Baccalauréat ES 1999

L'intégrale de juin à décembre 1999

∾ Baccalauréat ES Amérique du Nord juin 1999 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une salle de spectacle propose, pour la saison, des abonnements pour 4, 5 ou 6 spectacles.
Dans la population des abonnés, la répartition est la suivante :

- 43,5 % ont choisi l'abonnement 4 spectacles,
- 33 % ont choisi l'abonnement 5 spectacles,
- le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.

D'autre part, 65 % des abonnés sont des jeunes de moins de 25 ans, et dans cette population, la répartition est différente :

- 40 % ont choisi l'abonnement 4 spectacles,
- 40 % ont choisi l'abonnement 5 spectacles,
- le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.

On interroge un abonné au hasard.

- On note A l'évènement « L'abonné interrogé a moins de 25 ans ». Ainsi la probabilité $p(\text{A})$ de cet évènement est 0,65.
- On note B l'évènement « L'abonné interrogé a choisi 5 spectacles ».
- Pour tout évènement V, on note $\overline{V}$ l'évènement contraire de V.

1. **a.** Quelle est la probabilité que l'abonné interrogé ait 25 ans ou plus ?

b. Sachant que l'abonné interrogé a moins de 25 ans, quelle est la probabilité qu'il ait choisi 5 spectacles ?

c. Décrire l'évènement $(A \cap B)$, et démontrer que la probabilité $p(A \cap B)$ est égale à $0,26$.

2. **a.** Démontrer que la probabilité $p\left(\overline{A} \cap B\right)$ est égale à $0,07$.

b. En déduire la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé.

3. L'abonnement pour 4 spectacles coûte 50 euros, celui pour 5 spectacles coûte 60 euros, et celui pour 6 spectacles coûte 70 euros. On appelle X la variable aléatoire égale à la somme dépensée par l'abonné interrogé.

a. Donner la loi de probabilité de X en complétant :

x_i	50	60	70
$p(X = x_i)$			

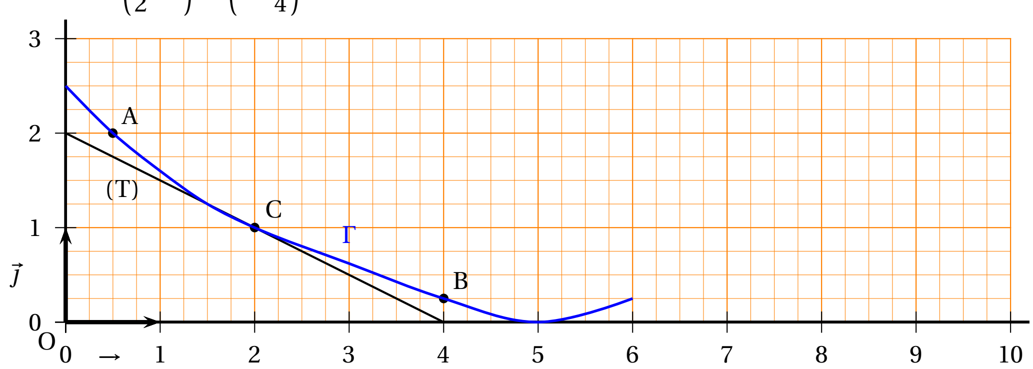
b. Calculer l'espérance de X.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

On donne, dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, la courbe représentative (Γ) d'une fonction f, définie et dérivable sur $[0 ; 6]$.

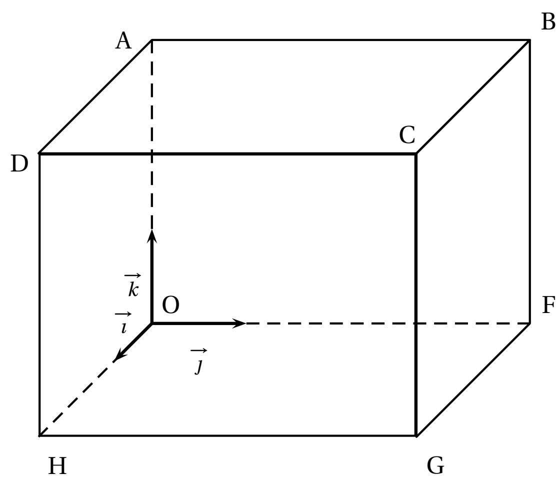
Les points $\text{A}\left(\dfrac{1}{2} ; 2\right)$, $B\left(4 ; \dfrac{1}{4}\right)$ et $\text{C}(2 ; 1)$ sont des points de (Γ), et (T) est la tangente à (Γ) en C.



1. **a.** Déterminer par lecture graphique le minimum et le maximum de f sur $[0\,;6]$.
   b. Déterminer par lecture graphique l'image par f de l'intervalle $[0\,;2]$.
   c. En utilisant le graphique, donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < \frac{1}{2}$.
2. **a.** On admet que (T) est parallèle à (AB). Déterminer alors $f'(2)$.
   b. Déterminer l'équation réduite de (T), et celle de (AB).
   c. Justifier à l'aide du graphique que, pour tout x de $\left[\frac{1}{2}\,;\,4\right]$ on a :
   $$-\frac{1}{2}x+2 \leqslant f(x) \leqslant -\frac{1}{2}x+\frac{9}{4}.$$
3. On pose $\text{I} = \int_{\frac{1}{2}}^{9} f(x)\,\text{d}x$. Déduire du résultat précédent **2. c.** que l'intégrale I est comprise entre $\frac{49}{16}$ et $\frac{63}{16}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
ABCDOFGH est un pavé défini par $\overrightarrow{\text{OH}} = 3\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\text{OF}} = 4\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{\text{OA}} = 3\overrightarrow{k}$.
Soit L le milieu de [CG].



1. On considère l'ensemble (Π) des points dont les coordonnées x, y et z vérifient : $4x - 3y + 8z - 12 = 0$.
2. Parmi les points A, B, O, G, H, L lesquels appartiennent à (Π) ?
3. Justifier que l'ensemble (Π) est le plan (BLH).
4. Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan (BLH).
5. Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$. Montrer que (Δ) est l'ensemble des points M tels que $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{\text{NH}} = 0\\ \text{et}\\ \overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{\text{BL}} = 0.\end{array}\right.$ En déduire un système d'équations caractérisant la droite (Δ).
6. Montrer que le point de coordonnées $\left(-\frac{48}{89};\frac{36}{89};\frac{171}{89}\right)$ appartient à (Δ) et à (Π).

PROBLÈME **10 points**

Une entreprise envisage la fabrication d'un nouveau produit. Sa décision dépend des résultats de plusieurs études :
Étude de la demande pour ce nouveau produit : c'est l'objet de la partie A.
Étude d'un coût moyen de production : c'est l'objet de la partie B.

Partie A

Une étude a permis d'établir le tableau suivant où, pour différentes observations, x_i désigne la quantité de produit (en milliers d'unités) que la clientèle est disposée à acheter, et y_i le prix de vente (en francs) d'une unité :

x_i	1,5	3	5	8	11	12
y_i	120	110	100	90	80	70

Ainsi, pour que la clientèle soit disposée à acheter 5 000 unités, le prix de vente d'une unité doit être fixé à 100 F.

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique.
   Prendre 1 cm pour 1 millier d'unités en abscisse, et 1 cm pour 10 francs en ordonnée.
   Dans les questions suivantes, le détail des calculs statistiques n'est pas demandé; les résultats seront donnés à 10^{-2} *près.*
2. Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique.
   Un ajustement affine est-il approprié ? justifier la réponse.
3. **a.** Donner une équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   b. D'après ce modèle, comment faut-il fixer le prix de vente d'une unité si l'on veut pouvoir vendre un minimum de 6 500 unités ?
4. On admet que le prix de vente d'une unité, noté PV, est une fonction de la demande x (en milliers d'unités) définie, pour $x \in [2 ; 15]$, par :
   $\text{PV}(x) = -4,33x + 124,2$.
   Représenter la fonction PV dans le repère utilisé dans la question 1.

Partie B

Le coût total de production (en francs) de x milliers d'unités est, pour $x \in [2 ; 15]$:

$$\text{CT}(x) = 105\,[x + 4 - 3\ln(x)]$$

et le coût moyen de production d'une unité est, pour $x \in [2 ; 15]$

$$\text{CM}(x) = \frac{\text{CT}(x)}{1\,000x}.$$

1. On note CM′ la dérivée de la fonction CM.
   Calculer $\text{CM}'(x)$ et démontrer que $\text{CM}'(x)$ a le même signe que $\ln(x) - \dfrac{7}{3}$ pour tout $x \in [2 ; 15]$.
2. Résoudre sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $\ln(x) - \dfrac{7}{3} \geqslant 0$.
3. **a.** Étudier les variations de CM sur l'intervalle $[2 ; 15]$.
   b. Tracer la représentation graphique de CM dans le repère utilisé dans la partie **A**.
   c. À l'aide du graphique, déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'entreprise peut faire un bénéfice. (On donnera la réponse sous forme d'un intervalle dont les bornes sont des entiers.)

∽ Baccalauréat ES Antilles–Guyane juin 1999 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal, dont les unités sont 1 cm sur chaque axe. Construire ce repère sur votre copie en plaçant l'origine du repère en bas et à gauche.

Partie A

1. Représenter la droite (D_1) d'équation $3x + y = 30$, la droite (D_2) d'équation $x+4y = 32$ et la droite (D_3) d'équation $x + y = 10$.
2. Déterminer au moyen d'un calcul les coordonnées du point d'intersection I des droites (D_1) et (D_2).
3. Repérer graphiquement à l'aide d'une croix (« × ») les points du plan dont les coordonnées sont des nombres entiers positifs, x et y, qui vérifient de plus les conditions :

$$3x + y \leqslant 30 \quad ; \quad x+4y \leqslant 32 \quad ; \quad x + y \geqslant 10.$$

Partie B

Un artisan fabrique deux sortes de poupées : des petites poupées et des grandes poupées.
Les petites poupées nécessitent 3 heures de travail et les grandes poupées une heure seulement. L'artisan, avec ses ouvriers, peut travailler 30 heures au plus par jour.
L'artisan ne dispose que de 32 mètres de tissu par jour. Il lui faut 1 mètre de tissu pour habiller une petite poupée et 4 mètres pour habiller une grande poupée.
On désigne par x le nombre de petites poupées et par y le nombre de grandes poupées produites dans une journée. L'artisan s'impose de fabriquer au moins 10 poupées par jour.
On admet que les contraintes de l'énoncé correspondent aux conditions suivantes :

$$\begin{array}{ll} x \text{ et } y \text{ sont deux nombres entiers positifs ;} & 3x + y \leqslant 30\ ; \\ x \geqslant 0\ ; & x+4y \leqslant 32\ ; \\ y \geqslant 0\ ; & x + y \geqslant 10. \end{array}$$

Le nombre total de poupées produites dans une journée de travail est représenté par $S = x + y$.
L'artisan veut que sa production journalière S soit maximum.
Combien de poupées de chaque sorte doit-il fabriquer ?

EXERCICE 1 **4 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Une suite réelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par son premier terme U_0 strictement positif et par la relation de récurrence suivante :

$$U_{n+1} - U_n = -0,04U_n.$$

Partie A

1. En fonction de U_0, calculer U_1, U_2 et U_3.
2. Démontrer que cette suite est une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q que l'on déterminera.
3. Quel est son sens de variation ?

4. Exprimer U_n en fonction de U_0 et de n.

Partie B

Le 1er janvier 1997, la population d'une commune rurale était de 3 000personnes. On admet que cette population a diminué de 4 % par an.

1. Quelle a été la population de cette commune au 1er janvier 1999 ?
2. Quelle sera la population de cette commune au 1er janvier 2000 ?
3. À partir de quelle année la population chutera-t-elle à moins de 2 000 personnes ?

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne la moyenne y des maximums de tension artérielle en fonction de l'âge x d'une population donnée.

Âge x	36	42	48	54	60	66
Tension y	12	13,5	12,6	14,3	15,4	15

1. Représenter graphiquement le nuage de points $M(x\ ;\ y)$ dans un repère orthogonal. On prendra pour unités graphiques 0,5 cm pour 1 an en abscisse et 3 cm en ordonnée pour l'unité de tension artérielle, l'origine correspond au point 1 de coordonnées $(30\ ;\ 10)$.
2. Dans cette partie, vous pourrez utiliser votre calculatrice.
   a. Calculer à 10^{-2} près le coefficient de corrélation entre x et y. On admet qu'un ajustement par la méthode des moindres carrés est justifié.
   b. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x et la représenter (les coefficients seront donnés à $0,001$ près).
   c. Une personne de 70 ans a une tension de 16,1. Quelle serait sa tension théorique en utilisant la droite de régression ? Comparer avec la tension réelle.
   d. Compléter le tableau de l'annexe en utilisant les valeurs de « a » et de « b » obtenues pour la droite de régression.
   Calculer la somme des « carrés » de la dernière colonne, associée à cet ajustement (calcul de la somme des résidus associés à cet ajustement).

Annexe :
À rendre avec la copie (après l'avoir complétée)
TABLEAU $a = \ldots\ldots\ b = \ldots\ldots$

x_i	y_i	$ax_i + b$	$y_i - (ax_i + b)$	$\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$
36	12			
42	13,5			
48	12,6			
54	14,3			
60	15,4			
66	15			

Somme des « carrés » de la dernière colonne : ....

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est l'étude d'une fonction et le calcul d'une aire liée à cette fonction.

Partie A

La courbe (Γ) ci-jointe (annexe 1) est la représentation graphique dans un repère orthonormal d'une fonction g définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

Les points $A\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$ et $B\left(e; \dfrac{e^2}{2}\right)$ appartiennent à la courbe (Γ) et la tangente en A à (Γ) est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer $g(1)$; $g(\mathrm{e})$ et $g'(1)$.
2. Déterminer les réels a et b, sachant que la fonction g est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par une expression de la forme :

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + a + b\ln x.$$

3. Sachant que $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1 - \ln x$, retrouver au moyen d'un calcul, le sens de variation de g. (Le calcul des limites n'est pas demandé.)
   En utilisant ce dernier résultat, étudier le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{2}.$$

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   (On admet le résultat suivant : limite en $+\infty$ de $\dfrac{\ln x}{x} = 0$.)
2. Calculer la dérivée f' de f.
   Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout réel positif x.
   En déduire les variations de f.
3. Montrer que la représentation graphique ($\mathscr{C}$) de f dans un repère orthonormal admet deux asymptotes que l'on précisera.
   La courbe ($\mathscr{C}$) de f est donnée en annexe dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité 2 cm sur chaque axe.
4. On admet l'existence d'un réel α unique, appartenant à $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Que représente α pour la courbe ($\mathscr{C}$) ?
   Placer sur la courbe ($\mathscr{C}$) le point I d'abscisse α.
   Montrer que $\ln\alpha = -\dfrac{\alpha^2}{2}$. En déduire que $f'(\alpha) = \dfrac{1+\alpha^2}{\alpha^2}$.

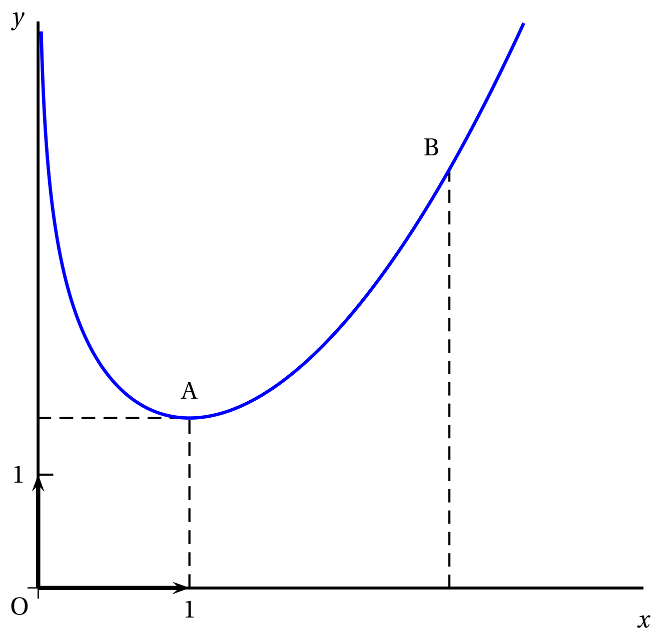
Partie C

1. Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$.
2. En déduire le calcul de $J = \displaystyle\int_1^t \left(\frac{\ln x}{x}\right)\mathrm{d}x$.
3. Hachurer sur le graphique donné en annexe le domaine plan limité par ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
   Déterminer l'aire, en cm^2, de ce domaine.

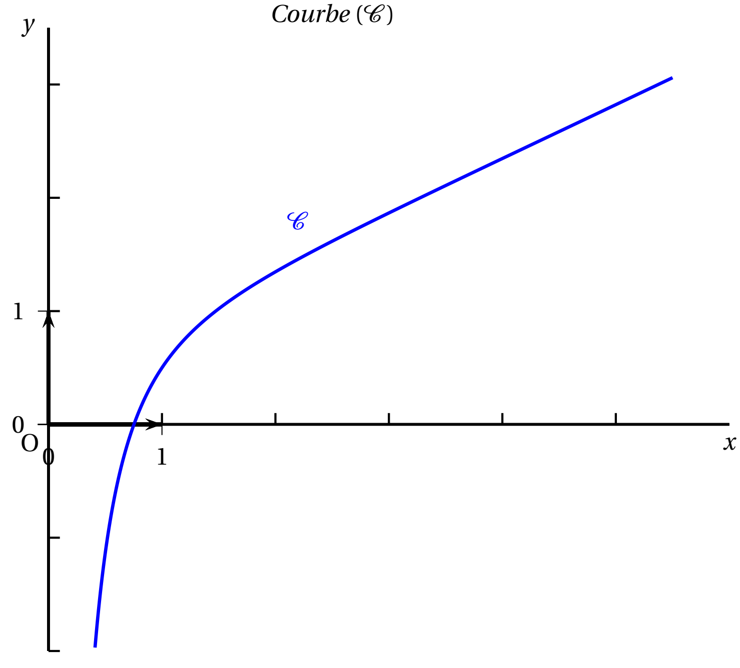
Annexe 2

À rendre avec la copie (après l'avoir complétée)

Courbe (Γ)



Courbe ($\mathscr{C}$)



Baccalauréat ES Asie juin 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Le tableau suivant recense par clinique le nombre de postes du personnel non médical en fonction du nombre de lits de la clinique :

Clinique	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
Nombre de lits x_i	122	177	77	135	109	88	185	128	120	146	100
Nombre de postes y_i	205	249	114	178	127	122	242	170	164	188	172

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques : 1 cm pour 20 lits en abscisse et 1 cm pour 50 postes en ordonnée.
2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
3. Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (les détails des calculs ne sont pas demandés).

   Pour les coefficients, on prendra les valeurs décimales arrondies à 10^{-1} près.

   Tracer cette droite dans le repère précédent.
4. Une clinique possède 35 lits.
   a. En utilisant les résultats obtenus en 3, combien devrait-elle embaucher de personnel occupant un poste non médical à temps plein ?
   b. En réalité, cette clinique dispose de 60 postes.
   Calculer la différence entre le nombre de postes réels et le nombre de postes théoriques obtenu précédemment.
   Quel pourcentage cette différence représente-t-elle par rapport à la situation théorique ?

EXERCICE 2 **6 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Énoncé

Un grand club de ski français propose à la vente :

- des licences ;
- des cartes neige à prix normal ;
- des cartes neige à prix réduit pour les habitants de la commune.

Pour chacun de ces titres vendus, il faut distinguer deux catégories : la catégorie jeunes et la catégorie adultes.

Le nombre de titres vendus pour la saison 98 se répartit de la manière suivante :

- 8,5 % de licences ;
- 77,5 % de cartes neige à prix réduit ;
- 1,5 % de licences catégorie jeunes ;
- 2,5 % de cartes neige à prix normal catégorie jeunes.

De plus, parmi les personnes ayant acheté une carte neige à prix réduit, 86,5 % sont des adultes.

On note :

L : l'évènement « La personne a acheté une licence » ;

CN : l'évènement « La personne a acheté une carte neige à prix normal » ;

CR : l'évènement « La personne a acheté une carte neige à prix réduit » ;

J : l'évènement « La personne est dans la catégorie jeunes » ;

A : l'évènement « La personne est dans la catégorie adultes ».

Questions

On choisit au hasard un client de la saison 98.

1. Déterminer la probabilité pour que :
   a. cette personne ait acheté une carte neige à prix normal;
   b. cette personne ait acheté une carte neige à prix réduit catégorie adultes.
2. Montrer que la probabilité pour que la personne ait acheté une carte neige à prix réduit catégorie jeunes est égale à $0,105$.
3. Sachant que la personne a acheté une licence, quelle est la probabilité pour qu'elle appartienne à la catégorie adultes?
4. Quelle est la probabilité pour que cette personne appartienne à la catégorie jeunes?
5. Sachant que la personne est jeune, quelle est la probabilité pour qu'elle ait acheté une licence?
   Pour répondre aux questions, on peut utiliser la méthode des arbres. Tous les résultats sont donnés avec un arrondi à 10^{-3} près (ex : 0,105 ou $10,5\,\%$.)

EXERCICE 2 **6 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Énoncé

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on a placé les points :

A(0 ; 0 ; 18)	B(0; 15; 0)	
C(22,5; 0; 0)	D(0; 0; 12,5)	(voir Annexes 1 et 2)
E(0; 25; 0)	F(12,5; 0; 0).	

Le plan (ABC) a pour équation : $4x+6y+5z=90$.
Le plan (DFE) a pour équation : $2x+y+2z=25$.
La droite (GI) est l'intersection des plans (ABC) et (DFE).
On admet que tout point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartenant au polyèdre ODGBIF a des coordonnées qui satisfont aux conditions :

- $x>0$
- $y\geqslant 0$
- $z>0$
- $4x+6y+5z\leqslant 90$
- $2x+y+2z\leqslant 25$

Une usine fabrique 3 types de vannes pour l'industrie pétrolière.
Pour fabriquer le modèle V1, il faut 20 heures d'usinage et 20 heures de montage.
Pour fabriquer le modèle V2, il faut 30 heures d'usinage et 10 heures de montage.
Pour fabriquer le modèle V3, il faut 25 heures d'usinage et 20 heures de montage.
Le nombre d'ouvriers spécialisés permet de disposer de 450 heures d'usinage par semaine.
Le nombre d'ouvriers monteurs permet de disposer de 250 heures de montage par semaine.
On désigne par x le nombre de vannes de type V1 fabriquées dans une semaine, y le nombre de vannes de type V2 et z le nombre de vannes de type V3.
Les points de coordonnées $(X\,;\,Y\,;\,Z)$ qui satisfont aux contraintes précédentes sont situés à l'intérieur du polyèdre ODGBIE.
Le bénéfice réalisé sur une vanne de type V1 est de 2 000 F, sur une vanne de type V2, il est de 3 000 F et enfin sur une vanne de type V3, il est de 5 000 F.
Un point de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ représente une production.

Questions

a. Montrez que les points représentant une production pour laquelle le bénéfice total est de 30 000 F sont situés sur le plan (P) d'équation cartésienne : $2x+3y+5z=30$.
   Le plan (P) est tracé sur la figure de l'annexe 2.
b. Montrez qu'une production de 5 vannes de type V1, de 5 vannes de type V2 et d'une vanne de type V3 est réalisable par cette usine en une semaine et que le bénéfice alors réalisé est de 30 000 F.
   Quelle conclusion en tirez-vous sur la position du point K de coordonnées $(5\,;\;5\,;\,1)$?

c. Montrez que les points représentant une production pour laquelle le bénéfice total est de 60 000 F sont situés sur le plan (Q) d'équation cartésienne : $2x+3y+5z=60$.

d. Quelle remarque pouvez-vous faire sur les plans (P) et (Q) ?

e. On admet que le bénéfice réalisé par l'entreprise est maximal lorsque le plan (R) d'équation $2x+3y+5z=b$ passe par le point G dont les coordonnées sont $\left(0\,;\,\dfrac{55}{7}\,;\,\dfrac{60}{7}\right)$.

Calculer ce bénéfice maximal.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;50]$ par :

$$f(x)=x^2+\frac{50x}{x+1}-50\ln(x+1)-50.$$

La dérivée $f'(x)$ est égale à : $\dfrac{2x(x-4)(x+6)}{(x+1)^2}$.

La courbe $(\mathscr{C})$ de f est donnée en annexe.

1. Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;50]$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;50]$. On admet que $f(x)$ s'annule pour une seule valeur αet de l'intervalle $]0\,;50[$; en déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;50]$.
3. Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.
   Pour la suite du problème, on prendra pour α la plus petite de ces deux valeurs.

Partie B

Une entreprise fabrique une quantité x, exprimée en kilogrammes, d'un certain produit.
Le coût marginal C, exprimé en euros, est défini sur $[0\,;50]$ par

$$C(x)=2x+\frac{50}{x+1}$$

1. La fonction coût total, notée C_{T} est la primitive de la fonction C sur $[0\ ;\ 50]$ qui prend la valeur 50 pour $x=0$.
   Vérifier que $C_{\text{T}}(x)=x^2+50\ln(x+1)+50$.
2. Le coût moyen est la fonction C_m, définie par :

$$C_m(x)=\frac{C_{\text{T}}(x)}{x}\text{sur}]0\ ;\ 50].$$

   a. Donner une expression de $C_m(x)$ en fonction de x.

   b. Vérifier que la dérivée de C_m peut se mettre sous la forme

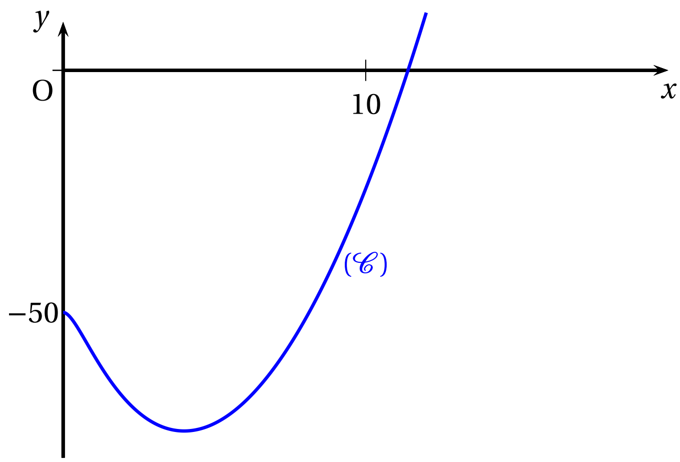
$$C'_m(x)=\frac{f(x)}{x^2}.$$

Partie C

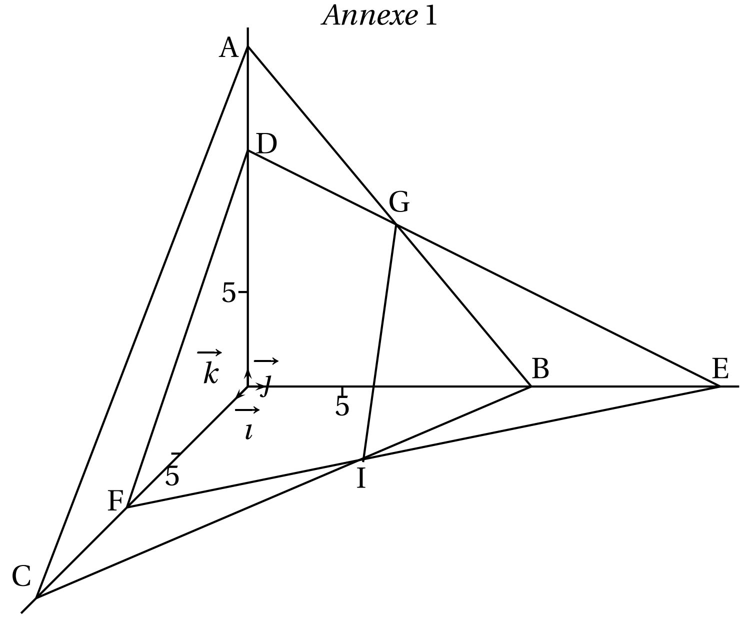
1. Déduire des résultats précédents le tableau de variation de la fonction C_m sur $]0\,;50]$.
2. Tracer dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la courbe représentative de C_m sur $[1\,;50]$.

3. Quelle est la production donnant le coût moyen minimal ?
Calculer alors le coût total et le coût marginal correspondant au coût moyen minimal.

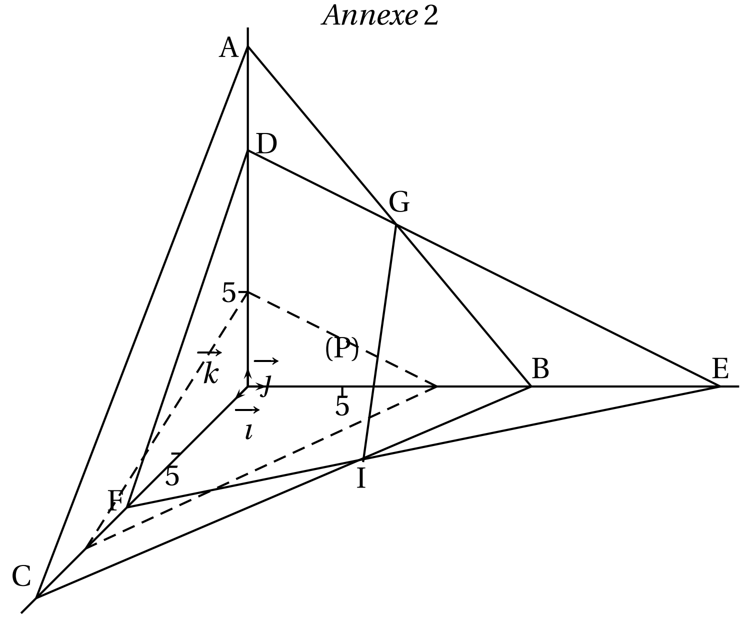
Annexe 3
Courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction f.



Annexe 1



Annexe 2



Baccalauréat ES Centres étrangers juin 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Aucun détail des calculs effectués à la calculatrice n'est exigé dans cet exercice.
Le tableau ci-dessous donne l'évolution du chiffres d'affaires réalisé à l'exportation par une entreprise.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	100	101	107	122	127	139	136	157	165

x_1 désigne le rang de l'année,
y_i désigne l'indice du chiffre d'affaires à l'exportation rapporté à la base 100 en 1990.

1. **a.** Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à la série double dans un repère orthogonal. On prendra :
   • pour origine le point $M_0(0\ ;\ 100)$,
   • pour unités : 1,5 cm sur l'axe des abscisses,
   2 cm pour 10 points d'indice sur l'axe des ordonnées.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série statistique et placer ce point sur le graphique. (On donnera la valeur décimale arrondie au dixième de l'ordonnée de G.)
2. Déterminer la valeur décimale arrondie au centième du coefficient de corrélation linéaire de la série double. Ce résultat permet-il d'envisager un ajustement affine ? Pourquoi ?
3. Soit $\mathscr{D}$, la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

   a. Donner la valeur décimale arrondie au dixième du c?fficient directeur de la droite $\mathscr{D}$.

   b. En utilisant les coordonnées du point moyen G, donner une équation de la droite $\mathscr{D}$.
   Tracer cette droite sur le graphique précédent.
4. En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires se poursuive de la même façon au cours des années suivantes, estimer l'indice du chiffre d'affaires de cette entreprise en l'an 2001 (on en donnera la valeur arrondie à l'unité).

EXERCICE 2 **5 points**
(obligatoire)

Une étude statistique indique que 95 % des téléviseurs fabriqués par une entreprise sont en état de fonctionnement. On fait subir à chaque appareil un test de contrôle. On constate que :
• quand un appareil est en état de fonctionnement, il est accepté dans 96 % des cas à l'issue du test ;
• quand un appareil n'est pas en état de fonctionnement, il est néanmoins accepté dans 8 % des cas à l'issue du test.

On choisit au hasard un téléviseur fabriqué par l'entreprise.
On définit les évènements suivants :
F : « le téléviseur est en état de fonctionnement » ;
T : « le téléviseur est accepté à l'issue du test » ;
$\overline{T}$: « le téléviseur est refusé à l'issue du test ».
Ainsi :
• la probabilité de l'évènement F, notée $P(F)$ est $0,95$;
• la probabilité $P(T/F)$ qu'un téléviseur soit accepté à l'issue du test sachant qu'il est en état de fonctionnement est $0,96$.

1. Calculer la probabilité que le téléviseur ne soit pas en état de fonctionnement.
2. **a.** Calculer la probabilité qu'un téléviseur soit refusé à l'issue du test sachant qu'il est en état de fonctionnement.
   b. Calculer la probabilité que le téléviseur soit refusé à l'issue du test et qu'il soit en état de fonctionnement.
   c. Calculer la probabilité que le téléviseur soit refusé à l'issue du test et qu'il ne soit pas en état de fonctionnement.
3. En déduire la probabilité pour que le téléviseur soit refusé à l'issue du test.
4. Quelle est la probabilité pour qu'un téléviseur soit en état de fonctionnement sachant qu'il est refusé à l'issue du test ? (On donnera la valeur décimale arrondie au millième du résultat.)

EXERCICE 2 **5 points**
(spécialité)

Le salaire annuel d'un technicien s'élevait pour l'année 1998 à 90 000 F.
Chaque année son employeur décide de l'augmenter de 2 % et de lui allouer en plus 5 000 F.
On désigne par S_0 le salaire du technicien pour l'année 1998. Pour tout entier naturel n, on désigne par S_n son salaire pour l'année $(1998 + n)$.
Par exemple : S_2 est le salaire du technicien pour l'année 2000.

1. Calculer S_1 et S_2.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.
3. On définit la suite (U_n) par $U_n = S_n + 250000$ pour tout entier naturel.
   a. Calculer U_0.
   b. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $1,02$.
   c. Exprimer U_n en fonction de n.
4. **a.** Exprimer S_n en fonction de n.
   b. En déduire le salaire prévu pour l'année 2005.
5. À partir de quelle année le salaire de ce technicien aura-t-il doublé ?

PROBLÈME **11 points**

L'objet de ce problème est l'étude d'une fonction et le tracé de sa représentation graphique (**partie B**) s'appuyant sur l'étude d'une fonction auxiliaire (**partie A**).
On calculera enfin une aire (**partie C**). On prendra soin de faire figurer sur la copie les calculs intermédiaires conduisant aux résultats.

Partie A

1. Soient a, b et c des nombres réels. On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax+b)\text{e}^{-x} + c$. On note g' la fonction dérivée de g.

a. Calculer $g'(x)$.

b. Le tableau de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		$+$		0	-
$g(x)$	$-\infty$ ↗	1	2 ↗	$\text{e}^{-2}+2$ ↘	2

En utilisant les données numériques de ce tablcau, établir que $a = 1$, $b = -1$ et $c = 2$.

Ainsi, pour la suite du problème : $g(x) = (x-1)\text{e}^{-x} + 2$.

2. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$. On note α cette solution.

b. Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur décimale arrondie au dixième de α.

3. Étudier le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x + 1 - x\text{e}^{-x}.$$

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on admettra que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{e}^x}{x} = +\infty$).

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra mettre x en facteur dans l'expression de $f(x)$).

2. a. Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que $f'(x) = g(x)$.

b. Dresser, en le justifiant, le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on appelle $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f et $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $y = 2x + 1$.

a. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (2x+1)]$.

b. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

c. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.

d. Tracer $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{C})$ dans le plan muni du repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Partie C

Soient H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\text{e}^{-x}(1 + x)$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\text{e}^{-x}$.

1. Montrer que la fonction H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.

2. Hachurer sur le graphique précédent le domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite $(\mathscr{D})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3. Calculer l'aire S en cm^2 du domaine hachuré.

∽ Baccalauréat ES Métropole juin 1999 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne l'indice mensuel des dépenses d'assurance maladie d'août 94 à juin 95 (tendances observées à fin juillet 1995 - base 100 janvier 1990).

Mois	Août 94	Octobre 94	Déc. 94	Février 95	Avril 95	Juin 95
Rang du mois x_i	1	3	5	7	9	11
Indice y_i	123,4	125,9	127,5	127,9	129	131,4

(Source : Département statistique de la Caisse Nationale de l'Assurance Maladie des Travailleurs Salariés).

Pour tout l'exercice, les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés. Les résultats seront arrondis avec deux chiffres après la virgule.

On a représenté sur le document 1 de l'annexe ci-jointe le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à la série statistique dans un repère orthogonal. G désigne le point moyen du nuage. On veut réaliser un ajustement affine de ce nuage de points.

1. Déterminer les coordonnées du point G et placer ce point sur le graphique.

2. *Le modèle étudié dans cette question sera appelé « droite de Mayer ».*

a. G_1 désigne le point moyen des trois premiers points du nuage et G_2 celui des trois derniers points. Déterminer les coordonnées de G_1 et de G_2.

b. Déterminer l'équation réduite de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = \text{A}x + \text{B}$.

c. Tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique précédent.

d. En utilisant la calculatrice, déterminer la somme des résidus pour cet ajustement affine :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{6} (y_i - \text{A}x_i - \text{B})^2.$$

3. *Le deuxième modèle proposé est celui des moindres carrés.*

La calculatrice donne :

- l'équation de la droite (D) d'ajustement de y en x :

$$y = 0,71x + 123,26.$$

- la somme des résidus pour cet ajustement $S_2 = 1,7$ (arrondie avec un chiffre après la virgule).

a. Des droites (D) et (G_1G_2) quelle est celle qui réalise le meilleur ajustement affine ? Justifier.

b. Tracer (D) sur le graphique précédent.

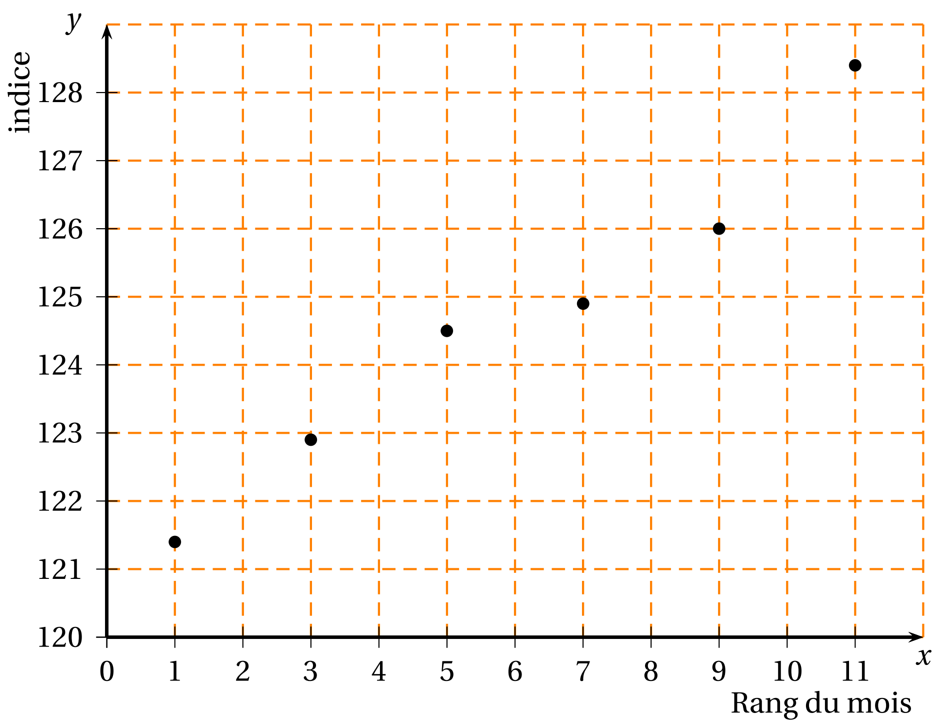
4. **a.** Quels sont les indices mensuels que l'on pouvait prévoir en utilisant l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés (question 3) pour les mois cités dans le tableau ci-dessous ?

b. Recopier le tableau ci-dessous et le compléter.

Mois	nov. 95	déc. 95	janvier 96
Indices prévisionnels calculés par l'ajustement affine des *moindres carrés*			
Tendances réellement observées	134,3	133,4	133,5

c. Quel commentaire peut-on faire ?

Annexe Document 1 *à compléter et à rendre avec la copie*



Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

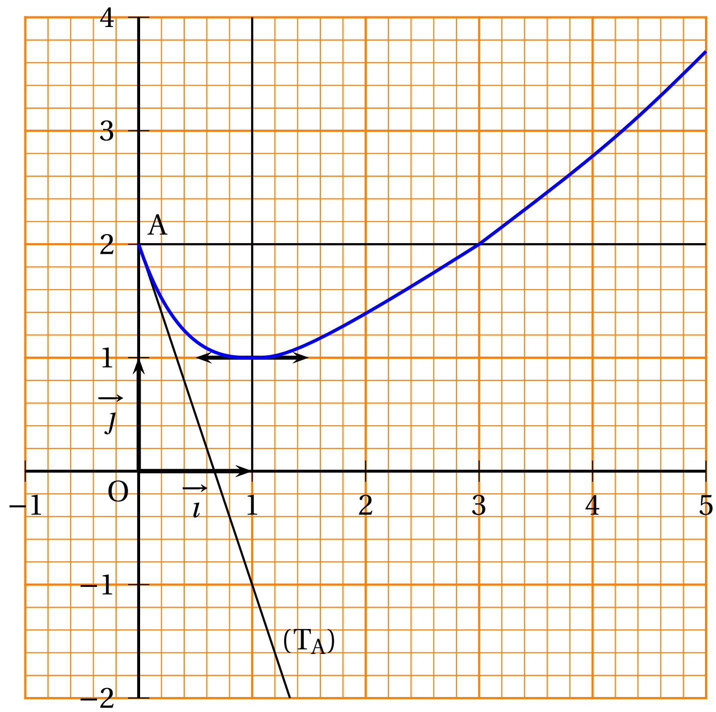
La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

On note f' la fonction dérivée de f.

La droite (T_A) est la tangente au point A d'abscisse 0.

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.

Enfin, la fonction f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.



1. À partir des informations portées sur le graphique et complétées par les précisions précédentes, répondre aux questions suivantes :

   a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

x	0	1
$f(x)$		
$f'(x)$		

   b. Donner le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$, complété par la limite en $+\infty$.

2. On considère la fonction g inverse de la fonction c'est-à-dire $g = \dfrac{1}{f}$.

   On note g', la fonction dérivée de g.

   a. Déterminer $g(0)$, $g(1)$, $g(3)$.

   b. Quel est le sens de variation de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$?
   Justifier la réponse donnée.

   c. Déterminer les valeurs $g'(0)$, $g'(1)$.

   d. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

3. On souhaite traduire graphiquement les informations obtenues pour la fonction g. Tracer une courbe qui satisfait aux résultats obtenus à la question 2, dans un repère orthonormal (unité 2 cm) sur une feuille de papier millimétré ; le tracé des tangentes aux points d'abscisses 0 et 1 devra apparaître sur la figure.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ représenté sur le document 2 de l'annexe ci-jointe. Le plan (R) est représenté par ses traces sur les plans de coordonnées; il a pour équation : $x + z = 2$.

1. On donne les points A, B, C définis par leurs coordonnées respectives : A(6 ; 0 ; 0), B(0 ; 3 ; 0) et C(0 ; 0 ; 6).

a. Placer les points A, B, C dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et tracer le triangle ABC.

b. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(1\ ;\ 2\ ;\ 1)$.
Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (P) passant par A, B et C.

d. Vérifier que le plan (P) a pour équation $x + 2y + z = 6$.

2. On a placé dans le repère les points G, E et F à coordonnées entières. Le point G est situé sur l'axe $(O\ ;\ \vec{\jmath})$ le point E dans le plan $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ et le point F dans le plan $\left(O\ ;\ \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Le plan (Q) passant par les points G, E et F est parallèle au plan $\left(O\ ;\ \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

a. Donner l'équation du plan (Q).

b. Donner les coordonnées des points G, E et F.

c. Parmi les points E, F et G, quels sont ceux situés dans le plan (P) ?

d. Quelle est la nature de l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 2 \\ x + 2y + z & = & 6. \end{array}\right.$$

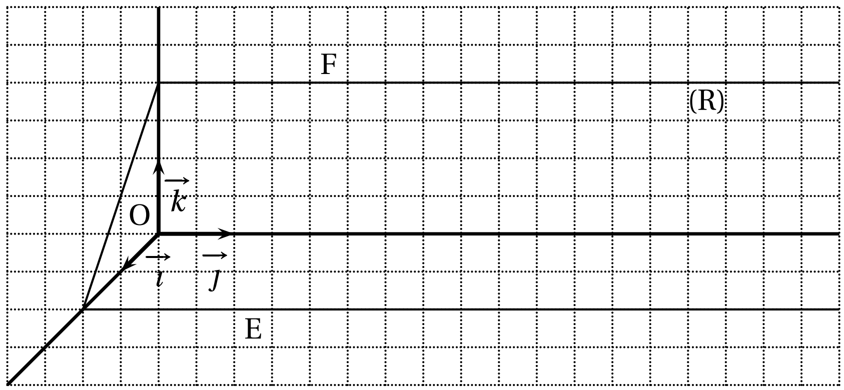
e. Représenter cet ensemble sur l'annexe 2 ci-jointe.

3. On considère le système S de trois équations à trois inconnues x, y, z :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x+ & & z & = & 2 \\ & y & & = & 2 \\ x & +2y & +z & = & 6. \end{array}\right.$$

Quel est l'ensemble des points du plan R dont les coordonnées sont les solutions du système S ?

Document 2 à compléter et à rendre avec la copie



PROBLÈME **9 points**

On a tracé dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,4]$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} - \ln x.$$

Dans tout le problème, on donnera les résultats arrondis à 10^{-3}.

⋆ A. - Étude théorique liée à la fonction f

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,4]$.
   b. Étudier la limite de f en 0.
   c. Donner le tableau de variations de f.
2. Soit (Z) la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations : $y = \frac{1}{2}$, $x = 1$ et $x = 3$.
   a. Justifier que l'on a $f(x) \geqslant \frac{1}{2}$ sur $]\,0\,;\,4\,]$ et exprimer à l'aide d'une intégrale (que l'on n'essaiera pas de calculer dans cette question) l'aire $\mathscr{A}_z$, en unités d'aire, de la partie (Z) du plan.
   b. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,4]$ par $g(x) = x\ln x - x$. Calculer $g'(x)$.
   c. En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}_z$, en unités d'aire.

⋆ B. - Probabilité et jeu

Au cours de l'élaboration d'une phase d'un jeu vidéo inspiré du golf, on cherche à évaluer la probabilité de gagner. L'écran est le carré AOFB. Les sommets du carré ont pour coordonnées :

A$(0\,;\,4)$ O$(0\,;\,0)$ F$(4\,;\,0)$ B$(4\,;\,4)$.

La courbe $(\mathscr{C})$ partage l'écran en deux parties :

— la partie de l'écran située strictement au-dessus de la courbe représente une mare et elle est notée (M) ;

— la partie de l'écran située au-dessous de la courbe représente le terrain de jeu et elle est notée (T).

La partie (Z) définie au paragraphe **A** est donc incluse dans (T).

1. Dans cette question, le jeu consiste à simuler le lancer d'une balle. On admet que la probabilité d'atteindre une partie de l'écran est donnée par :

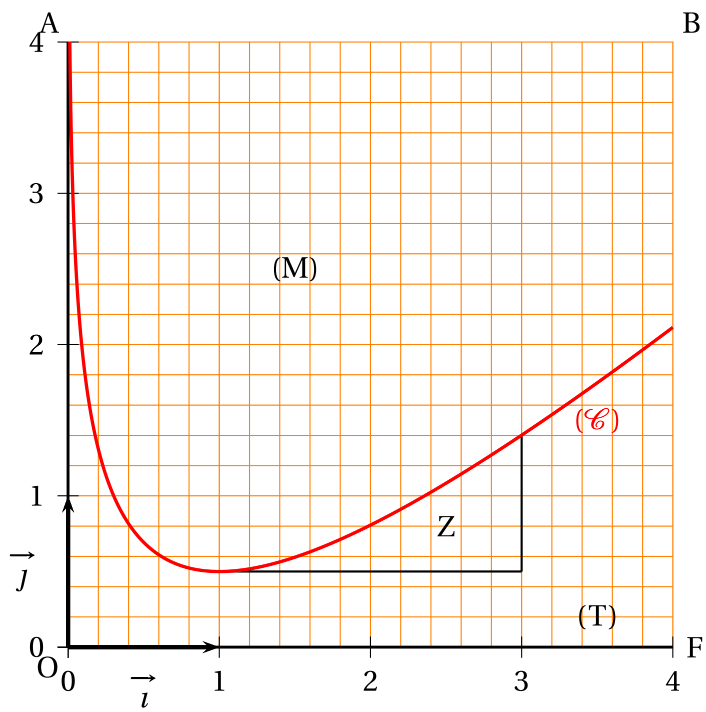
$$\frac{\text{Aire de la partie de l'écran considérée}}{\text{Aire du carré AOFB}}$$

Cette probabilité est indépendante de l'unité graphique choisie. Déterminer, par le calcul, la probabilité que la balle atteigne la zone (Z).

2. Dans cette question, le jeu consiste à simuler trois lancers successifs et indépendants ; on admet que, pour chaque lancer, la probabilité d'atteindre (Z) est de $0,044$.

On gagne lorsque deux au moins des trois balles lancées ont atteint la partie (Z). Calculer la probabilité de gagner.

On pourra s'aider d'un arbre et on fera figurer le détail des calculs sur la copie.



Baccalauréat ES La Réunion juin 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Une entreprise est équipée d'ordinateurs de trois modèles différents.
30 % sont de marque (M_1), 50 % sont de marque (M_2) et 20 % de marque (M_3).
On choisit un appareil au hasard. Tous les choix sont équiprobables.
Pour i égal à 1, 2 ou 3, on appelle M_i l'évènement : « l'appareil choisi est de marque (M_i) ».
On note $p(M_i)$ la probabilité de l'évènement M_i.
On a donc $p(M_1) = 0,3$; $p(M_2) = 0,5$ et $p(M_3) = 0,2$.
On note T l'évènement : « l'appareil choisi tombe en panne » et $p(T)$ la probabilité de cet évènement.
On suppose que si un appareil tombe en panne, il est réparé et qu'il fonctionne alors correctement.
La probabilité $p_1(T)$ qu'un appareil de marque (M_1) tombe en panne est $\dfrac{1}{30}$.
La probabilité $p_2(T)$ qu'un appareil de marque (M_2) tombe en panne est $\dfrac{1}{20}$.
La probabilité $p_3(T)$ qu'un appareil de marque (M_3) tombe en panne est $\dfrac{1}{40}$.

1. **a.** Traduire toutes les données sur un arbre pondéré.
   b. Calculer la probabilité que l'appareil choisi soit de marque (M_2) et qu'il tombe en panne.
   c. Vérifier que la probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est égale à $0,04$.
   d. Quelle est la probabilité que l'appareil soit de marque (M_2) sachant qu'il est tombé en panne ?
2. *Dans cette question, on donnera le résultat à* 0,1 *près.*
   Un service de l'entreprise possède quatre ordinateurs.
   On suppose que les pannes éventuelles de ces ordinateurs sont indépendantes deux à deux.
   Quelle est la probabilité qu'aucun des quatre ordinateurs ne tombe en panne ?

EXERCICE 2 **5 points**
(obligatoire)

Dans cet exercice aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé.
Lors d'une période de sécheresse, un agriculteur relève la quantité totale (en m^3) utilisée par son exploitation depuis le premier jour et donne le résultat suivant :

Nombre de jours écoulés : x_i	1	3	5	8	10
Volume utilisé (en m^3) : y_i	2,25	4,3	8	17,5	27

Le plan est muni d'un repère orthogonal. On prendra pour unité graphique sur l'axe des abscisses 1 cm pour un jour et sur l'axe des ordonnées 0,5 cm pour un mètre-cube.

1. Représenter alors la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$.

2. a. Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ y_i)$ en arrondissant le résultat lu sur la calculatrice à 10^{-3} près.

b. Donner l'équation de Δ droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés sous la forme $y = \alpha x + \beta$ où α et β sont les arrondis à 10^{-2} près des valeurs lues sur la calculatrice.

c. Représenter la droite Δ sur le graphique.

3. Le nuage de points permet d'envisager un ajustement par la parabole $\mathscr{P}$ qui passe par les points A(1 ; 2,25) ; B(10 ; 27) et qui a pour équation $y = ax^2 + b$ où a et b sont deux nombres réels.

a. Déterminer a et b et donner l'équation de la parabole $\mathscr{P}$.

b. Représenter la parabole $\mathscr{P}$ sur le graphique.

4. Dans cette question on compare les deux ajustements à l'aide du tableau suivant :

x_i	1	3	5	8	10	
y_i	2,25	4,3	8	17,5	27	
$\left\lvert y_i - \alpha x_i^2 + \beta\right\rvert$	2,54	0,91	2,71			Total T_1 :
$\left\lvert y_i - a x_i^2 + b\right\rvert$	0	0,05	0,25			Total T_2 :

On ne demande pas de recopier ce tableau.

Les deux totaux calculés évaluent pour chaque ajustement la somme des écarts entre les ordonnées des points du nuage et les ordonnées des points de même abscisse de l'ajustement.

Donner les arrondis à 10^{-1} près des deux totaux T_1 et T_2 calculés ci-dessus.

(Aucun détail n'est demandé.)

En déduire l'ajustement qui parait le mieux adapté.

EXERCICE 2 — 5 points

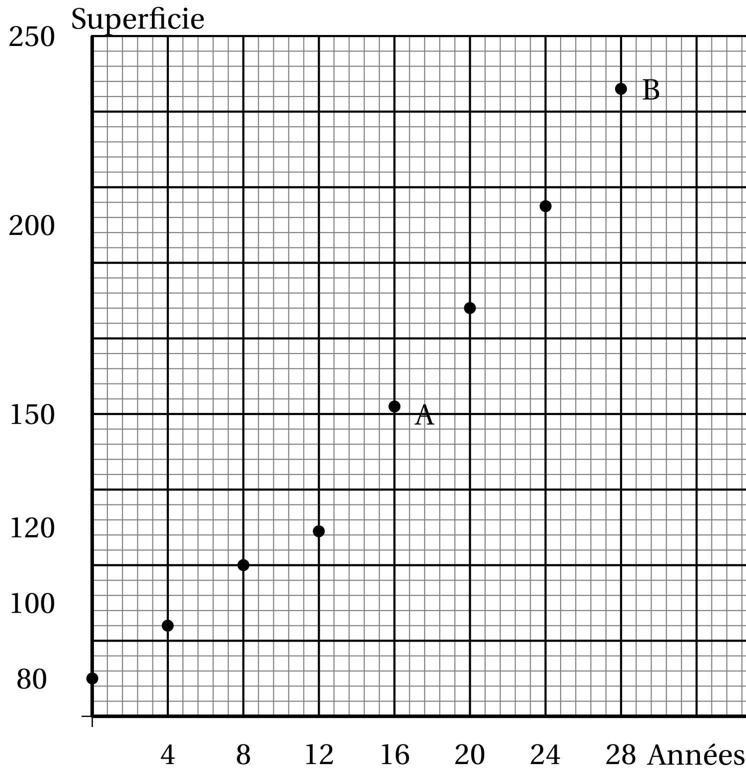
(spécialité)

Dans cet exercice aucun détail des calculs effectués à la calculatrice n'est demandé.

Dans une région de 1 000 km^2, la superficie des terrains urbanisés entre 1970 et 1998 est donnée par le tableau suivant :

Années	1970	1974	1978	1982	1986	1990	1994	1998
Rang : x_i	0	4	8	12	16	20	24	28
Superficie (en km^2) : y_i	80	94	110	129	152	178	205	236
Y_i	4,38	4,54	4,70	4,86	5,02	5,18	5,32	5,46

Le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ est représenté ci-dessous.



Les estimations de superficie demandées dans l'exercice seront données en km^2 *et arrondies à l'unité.*

1. **a.** Donner l'arrondi r à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ y_i)$.

   b. Donner l'estimation E_1 obtenue par la méthode des moindres carrés de la superficie des terrains urbanisés en 2010.

2. Au vu de la forme du nuage, on effectue un autre ajustement. On calcule $\ln y_i$. On appelle Y_i l'arrondi à 10^{-2} près de $\ln y_i$. Les valeurs Y_i sont données dans le tableau considéré.

   a. Donner l'arrondi r' à 10^{-4} près du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ Y_i)$.

   b. On prendra $Y = 0,039x + 4,39$ pour équation de la droite de régression de Y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

   Calculer la valeur y estimée pour l'année 2010.

   En déduire une estimation E_2 de la superficie des terrains urbanisés en 2010.

3. On fait un troisième ajustement du nuage de points en utilisant la droite $\mathcal{D}$ passant par les points A(16 ; 152) et B(28 ; 236).

   a. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$.

   b. En déduire l'estimation E_3 faite avec cet ajustement, de la superficie des terrains urbanisés en 2010.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 + (-x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer $g'(x)$ ou g' désigne la fonction dérivée de g et étudier son signe selon les valeurs de x.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$. Préciser $g(3)$.
   On ne demande pas les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + (x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal. On prendra 2 cm pour une unité graphique.

1. Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = g(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
2. Calculer la limite de f en $-\infty$.
3. **a.** Vérifier que $f(x) = x + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$. On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
   b. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   c. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.
   On précisera les coordonnées de leur point d'intersection A.
4. Donner le tableau de variations de la fonction f.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que la droite Δ.

Partie C

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$F(x) = x + (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$$

   soit une primitive de f.
2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
   En donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

↜ Baccalauréat ES Liban juin 1999 ↝

EXERCICE 1
Commun à tous les candidats

Tous les jours, Obélix part en promenade en quête soit de casques romains pour sa collection, soit de sangliers qu'il ne trouve que dans la forêt. Il ne rentre au village que lorsqu'il a atteint l'un ou l'autre de ses objectifs.
Durant sa promenade, soit il rencontre des Romains à la sortie du village avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{3}$, soit il entre dans la forêt. Une fois dans la forêt, la probabilité de rencontrer des Romains est égaie à $\dfrac{1}{5}$, celle de rencontrer des sangliers est égale à $\dfrac{4}{5}$.
Pour faciliter la résolution de cet exercice, on pourra représenter les données précédentes sur un arbre.

1. **a.** Calculer la probabilité qu'Obélix « récolte » des casques dans la forêt.
   b. Calculer la probabilité qu'Obélix « récolte » des sangliers.
2. Le druide Panoramix voit Obélix entrer dans le village les bras chargés de casques romains. Quelle est la probabilité qu'Obéiix ait atteint la forêt ?
3. Panoramix observe le manège d'Obélix pendant 3 jours.
   Quelle est la probabilité qu'Obélix revienne de ses promenades au moins une fois avec des sangliers ? (On donnera une valeur décimale approchée par défaut à 10^{-3} près de cette probabilité.)

EXERCICE 2

Jean et Pierre sont deux jumeaux : Jean, qui est fumeur, dépense 3 000 F par an pour l'achat de ses cigarettes. Pierre, qui ne fume pas, lui demande d'imaginer les économies qu'il réaliserait s'il plaçait cette somme plutôt que de continuer à fumer.
Il lui propose de déposer tous les ans, le 2 janvier, cette somme de 3 000 F sur un compte rémunéré à intérêts composés par la banque, au taux annuel de 3 %. La banque ajoute chaque année, le 31 décembre, les intérêts acquis sur le compte.
Le 2 janvier 1999, il verse 3 000 F et les intérêts acquis sont capitalisés le 31 décembre 1999. Tous les ans, le 2 janvier, il verse à nouveau 3 000 F.

1. Quelle est la somme disponible sur le livret aux dates suivantes :
   a. Le 3 janvier 2000 ?
   b. Le 3 janvier 2001 ?
2. On note u_0 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 1999, u_1 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 2000, u_2 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 2001, u_n la somme disponible sur le livret le 3 janvier de l'année $1999 + n$, où n désigne un entier naturel.
   Montrer qu'on a la relation $u_{n+1} = 1,03u_n + 3000$.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 100\,000$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
4. Pierre affirme qu'en moyenne, un fumeur s'arrête après avoir fumé pendant trente ans. De quelle somme Jean aurait-il pu disposer le 3 janvier 2029 ?

PROBLÈME

Le but du problème est l'étude de la fonction f définie pour tout réel x, par

$$f(x) = x\left(\mathrm{e}^{-x} + 1\right).$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. (Unité graphique : 2 cm.)

Partie A

Soit la fonction g définie, pour tout réel x, par

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}(1 - x) + 1.$$

1. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations (on ne demande pas de limites).
2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x réel.

Partie B

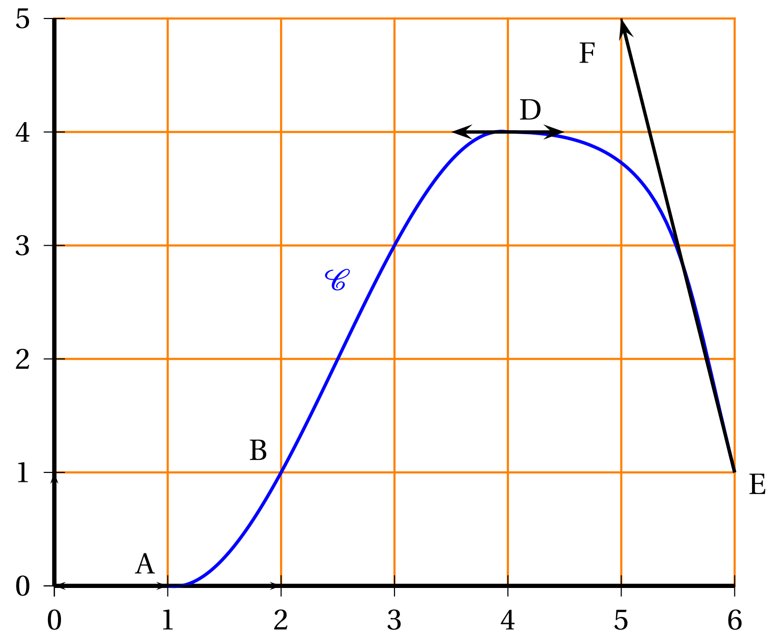
1. On rappelle que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$. Déterminer, en les justitiant, les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $y = x$. Démontrer que $(\mathscr{D})$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
   Étudier les positions de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.
3. Si f' désigne la fonction dérivée de f, calculer $f'(x)$. À l'aide de la question A 2., déterminer les variations de f puis dresser son tableau de variations.
4. Déterminer une équation de la tangente (T_0) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
5. Déterminer par le calcul les coordonnées du point de $(\mathscr{C})$ où la tangente (T_1) est parallèle à l'asymptote $(\mathscr{D})$.
6. Tracer $(\mathscr{D})$, (T_0), (T_1) et $(\mathscr{C})$.

Baccalauréat ES Polynésie juin 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1 ; 6]$. Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthogonal est donnée ci-contre.
La courbe $(\mathscr{C})$ passe par les points A$(1 ; 0)$, B$(2 ; 1)$, D$(4 ; 4)$ et E$(6 ; 1)$.
Les tangentes à la courbe aux points A et D sont parallèles à l'axe des abscisses.
La tangente à la courbe au point E passe par le point F$(5 ; 5)$.



Partie I

Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$ et donner le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 6]$.

Partie II

On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]1 ; 6]$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Calculer $g(2)$, $g(4)$ et $g(6)$.

   b. Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 1.
   Que peut-on en déduire pour la courbe (Γ) ?

   c. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $]1 ; 6]$ en donnant les justifications nécessaires.

   d. Déterminer $f'(4)$; en déduire $g'(4)$.

2. Tracer la courbe (Γ) ainsi que son asymptote et la tangente au point d'abscisse 4.

EXERCICE 2 **4 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau suivant donne pour les années indiquées, le nombre de demandes d'emploi en fin d'année dans une région.

	1996	1997
Total	85 079	85 240
Moins de 25 ans	22 238	20 276
De 25 ans à 39 ans	54 719	55 994
50 ans et plus	8 122	8 970
Hommes	39 998	39 766
Moins de 25 ans	10 176	9 170
De 25 ans à 39 ans	25 528	25 853
50 ans et plus	4 284	4 743
Femmes	45 091	45 474
Moins de 25 ans	12 062	11 106
De 25 ans à 39 ans	29 191	30 141
50 ans et plus	3 838	4 227

Source : ANPE-INSEE Poitou-Charentes.

Les résultats des calculs seront donnés sous forme approchée à 10^{-2} *près par défaut.*

1. **a.** Déterminer le pourcentage d'évolution du total des demandes d'emploi entre 1996 et 1997.

   b. Le nombre de demandes d'emploi est en baisse pour une tranche d'âge seulement.

   Calculer le pourcentage d'évolution des demandes d'emploi des hommes pour cette tranche d'âge.

2. En 1996, une entreprise est subventionnée pour employer une personne de moins de 25 ans. Elle choisit une personne au hasard parmi les demandeurs d'emploi concernés. Tous les choix sont équiprobables.

   Quelle est la probabilité que la personne embauchée soit une femme ?

3. L'entreprise désire créer un emploi en 1998 et choisit au hasard une personne dans les demandeurs d'emploi de 1997. Tous les choix sont équiprobables.

   Calculer la probabilité p que la personne embauchée soit un homme.
   Vérifier que 0,46 est une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de p.

4. Dans cette question, on prendra p égal à $0,46$. L'entreprise choisit trois demandeurs d'emploi de 1997. Les choix sont indépendants et on assimilera ce choix à un tirage avec remise.

   a. Quelle est la probabilité qu'elle choisisse trois hommes ?

   b. Quelle est la probabilité qu'elle choisisse un homme et un seul

   On pourra utiliser un arbre pondéré.

EXERCICE 2 **4 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour financer ses études, une étudiante fait du démarchage par téléphone pour vendre un produit qui lui rapporte 20 francs. Elle ne peut vendre qu'un produit par appel.

Lorsqu'elle compose un numéro de téléphone, trois possibilités se présentent :

• l'évènement A « Personne ne répond » de probabilité $p(A)$ égale à 0,3 ;

• l'évènement B « Le répondeur téléphonique diffuse un message » avec une probabilité $p(B)$ égale à 0,1 ;

• l'évènement C « Un correspondant répond » de probabilité $p(C)$ égale à 0,6.

1. La probabilité que l'étudiante vende son produit sachant qu'un correspondant répond à son appel est égale à $0,4$.

   Les probabilités qu'elle vende son produit dans les autres cas sont nulles.

   Vérifier que la probabilité que l'étudiante réalise une vente lors d'un appel téléphonique fait au hasard est égale à $0,24$.

2. Lorsque personne ne répond à son appel téléphonique, l'étudiante débourse 0 franc.

   Lorsqu'un répondeur téléphonique diffuse un message, l'étudiante débourse 1 franc.

   Lorsqu'un correspondant répond, l'appel coûte 1 franc et dans ce cas

   ▷ si l'étudiante vend son produit, qui lui rapporte 20 francs, elle aura donc fait un gain de +19 francs,

   ▷ si elle ne vend pas son produit, elle aura perdu 1 franc.

   On considère la variable aléatoire X correspondant au gain algébrique possible lors d'un appel téléphonique de l'étudiante.

   a. Démontrer que la probabilité que le gain algébrique soit égal à -1 est 0,46.

   b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   c. Calculer l'espérance mathématique de X.

3. On suppose que l'étudiante compose successivement de manière indépendante cinq numéros de téléphone au hasard. Déterminer la probabilité qu'elle réalise exactement trois ventes.

PROBLÈME **12 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On prendra pour unité graphique 2 cm.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (-\,x+4)\mathrm{e}^{x-1} \text{ et } g(x) = \ln\left(\frac{x+6}{2x+2}\right).$$

Dans le repère choisi, on appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f et (Γ) la courbe représentative de g.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Vérifier que la fonction dérivée de f est définie pour tout x positif par $f'(x) = (-x+3)\text{e}^{x-1}$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation. On précisera $f(0),\ f'(0),\ f(3),\ f'(3)$.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.
5. Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\text{e}^{x-1}$ soit une primitive de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction u définie sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$ par

$$u(x) = \frac{x+6}{2x+2}.$$

1. Vérifier que, pour tout x positif, $u(x)$ est strictement positif.
2. **a.** Déterminer la limite de $u(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

   b. étudier le sens de variation de u.
   Dresser le tableau de variations de u et retrouver le résultat de la question **1.** de la partie **B**.
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer le sens de variation de la fonction g et démontrer que la courbe (Γ) admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ dont on donnera une équation.
4. Tracer la courbe (Γ) et la droite (D) sur le même graphique que celui de la partie **A**.
5. Soit G la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$ par

$$G(x) = (x+6)\ln(x+6) - (x+1)\ln(2x+2).$$

   Démontrer que G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$.

Partie C

1. Résoudre, à l'aide des représentations graphiques faites, l'inéquation $g(x) \leqslant f(x)$.
2. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 du domaine du plan constitué des points $M(x\,;\ y)$ tels que :

$$2 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } g(x) \leqslant y \leqslant f(x).$$

   Donner l'arrondi de $\mathscr{A}$ à l'unité près.

∽ Baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 1999 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Effectuer les calculs à l'aide de la calculatrice. Aucun détail n'est demandé. Le tableau suivant donne le PNB ainsi que le nombre d'hôpitaux pour 1 million d'habitants dans quelques pays européens.

Pays	A	B	C	D	E	F	G	H
PNB, x, en euro par habitant	5 100	7 800	11 200	15 800	20 100	26 230	28 910	31 910
Nombre y d'hôpitaux par million d'habitants	620	1 080	1 550	2 100	3 000	3 800	4 200	4 400

1. Représenter le nuage de points associé à la série $(x\ ;\ y)$.
Unités : en abscisse : 1 cm pour 1 000euros, en ordonnée : 1 cm pour 200 hôpitaux.
On prendra pour origine le point $M_0(5\,000\ ;\ 600)$.
On appelle G le point moyen de ce nuage.

2. **a.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y (donner la valeur décimale arrondie à 10^{-2} près).
On admet qu'un ajustement affine par la méthode des moindres carrés est justifié.

b. Donner une équation de la droite D de régression de y en x.

c. Tracer D dans le repère précédent (question **1.**).

d. Calculer les coordonnées de G et vérifier graphiquement que G appartient à D.

3. Un pays a un PNB de 23 400 euros. Quelle estimation peut-on faire du nombre d'hôpitaux dans ce pays ?

EXERCICE 2 **5 points**
(obligatoire)

Un lycée propose trois options facultatives : arts plastiques, histoire des arts, musique. Un élève ne peut choisir qu'une seule de ces trois options.
Le groupe des élèves ayant fait l'un de ces choix à la rentrée 1997 se décompose de la façon suivante : 35 % en arts plastiques, 45 % en histoire des arts, 20 % en musique.
À la rentrée 1998, 60 % des élèves en arts plastiques, 70 % en histoire des arts, 80 % en musique, conservent leur option.
Des animateurs, ne connaissant pas les élèves, organisent une réunion du groupe des élèves inscrits en 1997 dans une des options.
On note ainsi les évènements suivants :

A « L'élève est inscrit en arts plastiques à la rentrée 1997 ».

H « L'élève est inscrit en histoire des arts à la rentrée 1997 ».

M « L'élève est inscrit en musique à la rentrée 1997 ».

C « L'élève a conservé son option à la rentrée 1998 ».

1. Décrire la situation à l'aide d'un arbre de répartition.

2. On admet que l'animateur choisit au hasard un élève.

  a. Calculer la probabilité de l'évènement « il était inscrit en arts plastiques en 1997 et a conservé cet enseignement en 1998 ».

  b. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,613 5.

3. Un des animateurs souhaite connaître les motivations des élèves qui n'ont pas conservé leur option en 1998.
Il demande à ces élèves de lever la main et il en appelle un au hasard.
Calculer la probabilité de l'évènement « cet élève était inscrit en histoire de arts en 1997 ».

EXERCICE 2 **5 points**
(spécialité)

Les questions I et II sont indépendantes.

I. 25 élèves d'une classe de seconde sont admis en première. Ils se répartissent de la façon suivante :

10 en série L;

9 en série ES;

6 en série S.

On choisit au hasard trois élèves de cette classe de seconde qui sont admis en classe de première.
Calculer la probabilité de l'évènement : « Les trois élèves sont admis en série ES ».

II. Dans l'établissement, sur 300 élèves de seconde admis en première, on a la répartition suivante :

— 75 élèves en série L;
— 120 élèves en série ES;
— 105 élèves en série S.

1. Parmi les élèves admis en série L, 60 % sont des filles. De même, 55 % des admis en série ES et 40 % des admis en série S sont des filles.
On choisit au hasard un élève admis en classe de première. On note ainsi les évènements suivants :
  L : « L'élève est admis en série L »;
  E : « L'élève est admis en série ES »;
  S : « Un élève est admis en série S »;

F : « L'élève est une fille ».

a. Quelle est la probabilité de l'évènement suivant : « L'élève est une fille admise en série ES » ?

b. Calculer la probabilité de l'évènement F.

2. On prend au hasard le dossier d'un des élèves admis en première. Après utilisation, on le remet avec les autres. On effectue, au total, cinq fois cette opération.

Calculer la probabilité de l'évènement : « Trois dossiers exactement sont des dossiers de filles ».

PROBLÈME **10 points**

L'objet de ce problème est l'étude d'une fonction.

On considère la fonction f définie sur $\mathrm{I} =]-\infty\ ;\ +1[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x} + x + 1.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 2 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur I par

$$g(x) = x^2 - 2x + \ln(1-x).$$

1. Étudier la variation de g sur I (on ne demande pas le calcul des limites).

2. Calculer $g(0)$.

Étudier le signe de $g(x)$ sur $]-\infty\ ;+1[$.

Partie B - Étude de la fonction *f*

1. **a.** Calculer la limite de f en $-\infty$.

On admettra le résultat suivant : la limite de $\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ quand x tend vers $-\infty$ vaut zéro.

b. Calculer la limite de f en + 1 et interpréter graphiquement le résultat.

2. On admet que la dérivée f' de la fonction f vérifie l'égalité ci-dessous :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1-x)^2}.$$

En déduire les variations de f.

Dresser le tableau des variations de f sur I.

3. Soit la droite D d'équation $y = x + 1$.

a. Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D suivant les valeurs de x.

b. Montrer que D est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ avec ses asymptotes dans le repère orthonormal défini dans l'introduction. (Unité graphique : 2 cm.)

Partie C - Calcul d'une aire

Soit la fonction H définie sur I par

$$H(x) = -\frac{1}{2}\left[\ln(1-x)\right]^2.$$

1. Vérifier que H est une primitive de la fonction h définie sur I par

$$h(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

2. a. Donner la valeur exacte en unité d'aire, de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite D et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

b. Donner une valeur approchée de cette aire en cm^2 à 10^{-2} près par défaut.

c. Sur le graphique construit en **Partie B. 4.**, hachurer le domaine correspondant.

∽ Baccalauréat ES Métropole septembre 1999 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le lycée IXE a décidé d'organiser un voyage en Australie pour assister aux Jeux olympiques de l'an 2000 qui se dérouleront à Sydney. Pour réduire le coût, élèves et adultes cherchent à organiser des activités qui rapportent de l'argent.

Le Club Poésie décide d'éditer et de vendre un recueil de textes écrits par les élèves. Pour cela il commence par réaliser une « étude de marché » auprès de la population du lycée, afin de savoir à quel prix vendre ce recueil pour avoir la plus importante rentrée d'argent.

Les résultats de cette étude figurent dans le tableau ci-dessous.

x_i est le prix de vente en francs d'un recueil.

y_i est le nombre de personnes prêtes à acheter le recueil au prix x_i.

x_i	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	1 200	900	800	550	500	350	300	100

Tous les calculs statistiques seront faits à la calculatrice.

1. Construire le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra pour origine le point de coordonnées (10 ; 0), 2 cm pour 5 francs en abscisse et 1 cm pour 100 personnes en ordonnée.
2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire (donner une valeur arrondie à 10^{-3}.

   Pourquoi un ajustement linéaire est-il justifié ?
3. Donner une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode de moindres carrés. Le coefficient directeur sera arrondi à 10^{-2} près et l'ordonnée à l'origine à l'unité près.
4. **a.** Calculer alors, en fonction du prix de vente x, la somme que peut encaisser le Club Poésie si la réalité est conforme à la prévision. On nomme $\text{S}(x)$ cette somme.

   b. Étudier les variations de cette fonction S et en déduire le prix x_0 pour lequel cette somme atteint son maximum (x_0 sera arrondi au franc le plus proche).

EXERCICE 2 **5 points**

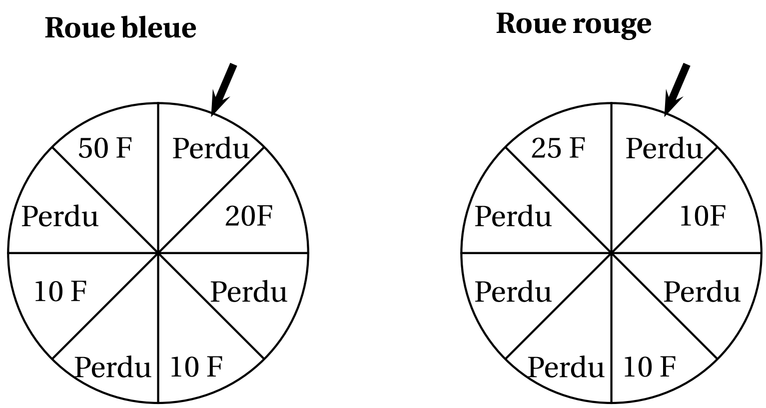
Commun à tous les candidats

Pour recueillir des fonds pour un voyage en Australie en l'an 2000, le lycée organise une fête. Le Club Maths décide de monter un stand de loterie. Le « futur gagnant » tire au hasard une boule dans une ume contenant 15 boules bleues et 10 boules rouges.

S'il tire une boule bleue, il lance la roue bleue,

S'il tire une boule rouge, il lance la roue rouge.

Chaque roue est partagée en 8 secteurs de même dimension. Quand la roue est lancée, elle s'arrête de façon aléatoire et la flèche ne peut indiquer qu'un seul secteur. Tous les secteurs ont donc la même chance de « sortir ».



On note B l'évènement « Tirer une boule bleue », R l'évènement « Tirer une boule rouge » et G l'évènement « Gagner ».
On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement B, puis celle de l'évènement R.
   b. On a tiré une boule bleue : quelle est la probabilité de gagner ?
   c. En déduire la probabilité de l'évènement $G \cap B$.
2. Calculer alors la probabilité de gagner à ce stand.
3. Vérifier que la probabilité de gagner 50 F est $\dfrac{3}{40}$.
   Soit X la variable aléatoire égale au gain (éventuellement nul) du joueur.
   Recopier le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X et calculer les résultats manquants.

gain x_i	0	10	20	25	50
$p(X = x_i)$	$\dfrac{11}{20}$		$\dfrac{3}{40}$		$\dfrac{3}{40}$

4. Calculer l'espérance mathématique de X.
   On peut compter sur 150 participants à ce stand pendant la fête, et on voudrait faire un bénéfice d'au moins 1 000 francs.
   Quelle participation minimale, arrondie au franc supérieur, de chaque joueur faut-il alors envisager ?

EXERCICE 2 **5 points**
(spécialité)

Le club de football du lycée décide d'organiser un match entre élèves et professeurs pour récolter des fonds pour partir en Australie en l'an 2000. Les joueurs s'entraînent, d'autant plus qu'une rencontre amicale sera organisée à Sydney contre une équipe de lycéens australiens. Pour s'entraîner aux tirs au buts, l'entraîneur dispose 5 ballons face aux buts, et chaque joueur tire ces 5 ballons.
Une étude statistique a montré que sur une série de 5 ballons, un joueur pris au hasard marque :

— 5 buts avec une probabilité de 0,2 ;
— 4 buts avec une probabilité de 0,5 ;
— 3 buts avec une probabilité de 0,3.

Chaque joueur, à chaque entraînement, tire 2 séries de 5 ballons. On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs aux buts réussis par un un joueur au cours d'un entraînement.

1. **a.** Calculer la probabilité, pour un joueur pris au hasard, de réussir tous ses tirs aux buts lors d'un entraînement.

   b. Préciser les valeurs possibles de X et établir sa loi de probabilité (on pourra s'aider d'un arbre).

   Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X arrondi avec deux chiffres après la virgule.

2. Un entraîneur considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs aux buts lorsque $X \geqslant 8$.

   Montrer que la probabilité pour un joueur de réussir cette épreuve lors d'un entraînement est égale à $0,61$.

3. Chaque joueur participe à 10 séances d'entrainement. On admet que les épreuves de tirs aux buts sont indépendantes les unes des autres.

   On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de succès d'un joueur à l'épreuve des tirs aux buts au cours de ces 10 entraînements. Les résultats seront donnés par défaut, avec trois chiffres après la virgule.

   Calculer pour un joueur :

   a. la probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances ;

   b. la probabilité d'avoir exactement 6 succès ;

   c. la probabilité d'avoir au moins 1 succès.

4. Calculer le nombre minimum d'entraînements auxquels doit participer un joueur pour que la probabilité d'avoir au moins un succès soit supérieure à $0,99$.

PROBLÈME **5 points**

Nota : les parties **B** *et* **C** *sont indépendantes.*

À la rentrée scolaire, une étude statistique s'intéresse au prix des classeurs.

$$f(x) = 4\ln\left(\frac{6}{x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = 4\ln(x-1)$$

représentent respectivement les quantités demandées et offertes, c'est-à-dire :

— pour $f(x)$ les quantités de classeurs exprimées en milliers que les consommateurs sont prêts à acheter en fonction du prix unitaire x du classeur exprimé en francs ;
— Pour $g(x)$ les quantités de classeurs exprimées en milliers, que les producteurs sont prêts à vendre en fonction du prix unitaire x du classeur exprimé en francs.

Partie A

1. Résoudre le système $\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$.

   L'intervalle I solution du système est l'intervalle d'étude du modèle.
2. Étudier les variations de f et de g sur I. Tracer les représentations graphiques respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de f et de g, dans un plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; on prendra 2 cm pour 1 franc en abscisse et 2 cm pour 1 000 classeurs en ordonnée.
3. Déterminer les coordonnées (x_0, y_0) du point A intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. La valeur de x_0 est appelée prix d'équilibre.
4. Quel est le revenu total des producteurs pour le prix d'équilibre ?

Partie B

1. Montrer que la fonction F définie par :

$$F(x) = 4\left[x \ln\left(\frac{6}{x}\right) + x\right]$$

   est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.
2. Les consommateurs se procurent les quantités offertes à un prix supérieur à celui d'équilibre. La somme totale alors perçue en plus par les producteurs est représentée par l'aire de la partie du plan située entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = x_0$ et la droite d'équation $x = 6$, où x_0, est l'abscisse du point d'équilibre ; elle traduit le surplus des consommateurs exprimé en francs.

   Calculer ce surplus.

Partie C

1. Le prix x augmente de 1 %. Calculer, en fonction de x, la variation relative de la demande.
2. Donner la valeur de la variation de la demande en pourcentage, arrondie à 0,1 %, pour un prix initial de 5 francs qui augmente de 1 %.

Baccalauréat ES Polynésie septembre 1999

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise peint des jouets. Pour cela, elle utilise deux machines M_1 et M_2. La machine M_1 peint un quart de la production.
On sait que la machine M_1 peint correctement un jouet avec une probabilité de 0,85 alors que la machine M_2, plus récente, le fait avec une probabilité de 0,95.
Tous les jouets sont mélangés puis acheminés ensemble vers l'unité d'emballage.
On choisit alors un jouet au hasard, tous les choix étant équiprobables.
On note : A_1 l'évènement : « le jouet est peint par M_1 »
A_2 l'évènement : « le jouet est peint par M_2 »
B l'évènement : « le jouet est peint correctement ».

1.
   a. Représenter par un arbre pondéré la situation décrite.
   b. Définir par une phrase l'évènement $A_1 \cap B$.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement $A_1 \cap B$.
   d. Montrer que la probabilité de l'évènement B, notée p, est égale à $0,925$.
   e. Le jouet choisi est peint correctement.
   Quelle est la probabilité pour qu'il ait été peint par la machine M_1 ?
2. *Dans cette question, on donnera les résultats arrondis à* 10^{-2} *près.*
   On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante 4 jouets.
   a. Quelle est la probabilité pour que les 4 jouets soient peints correctement ?
   b. Quelle est la probabilité pour qu'un jouet au moins ne soit pas peint correctement ?

EXERCICE 2 **5 points**

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, croissante sur cet intervalle et telle que sa représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ est donnée par le graphique 1 sur la feuille annexe.
La feuille annexe est à remettre avec la copie, en mettant en évidence sur les graphiques toutes les constructions utilisées.

1. Les graphiques 2 et 3 donnent les représentations graphiques de la fonction $g = \ln f$ et de la fonction f' dérivée de f.
   Préciser quelle courbe est donnée par chacun des graphiques 2 et 3 avec les justifications nécessaires.
2. On sait que $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 2 - h(x)$ où h est une fonction définie et strictement négative sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, telle que la limite de h en $+\infty$ est égale à 0.
   Interpréter graphiquement les renseignements donnés sur h.

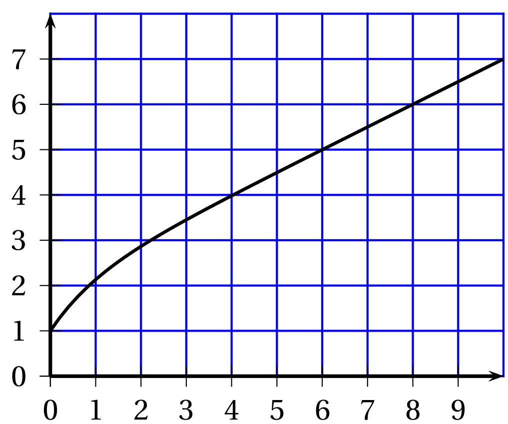
3. Quel graphique de l'annexe 1 permet de déterminer l'abscisse x_0 du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ où la tangente a pour coefficient directeur 0,6 ?
Indiquer parmi les intervalles suivants celui auquel appartient x_0 :

$$\mathrm{I}_1 = [0\ ;\ 1] \quad ; \quad \mathrm{I}_2 = [1\ ;\ 4] \quad ; \quad \mathrm{I}_3 = [4\ ;\ 7].$$

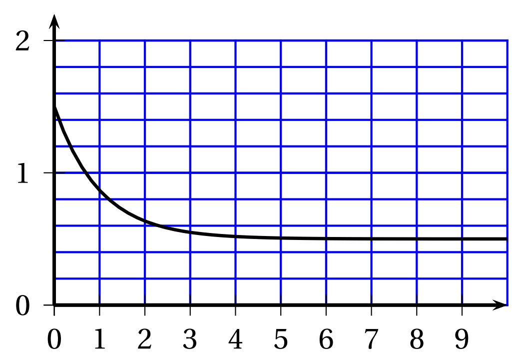
4. On considère l'intégrale I définie par $I = \displaystyle\int_4^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

À l'aide de la représentation graphique de f trouver, en expliquant la démarche utilisée, un nombre entier n tel que $n < I < n+1$.

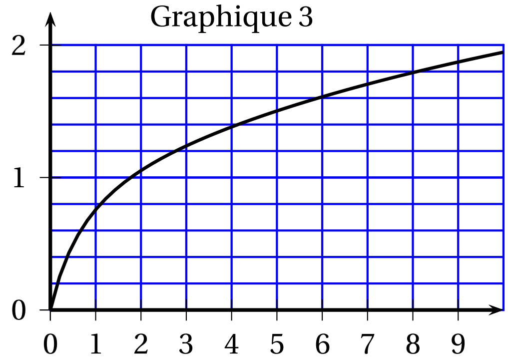
Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3



PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = -(\ln x)^2 + 4\ln x - 3.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est donnée en fin d'énoncé.

Partie A

1.

a. Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On pourra mettre $\ln x$ en facteur dans l'expression $f(x)$).

c. f' étant la fonction dérivée de f, montrer que $f'(x) = \dfrac{4-2\ln x}{x}$.

d. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - 4X + 3 = 0$ et déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.

b. En déduire par lecture graphique les valeurs de x telles que $f(x) > 0$.

3.

a. Interpréter graphiquement le nombre $A = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

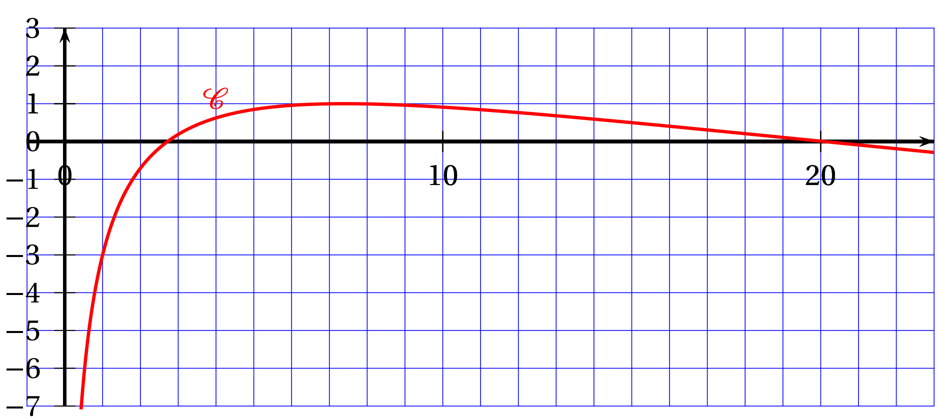
b. Soit h la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = -x\left[(\ln x)^2 - 6\ln x + 9\right]$. Déterminer la dérivée h' de h et en déduire une primitive F de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. En déduire la valeur exacte de A.

Partie B

Une entreprise constate que la vente de sa production dégage un bénéfice moyen par objet (en milliers de francs) égal à : $(\ln x)^2 - 4\ln x + 3$ où x désigne le nombre de milliers d'objets fabriqués. Ce bénéfice moyen par objet n'est pas toujours positif.

1. Calculer le bénéfice total de l'entreprise pour une production de 1 000 objets puis de 3 000 objets. Indiquer, dans chaque cas, si l'entreprise fait un bénéfice positif.
2. Déduire de la partie A pour quelles quantités d'objets produits l'entreprise fait un bénéfice positif.

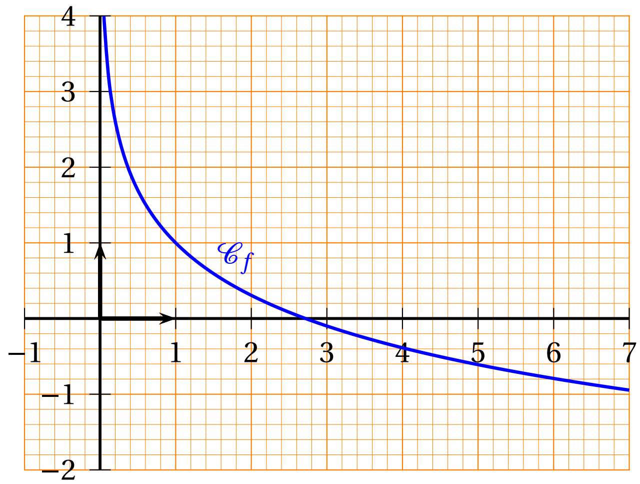


∽ Baccalauréat ES Sportifs de haut–niveau octobre 1999 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le repère utilisé est orthonormal : unité 1 cm.
La figure ci-dessous est la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 1 - \ln x$.



L'une des deux fonctions représentées ci-dessous a pour fonction dérivée la fonction f dont la représentation graphique est $\mathscr{C}_f$.

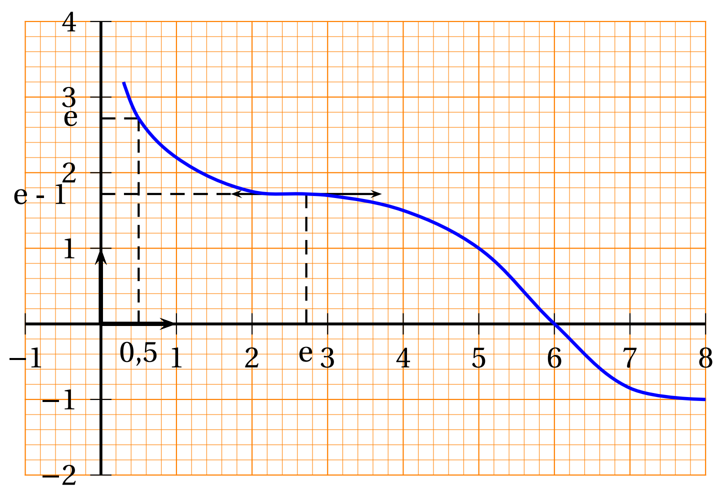


Figure 1

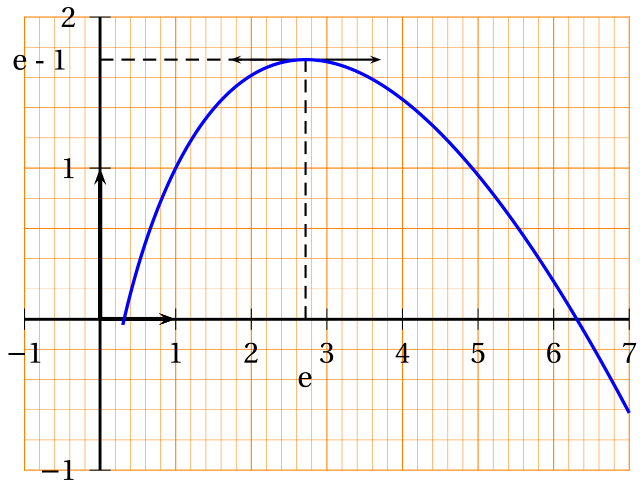


Figure 2

1. Justifier que la courbe représentée sur la figure 1 ne peut convenir.

   On note F la fonction dont la courbe représentative est tracée figure 2. Que représente la fonction F pour f ?

2. **a.** Déterminer par lecture graphique $F(\text{e})$ et $F(1)$.

   b. En déduire l'aire en cm^2 de l'ensemble E des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que : $1 \leqslant x \leqslant \text{e}$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

3. Montrer que la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 1 passe par l'origine.

4. **a.** Vérifier que la fonction G définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$G(x) = -x + \ln x + 2x + k$$

   où k est un réel, a pour dérivée la fonction f.

   b. Déterminer le réel k pour que la courbe représentative de G soit celle de la figure 2.

EXERCICE 2 **4 points**
(obligatoire)

Un enquête faite auprès d'une population comprenant 51 % de femmes et 49 % d'hommes montre que 20 % des femmes et 15 % des hommes de cette population ne vont jamais au cinéma.

1. On choisit au hasard un individu de cette population. Tous les choix sont équiprobables. On note :

   F l'évènement : « l'individu choisi est une femme » ;

   C l'évènement : « l'individu choisi fréquente les salles de cinéma ».

   a. Déterminer la probabilité de l'évènement $F \cap C$.

   b. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,175 5.

   c. Déterminer la probabilité que la personne choisie soit une femme, sachant qu'elle ne va jamais au cinéma. *(Le résultat sera arrondi à* 10^{-4} *près.)*

2. *Dans cette question les résultats seront arrondis à* 10^{-4} *près.*

   On choisit trois individus au hasard dans cette population.

   On suppose la population assez nombreuse pour pouvoir considérer que l'on répète alors trois fois de manière indépendante l'expérience « choisir au hasard un individu dans la population » dans des conditions identiques.

   a. Quelle est la probabilité qu'aucun des trois individus choisis ne fréquente les salles de cinéma ?

   b. En déduire la probabilité que l'un au moins des individus choisis fréquente les salles de cinéma.

EXERCICE 2 **4 points**
(spécialité)

Dans un lycée de 810 élèves, les effectifs par niveau sont :
— 280 élèves en seconde ;
— 240 élèves en première ;
— 220 élèves en terminale ;
— 70 élèves en BTS.
On a décidé d'interroger chaque jour un groupe de 5 élèves choisis au hasard Pour connaître leur opinion concernant les menus à la cantine.

A - Pour une journée

Dans cette partie on ne demande aucun calcul approché.

1. Calculer la probabilité que les 5 élèves interrogés soient des élèves de seconde.
2. Calculer la probabilité que, parmi les 5 élèves interrogés, un, exactement, soit un élève de première.
3. Calculer la probabilité p pour qu'au moins un élève de BTS soit interrogé.

B - On répète l'opération pendant 6 jours de manière indépendante

Dans cette partie les résultats seront arrondis à 10^{-5}*, près.*
Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où au moins un élève de BTS est interrogé. Dans tous les calculs on prendra 0,364 3 comme valeur de la probabilité qu'au moins un élève de BTS soit interrogé.

1. Calculer la probabilité pour que l'évènement : « au moins un élève de BTS est interrogé » se produise 4 fois exactement au cours de ces 6 jours.
2. Calculer la probabilité pour que, au cours de ces 6 jours, aucun élève de BTS ne soit interrogé.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Dans cette partie, on pourra utiliser les fonctions statistiques de la calculatrice. Le détail des calculs n'est pas exigé.
Une étude statistique portant sur la répartition des revenus d'une population a donné les résultats suivants : x représente un revenu annuel, exprimé en millions de francs, N représente le nombre, exprimé en milliers d'individus, dont le revenu est supérieur ou égal à x.

x_i en millions de F	0,35	0,6	0,9	1,5	2	3
N_i en milliers	4,448	1,359	0,557	0,181	0,148	0,039

1. **a.** Après l'avoir reproduit, compléter le tableau suivant, où z_i est l'arrondi à 10^{-2} près de $\ln(N_i)$.

x_i	0,35	0,6	0,9	1,5	2	3
z_i	1,49		$-0,59$		$-1,91$	

   b. Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ z_i)$.

2. Donner une équation de la droite de régression de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-1} près.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-1,6x+1,3}.$$

1. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal. On prendra 4 cm pour unité graphique.
   Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 et tracer cette tangente.
3. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -xf'(x)$.
   a. Vérifier que $g(x) = 1,6x\mathrm{e}^{-1,6x+1,3}$.
   b. Montrer que la fonction G définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$G(x) = \left(-x - \frac{5}{8}\right)\mathrm{e}^{-1,6x+1,3}$$

   est une primitive de la fonction g.

Partie C

1. On admet que la fonction f définie dans la **partie B** est une bonne modélisation de la situation présentée dans la **partie A**, c'est-à-dire que : pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, le nombre, en milliers, d'individus de la population dont le revenu annuel est supérieur ou égal à x millions de francs est égal à $f(x)$.

a. Déterminer le nombre d'individus dont le revenu est supérieur ou égal à 2 millions de francs.

b. Déterminer le nombre d'individus dont le revenu est supérieur ou égal à 2 millions de francs et strictement inférieur à 2,5 millions de francs.

2. En économie, le nombre $\text{R} = 1\,000\displaystyle\int_p^q g(x)\,\text{d}x$, où g est la fonction définie dans la **partie B**, représente la somme des revenus annuels des individus dont le revenu annuel, en millions de francs, est compris entre p et q.

a. Déterminer la somme des revenus annuels des individus dont le revenu annuel est compris entre 2 et 2,5 millions de francs.

b. Calculer le revenu annuel moyen d'un individu de ce groupe.

Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 1999

EXERCICE 1 **4 points**

L'étude de l'évolution de la population de deux villes d'une région entre 1978 et 1998 a été réalisée de deux façons différentes.
Les populations sont exprimées en milliers d'habitants et n désigne un entier naturel.

1. La 1re étude a établi que, pour chacune de ces villes, le nombre d'habitants exprimé en milliers pour l'année $(1978+n)$ est donné par les relations suivantes :

ville A : $u_n = \mathrm{e}^{0,1n}$
ville B : $v_n = 4\mathrm{e}^{-0,1n}$

Déterminer l'année au cours de laquelle les villes A et B auront le même nombre d'habitants.

2. La 2e étude a établi que le nombre d'habitants de la ville A a augmenté de 10,5 % par an entre 1978 et 1998.
On note P_0 la population de la ville A en 1978 et P_n sa population en $(1978+n)$.
On suppose que $P_0 = 1$.

a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et montrer que P_n est une suite géométrique de raison 1,105.

b. Exprimer P_n en fonction de n.

c. En utilisant u_n et P_n obtient-on à 20 individus près les mêmes résultats pour la population de la ville A en 1980 ? en 1995 ?

EXERCICE 2 **4 points**

Claude, élève en terminale littéraire, va passer l'épreuve d'enseignement scientifique.
Il sait que chacune des trois matières, mathématiques, sciences physiques et sciences de la vie et de la terre, a la même probabilité d'être tirée au sort comme épreuve du bac.
Claude a remarqué au cours de l'année qu'il obtenait la moyenne 4 fois sur 5 en mathématiques et 2 fois sur 3 dans chacune des 2 autres matières.
Soit : E l'évènement « Claude obtient la moyenne en enseignement scientifique » ;
M l'évènement « l'interrogation de l'enseignement scientifique porte sur les mathématiques » ;
P l'évènement « l'interrogation de l'enseignement scientifique porte sur les sciences physiques » ;
S l'évènement « l'interrogation de l'enseignement scientifique porte sur les sciences de la vie et de la terre ».
Soit X un évènement, on note $p(X)$ la probabilité qu'il soit réalisé.

1. Exprimer avec les notations ci-dessus l'évènement « Claude obtient la moyenne en enseignement scientifique en étant interrogé en mathématiques ».
   Calculer la probabilité de cet évènement.
   Le résultat sera donné sous forme de fraction.
2. Calculer $p(E \cap P)$ et $p(E \cap S)$, en déduire la probabilité que Claude ait la moyenne en enseignement scientifique.
   Les résultats seront donnés sous forme de fraction.
3. Cinq élèves de sa classe évaluent de la même façon leurs chances d'obtenir ou non la moyenne dans cette épreuve selon la matière tirée au sort.
   Quelle est la probabilité que les cinq élèves obtiennent la moyenne ?
   On donnera une valeur arrondie au centième.

PROBLÈME **12 points**

Partie A - Étude d'une fonction homographique

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x-1}{x-2}.$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x-2}$.
2. Étudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
3. On note f' la fonction dérivée de f.
   Calculer $f'(x)$, étudier son signe suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de la fonction f.

Partie B - Représentation d'une fonction exponentielle

ln désigne le logarithme népérien.
Soit h la fonction définie sur $]\ln 2\ ;\ +\infty]$ par :

$$h(x) = \frac{3\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - 2}.$$

$\mathcal{C}_h$ est la courbe représentative de h dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (unité graphique : 1 cm).

1. Déterminer la limite de h en $\ln 2$. Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer la limite de h en $+\infty$ et montrer que la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$.
   Préciser la position de $\mathcal{C}_h$ par rapport à cette droite.
3. On note h' la fonction dérivée de h.
   Calculer $h'(x)$, étudier son signe suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de la fonction h.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_h$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ ainsi que ses asymptotes.

Partie C - Calcul d'aire

1. H est la fonction définie par

$$H(x) = c\ln\left(\text{e}^x - 2\right) + dx.$$

Déterminer les réels c et d tels que H soit une primitive de h sur $]\ln 2\ ;\ +\infty]$.

2. Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_h$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \ln 3$ et $x = \ln 5$.

Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie décembre 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(3 ; 0 ; 1), B(0 ; −1 ; 2) et C(1 ; −1 ; 0).

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{\text{AB}} \wedge \overrightarrow{\text{AC}}$. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.
2. Soit D le point de coordonnées (1, 1, - 2). Calculer le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{\text{DA}}$ et du vecteur $\overrightarrow{\text{DB}} \wedge \overrightarrow{\text{DC}}$.
3. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par D et dont un vecteur directeur est $\vec{n}$.

   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de cette droite avec le plan ABC.

   c. Calculer DH (distance du point D au plan ABC).
4. Calculer les coordonnées du point D′, symétrique du point D par rapport au plan ABC.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique : 2 cm.

1. Tracer les cercles de centre O et de rayons 1 et 2. Placer les points A, B, et D d'affixes respectives $\sqrt{3} + \text{i}$, $\sqrt{3} - \text{i}$ et $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$.
2. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et la translation T de vecteur d'affixe 1.

   a. Déterminer les affixes $z_{\text{A}'}$ et $z_{\text{B}'}$ des points A′ et B′, images respectives des points A et B par la rotation R.

   b. Déterminer l'affixe $z_{\text{D}'}$, du point D′, image du point D par la translation T.

   c. Placer les points A′, B′ et D′.
3. Déterminer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_{\text{A}'} - z_{\text{B}'}}{z_{\text{D}'}}$.

   Justifier que la droite (OD′) est une médiatrice du triangle OA′B′.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n + 1$ et $M = 9n - 1$.

1. On suppose que n est un entier pair. On pose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.
   a. Montrer que M et N sont des entiers impairs.
   b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.
2. On suppose que n est un entier impair. On pose $n = 2p + 1$, avec p entier naturel.
   a. Montrer que M et N sont des entiers pairs.
   b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.
3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'entier $81n^2 - 1$.
   a. Exprimer l'entier $81n^2 - 1$ en fonction des entiers M et N.
   b. Démontrer que si n est pair alors $81n - 1$ est impair.
   c. Démontrer que $81n^2 - 1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}, \quad \text{(E)}.$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = 0 \quad (\mathrm{E}_0)$.
3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Partie B - Étude d'une fonction

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{2x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
2. Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.
   Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
   Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x.

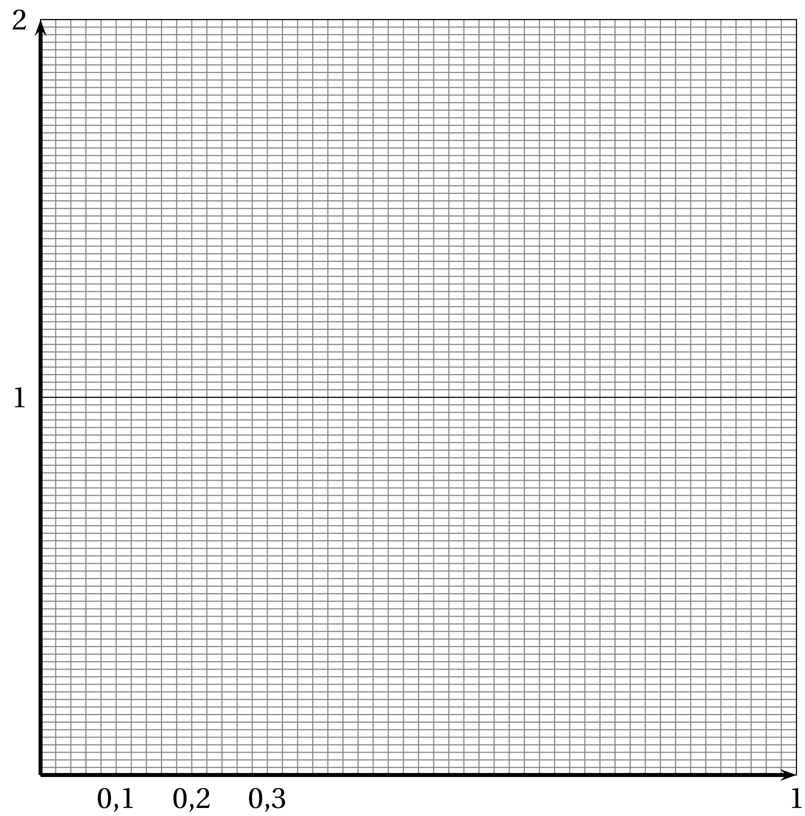
3. Soit un réel α strictement inférieur à -1. On considère le domaine plan $\mathscr{D}$ limité par $\mathscr{C}$, les droites d'équation $x = \alpha$, $x = -1$ et l'axe des abscisses.
   a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire $\mathscr{D}(\alpha)$ du domaine $\mathscr{D}$.
   b. Déterminer la limite de $\mathscr{D}(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

Partie C - Résolution d'une équation

1. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[0{,}2\,;\,0{,}3]$.
2. Recopier, puis compléter le tableau suivant :

x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$f(x)$						

   Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies avec une précision de 10^{-2} près par défaut.
3. Sur le papier millimétré, ci-dessous, où les unités sont de 10 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées, tracer l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ pour x appartenant à $[0\,;\,0{,}3]$. Faire apparaître x_0 sur le graphique.



Démontrer que x_0 satisfait à la relation : $x_0 = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2}{x_0+1}\right)$.

Partie D - Approximation de x_0

1. Soit h la fonction définie sur I = [0,2 ; 0,3] par

$$h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{x_0+1}\right).$$

a. Démontrer que pour tout x de I, $h(x)$ appartient à I.

b. Démontrer que pour tout x de I, $|h'(x)| \leqslant 0,42$.

2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0,2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$.

a. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - x_0| \leqslant 0,42\,|u_n - x_0|$.

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déduire que, pour tout entier naturel n on a : $|u_n - x_0| \leqslant 0,1 \times (0,42)^n$.

b. Déterminer la limite de (u_n) .

c. Déterminer un entier p tel que $\left|u_p - x_0\right| \leqslant 10^{-5}$.

d. On note b la valeur de u_p affichée sur la calculatrice. Déterminer β valeur décimale approchée par défaut de b à 10^{-5} près.

Classer par ordre croissant les réels $f(\beta)$, $f(\beta + 10^{-5})$ et 2.

En déduire la valeur décimale approchée par défaut de x_0 à 10^{-5} près.