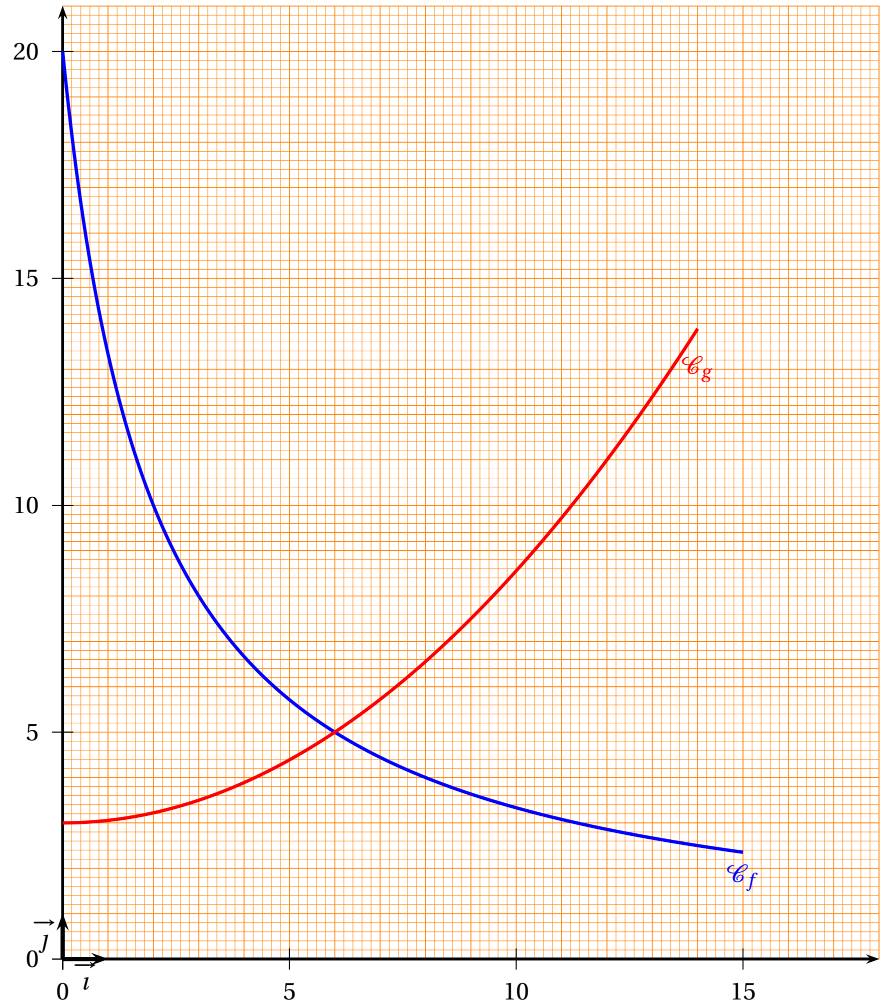
Le surplus des consommateurs se définit comme la différence entre le montant maximal que les consommateurs auraient été prêts à payer pour acheter une quantité x_0 et le montant qu'ils payent effectivement.
Ce nombre S_{C}, en situation de concurrence pure et parfaite, est donné en centaine de milliers de francs par :

$$S_{\text{C}} = \int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x - p_0 x_0.$$

On prendra $x_0 = 6$ et $p_0 = 5$.

a. Calculer S_C.

b. Soit les points O(0 ; 0), P(x_0 ; 0), I$\left(x_0\ ;\ p_0\right)$ et R$\left(0\ ;\ p_0\right)$.
Sachant que le produit $p_0 \times x_0$ est représenté par l'aire du rectangle OPIR, interpréter graphiquement le surplus des consommateurs.



Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 1998

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Au cours d'une kermesse, l'animateur d'un stand dispose, dans un enclos, de douze cages peintes : sept sont blanches, deux noires et les trois autres vertes. L'animateur place alors une souris dans l'enclos. On suppose qu'à chaque jeu, la souris choisit d'entrer au hasard dans une cage et que tous les choix sont équiprobables.
Un joueur participe au jeu. Le règlement du jeu est le suivant :

— si la souris entre dans une cage blanche, le joueur perd;
— si la souris entre dans une cage noire, le joueur gagne;
— si la souris entre dans une cage verte, l'animateur remet la souris dans l'enclos; si la souris entre alors dans une cage noire, le joueur gagne, sinon il perd.

On suppose que le choix de la deuxième cage est indépendant du choix de la première.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement « le joueur gagne » est $\dfrac{5}{24}$
2. Un joueur possède 10 F qu'il verse pour participer à une partie.
   S'il gagne, il reçoit k francs;
   sinon, il ne reçoit rien.
   Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la somme que possède le joueur après la partie.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer, en fonction de k, l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
   c. Quelle valeur faut-il donner à k pour que le jeu soit équitable (c'est-à-dire pour que ce joueur puisse espérer posséder 10 F à la fin de la partie)?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Une lessive est vendue habituellement, dans les magasins A et B, par barils de 5 kg, au prix de 65 F le baril.

1. On suppose que cette lessive est en promotion dans ces deux magasins :
   a. Dans le magasin A, on fait une réduction de 10 % sur le prix du baril. Dans le magasin B, on offre 10 % de produit gratuit en plus pour l'achat d'un baril.
   Déterminer dans lequel des deux magasins il est le plus avantageux d'acheter cette lessive.
   b. Répondre à la même question si, dans A, on fait une réduction de 20 % et, dans B, on offre 25 % de produit gratuit en plus.
2. On suppose maintenant que, dans le magasin A, on fait une réduction de x % du prix du baril et que, dans le magasin B, on offre y % de produit gratuit en plus pour l'achat d'un baril.
   a. Quelle relation doivent vérifier x et y pour que les promotions soient les mêmes dans les deux magasins?
   Dans ces conditions, déterminer x lorsque $y = 25$.
   b. Dans cette question, $x = 10$. Quel pourcentage minimum, en nombre entier, de produit gratuit doit offrir le magasin B pour que sa promotion soit plus avantageuse que celle de A?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Une observation faite sur la fréquentation d'un stade de football a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement de 80 %, ainsi que l'apparition de 4 000 nouveaux abonnés.
L'objet de cet exercice est l'étude du devenir du nombre annuel des abonnés, en supposant que la situation décrite par l'observation reste la même au fil des ans.
Les questions **2.** *et* **3.** *peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

On note a_n le nombre des abonnés à la fin de la n^{e} année et on précise que $a_0 = 7000$.

1. Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0,8a_n + 4000$.

2. L'objet de cette question est l'étude graphique de la suite (a_n).
On considère un repère orthonormal (unité graphique : 0,5 cm représente 1 000 abonnés).

a. Tracer dans ce repère la droite (D) d'équation $y = 0,8x + 4000$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$, pour les abscisses comprises entre 0 et 25 000.

b. Placer a_0 sur l'axe des abscisses. Utiliser les droites précédentes pour placer sur l'axe des abscisses les valeurs a_1, a_2 et a_3.

c. Si l'on poursuit le processus graphique précédent, quelle limite peut-on présumer pour la suite (a_n) ?

3. L'objet de cette question est l'étude numérique de la suite (a_n).
Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = 20000 - a_n$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Soit n un nombre entier naturel; exprimer u_n en fonction de n. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a $a_n = 20000 - 13000 \times 0,8^n$.

c. En utilisant le résultat précédent, déterminer la limite de la suite (a_n).

d. Après combien d'années le nombre d'abonnés dépassera-t-il 16 000 ?

PROBLÈME **11 points**

Les objectifs de ce problème sont, en s'appuyant sur une fonction auxiliaire (partie A), l'étude d'une fonction f, le tracé de sa représentation graphique et le calcul d'une aire associé (partie B).

Partie A

★ Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier le sens de variations de g (on ne demande pas d'étudier les limites de g en 0 et en $+\infty$).

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α appartenant à l'intervalle $[1 ; 2]$.
Expliquer pourquoi α est la seule solution de l'équation $g(x) = 0$, pour x appartenant à $]0 ; +\infty[$.
Donner un encadrement de α, d'amplitude 10^{-2}.

3. Étudier le signe de $g(x)$ en fonction de x.

Partie B

★ Étude d'une fonction f et calcul d'une aire

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{1 - \ln x}{x}$$

et on note f' sa dérivée.
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x appartenant à $]0 ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   En déduire le sens de variations de f.
3. **a.** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
   b. Déterminer le point d'intersection I de $\mathscr{C}$ et (Δ) et étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (Δ).
4. Tracer la droite (Δ) et la courbe $\mathscr{C}$.
5. Calculer la valeur exacte de l'aire, en cm^2, de la partie comprise sur le graphique entre $\mathscr{C}$, (Δ) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \text{e}$.
   (On pourra remarquer que $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x \Big)$.