∽ Baccalauréat ES 2000 ∾

L'intégrale de juin à novembre 2000

∽ Baccalauréat ES Amérique du Nord juin 2000 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne l'évolution du pourcentage de logiciels piratés en France de 1990 à 1998. On désigne par x le rang de l'année et par y le pourcentage de logiciels piratés.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcentage y_i	85	78	73	66	57	51	47	44	43

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal tel que :
   - 1 cm représente un an sur l'axe des abscisses
   - 1 cm représente 5 % sur l'axe des ordonnées.
2. Dans cette question les résultats seront obtenus à l'aide d'une calculatrice et arrondis au millième. Aucun détail des calculs statistiques n'est demandé.
   a. Donner le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.
   Un ajustement affine est-il justifié ?
   b. Écrire une équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés.
   Représenter (D) dans le repère précédent.
   c. En utilisant cet ajustement affine, donner une estimation du pourcentage de logiciels piratés en 2004.
3. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel.
   On pose $z = \ln(y)$.
   À l'aide d'une calculatrice, on a obtenu les résultats suivants :
   — Le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$, où $z_i = \ln\left(y_i\right)$, est $r' = -0,991$.
   — Une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés est $z = 0,093x + 4,444$ (1).
   En utilisant la relation (1), donner une estimation du pourcentage de logiciels piratés en 2004.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablettes, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60 % permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40 % exactement deux places de cinéma.
La notation $p(\text{A}/\text{B})$ désigne la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

1. Un client achète une tablette de chocolat. On considère les évènements suivants :
   G : « Le client achète une tablette gagnante » ;
   U : « Le client gagne exactement une place de cinéma » ;
   D : « Le client gagne exactement deux places de cinéma ».
   a. Donner $p(G)$, $p(U/G)$ et $p(D/G)$.

b. Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.

c. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client.
Déterminer la loi de probabilité de X.
Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un client achète deux jours de suite une tablette de chocolat. Les deux achats sont indépendants.

a. Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.

b. Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.

c. Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale à 0,29 (on pourra s'aider d'un arbre).

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les résultats de cet exercice seront donnés sous forme décimale arrondie au centième.
Un camp d'adolescents propose des stages d'activités nautiques pour débutants avec, au choix : planche à voile, plongée ou ski nautique.
Lors d'un stage donné, ce camp accueille vingt jeunes dont sept seront initiés à la planche à voile, huit à la plongée et cinq au ski nautique. Chaque stagiaire ne pratique qu'une seule des trois activités.

1. On forme un groupe de trois stagiaires choisis au hasard parmi les vingt.

a. Combien de groupes est-il possible de former ?

b. Déterminer la probabilité de chacun des évènements A, B et C suivants :
— A « Les trois stagiaires pratiquent des activités différentes » ;
— B « Les trois stagiaires pratiquent la même activité » ;
— C « Au moins l'un des trois stagiaires pratique le ski nautique ».

2. Parmi les vingt stagiaires, un seul se prénomme Christian. Chaque jour, on choisit au hasard un groupe de trois stagiaires chargé du service au repas de midi.

a. Montrer que la probabilité que Christian soit choisi un jour donné pour le service de midi est égale à 0,15.

b. La durée du stage est de cinq jours.
- Quelle est la probabilité de ne jamais choisir Christian pour le service de midi pendant tout le séjour ?
- Quelle est la probabilité de le choisir exactement une fois ?
- En déduire que la probabilité de choisir Christian au moins deux fois est inférieure à 0,2.

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$f(x) = -x + 7 + 6\ln(2x+1) - 6\ln(2x+2).$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Justifier que f est définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

2. Déterminer la limite de f en $-\dfrac{1}{2}$.
   En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet pour asymptote une droite (D) dont on précisera une équation.
3. En remarquant que, pour tout x de l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$
   $$6\ln(2x+1) - 6\ln(2x+2) = 6\ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right).$$
   déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Soit (Δ) la droite d'équation : $y = -x+7$.
   a. Quelle est la limite de $\left[f(x) - (-x+7)\right]$ lorsque x tend vers $+\infty$
   En donner une interprétation graphique.
   b. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (Δ).
5. **a.** Montrer que, pour tout x de l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$
   $$f'(x) = \frac{-2x^2-3x+5}{(2x+1)(x+1)}$$
   où f' désigne la fonction dérivée de f.
   b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f.
6. Soit (T) la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point M d'abscisse 0.
   Déterminer une équation de la droite (T).
7. Tracer les droites $(D), (\Delta), (T)$ et la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique 2 cm.
   On placera l'axe des ordonnées à 2 cm du bord gauche de la feuille de papier millimétré.

Partie B

1. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par :
   $$H(x) = (2x+1)\ln(2x+1) - (2x+2)\ln(2x+2).$$
   Montrer que la fonction H est une primitive sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ de la fonction h définie sur cet intervalle par : $h(x) = 2\ln\left(\dfrac{2x+1}{2x+2}\right)$.
2. On note (E) la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 5$.
   a. Hachurer (E) sur la figure.
   b. Calculer la valeur exacte de l'aire de (E) en unités d'aire.
   c. Calculer l'aire de (E) en cm^2 (on rappelle que l'unité graphique est 2 cm). On donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

Baccalauréat ES Antilles–Guyane juin 2000

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

La documentaliste d'un lycée effectue une enquête auprès de 500 élèves entrant au CDI afin de connaître le nombre d'ouvrages consultés selon la fréquentation du CDI.
On obtient les résultats suivants :
• 18 % des élèves consultent un seul ouvrage par visite et, parmi ceux-ci, 90 % viennent au moins une fois par semaine ;
• 125 élèves viennent moins d'une fois par semaine et 16 % d'entre eux consultent entre deux et cinq ouvrages par visite ;
• 45 % des élèves viennent au moins une fois par semaine et consultent chaque fois plus de cinq ouvrages.

1. Reproduire et compléter le tableau des **effectifs** ci-dessous

Fréquentation / Nombre d'ouvrages consultés	au moins une fois par semaine	moins d'une fois par semaine	Totaux
un ouvrage			
de deux à cinq ouvrages			
plus de cinq ouvrages			
Totaux			500

2. On prend au hasard un élève fréquentant le CDI et on considère les évènements :
A : « L'élève vient au moins une fois par semaine au CDI » ;
B : « L'élève consulte de 2 à 5 ouvrages » ;
C : « L'élève consulte au moins 2 ouvrages » ;
D : « L'élève vient au moins une fois par semaine au CDI et consulte entre 2 et 5 ouvrages ».
Calculer la probabilité des évènements A, B, C, D et $A \cup B$.
3. **a.** On considère un élève qui vient au moins une fois par semaine au CDI.
Quelle est la probabilité pour qu'il consulte de deux à cinq ouvrages ?
b. On considère un élève qui consulte de 2 à 5 ouvrages.
Quelle est la probabilité qu'il vienne au moins une fois par semaine au CDI ?
(N.B. : les résultats seront donnés à 10^{-3} près.)

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le graphique donné en annexe est celui de (Γ), courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0 ; 4]$ et de ses tangentes aux points d'abscisses 1 et 1,5.

1. Lire graphiquement $f(1)$; $f'(1)$; $f(1,5)$.
2. Parmi les trois courbes données en annexe, laquelle est susceptible de représenter f', où f' est la fonction dérivée de f ?
Justifier votre réponse à l'aide d'arguments graphiques.
3. On admet que $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$ où a et b sont deux réels fixés.
Calculer $f(x)$ puis utiliser la question 1 pour déterminer a et b.

4. On pose

$$H(x) = -(2x+1)\mathrm{e}^{-x+1}$$

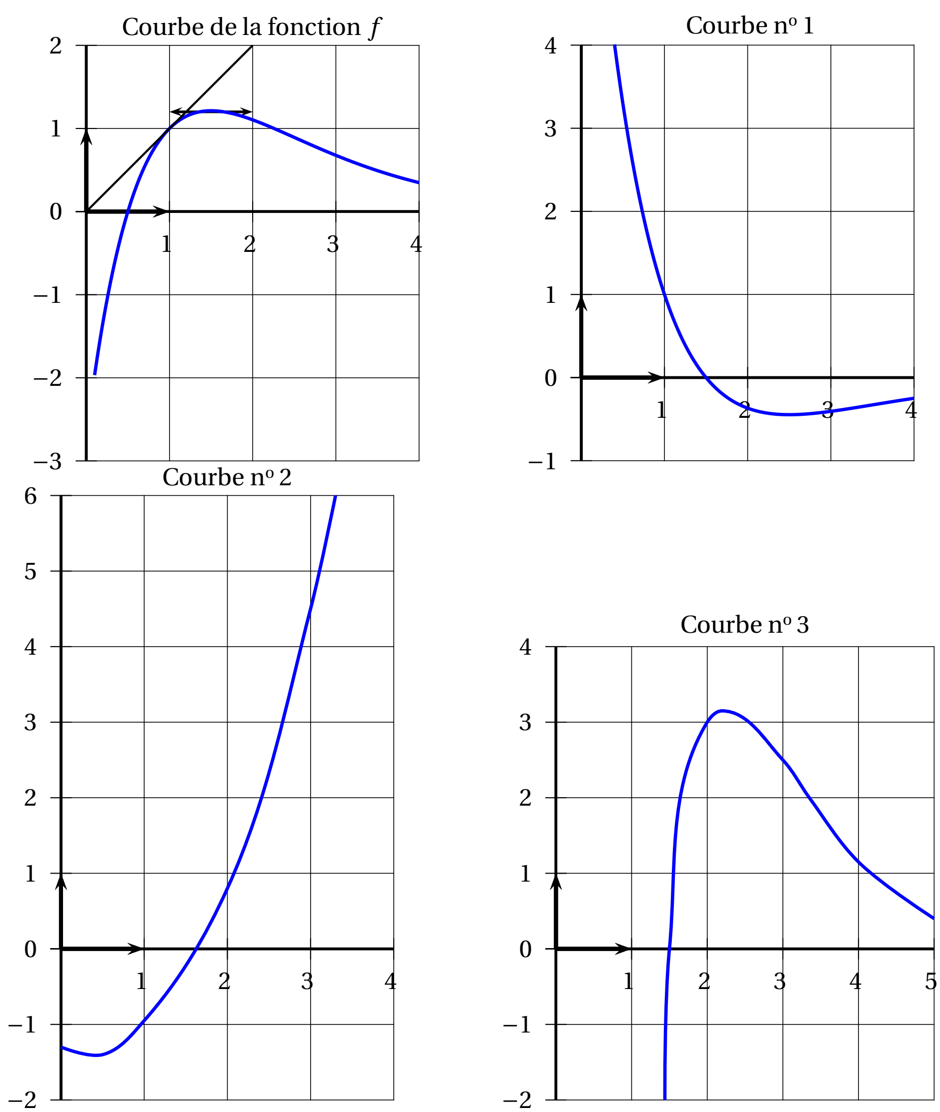
sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que H est une primitive de h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x+1}.$$

En déduire, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de la portion de plan limitée par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.

Annexe



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 80 + a\text{e}^{bx}$.
   Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de f, dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, passe par les points A$(0\,;53)$ et B$(3\,;60)$. Donner les valeurs exactes, puis une valeur arrondie à 10^{-1} près pour b.
2. Dans une entreprise, on installe un nouvel atelier. Pendant la période de « mise en route », la production le n-ième jour (n, entier naturel non nul) est donnée par :

$$U_n = 80 - 27\text{e}^{-0,1n} \text{ (unités).}$$

   a. Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante.
   b. Au bout de combien de jours la production dépassera-t-elle les 72 unités ?
3. On pose : $V_n = \text{e}^{-0,1n}$ (n, entier naturel non nul).
   a. Montrer que V_n est une suite géométrique dont on donnera la raison et la limite.
   b. Calculer $S = V_1 + V_2 + \ldots + V_{12}$.
   À la suite d'une avarie, l'atelier doit être arrêté après 12 jours de fonctionnement. Quelle est la production totale obtenue pendant cette période ? Donner une valeur arrondie à l'unité.

Problème **10 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique un produit, en quantité x, exprimée en milliers de tonnes.
Le coût total de fabrication est donné par :

$$C_T(x) = \frac{x}{4} + \frac{9}{2}\ln(x+1)$$

pour $x \in [0\,;\,5]$.
Les coûts sont exprimés en millions de francs.

A. Étude d'une fonction auxiliaire *f* définie sur [0 ; 5]

On considère la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9x}{x+1} - 9\ln(x+1).$$

1. Calculer $f'(x)$.
   Vérifier que l'on peut écrire $f'(x) = \dfrac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$.
2. Établir le tableau de variations de f sur $[0\,;5]$.
3. En déduire que f s'annule sur $]0\,;\,5\,]$ pour une valeur unique a.
4. Déterminer un encadrement à 10^{-3} près de a (on précisera la méthode utilisée).
5. Déduire des résultats précédents le signe de f sur $[0\,;5]$.

B. Étude d'un coût moyen C_m

La fonction coût moyen C_m est définie sur $]0\,;5]$ par :

$$C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{x}{4} + \frac{9}{2}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right].$$

1. Calculer $C'_m(x)$.
   Vérifier que l'on peut écrire $C'_m(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2}$ où f est la fonction auxiliaire de la question **A**

2. Étudier le sens de variation de C_m sur $]0~;~5]$.
3. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal, exprimé en francs par tonnes ?

   Quel est ce coût ?

Baccalauréat ES Asie juin 2000

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Tiré d'une revue économique, le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de demandeurs d'emploi en France entre les mois d'octobre 1997 et mai 1998 (en milliers de personnes).

Mois	oct. 97	nov. 97	déc. 97	jan. 98	fév. 98	mar. 98	avr. 98	mai 98
Rang du mois x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Demandeurs d'emploi y_i	3 102	3 090	3 051	3 029	3 031	3 005	2 994	2 979

1. Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Les unités graphiques sont :
- 2 cm par mois sur l'axe des abscisses;
- 1 cm pour 20 milliers de demandeurs d'emploi sur l'axe des ordonnées (origine en 2 800).

a. Représenter le nuage de points $(x_i ; y_i)$.

b. Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série double et placer ce point sur le graphique.

Vous orienterez le graphique en prenant pour axe des abscisses le « grand » côté de la feuille de papier millimétré (format paysage).

2. Dans cette question, aucun calcul manuel n'est demandé. Les valeurs obtenues à l'aide de la calculatrice seront données sous forme décimale approchée à 10^{-3} près par défaut.

a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i ; y_i)$.

b. Écrire une équation de la droite (D) de régression de y en x_i par la méthode des moindres carrés. La tracer sur le schéma précédent.

3. On suppose que la tendance se poursuit.
Déterminer graphiquement, à 20 milliers près, le nombre de demandeurs d'emploi que l'on peut prévoir en septembre 1998. Vérifier ce résultat.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Un horloger fabrique deux types de montres M_1 et M_2. Ces montres possèdent :
— soit un bracelet en cuir, noté C;
— soit un bracelet en or, noté O;
— soit un bracelet en argent, noté A.

On sait que :
— les montres de type M_2 ne peuvent pas être pourvues d'un bracelet en cuir;
— les bracelets en cuir représentent 40 % de la production totale, et ceux en or représentent 20 %;
— la production de montres de type M_2 avec bracelet en argent représente 15 % de la production totale, et est le triple de celle des montres de même type qui ont un bracelet en or.

Les résultats des calculs seront donnés de manière exacte sous forme décimale.

Partie A

Recopier et compléter le tableau des pourcentages suivant :

	C	O	A	Total
M_1				
M_2				
Total				100 %

Partie B

Une montre est choisie au hasard.
Calculer la probabilité des évènements suivants :

1. C'est une montre de type M_2.
2. C'est une montre avec un bracelet en argent.
3. C'est une montre de type M_1 avec un bracelet en argent.
4. C'est une montre de type M_1, sachant que son bracelet est en argent.
5. C'est une montre de type M_2 avec un bracelet en or.
6. C'est une montre avec bracelet or, sachant qu'elle est de type M_2.
7. C'est une montre de type M_2 sachant que son bracelet est en cuir.

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

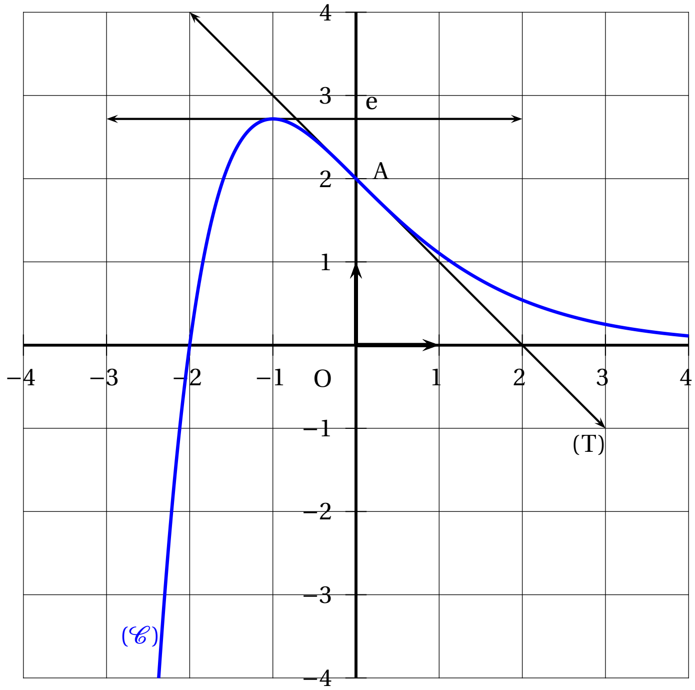
Une entreprise de 36 salariés est constituée d'apprentis, d'ouvriers et de cadres. Parmi ces personnes, 22 sont des hommes dont 18 ouvriers et 3 cadres, 6 femmes sont cadres et une est apprentie.
Dans cette société, on travaille 5 jours par semaine. Les résultats seront donnés suivant le cas, soit sous forme de fraction irréductible, soit sous forme décimale arrondie à 10^{-3} près par défaut, soit en écriture scientifique.

1. Tous les matins, une personne choisie au hasard est interrogée sur ses conditions de travail.
   Calculer la probabilité pour que, un jour donné, la personne interrogée soit :
   a. un apprenti ;
   b. un cadre, sachant que c'est un homme ;
   c. une femme, sachant que c'est une ouvrière.
2. Afin de connaître le sentiment du personnel sur le passage aux 35 heures, on interroge tous les matins 4 personnes choisies au hasard. Chaque tirage journalier est indépendant de ceux des jours précédents. L'une des femmes se prénomme Marianne.
   a. Montrer que la probabilité pour qu'un jour donné Marianne fasse partie du groupe des personnes interrogées est égale à $\dfrac{1}{9}$.
   b. On rappelle que dans cette société, on travaille 5 jours par semaine.
   Quelle est la probabilité pour que Marianne soit interrogée au moins une fois en 2 semaines ? (On considère que les choix successifs des groupes de 4 personnes sont 2 à 2 indépendants.)

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Sur le graphique ci-dessous la courbe $(\mathscr{C})$ représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite (T) est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A d'abscisse 0.



1. À partir des informations portées sur le graphique, reproduire sur votre copie et compléter le tableau suivant :

x	-1	0	1
$f(x)$			
$f'(x)$			$-\dfrac{2}{\text{e}^2}$

2. Résoudre graphiquement, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

   a. $f(x) = 2$ puis $f(x) < 2$.

   b. $f'(x) = 0$ puis $f'(x) > 1$.

Partie B

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\text{e}^{-x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f. On ne demande pas de construire $(\mathscr{C})$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$
   Comment se traduit graphiquement ce résultat ?
   On rappelle que la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\text{e}^x}{x}$ est égale à $+\infty$.
3. Établir que tout x réel $f'(x) = -(x+1)\text{e}^{-x}$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de la fonction f.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a deux solutions distinctes sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près de celles-ci.
5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (ax+b)\text{e}^{-x}$.

a. Déteminer les réels a et b pour que g soit une primitive de f.

b. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte puis une valeur approchée, à 10^{-2} près par défaut, de l'aire de la partie de plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 4$.

Baccalauréat ES Centres étrangers juin 2000

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;4]$ dont la représentation graphique, dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, est la courbe $(\mathscr{C})$ donnée en annexe. Cette annexe est à rendre avec la copie.

Les points M, N, P, Q et R appartiennent à $(\mathscr{C})$. Les coordonnées de M sont $\left(0 ; \dfrac{3}{2}\right)$, celles de N sont $\left(1 ; \dfrac{7}{2}\right)$, celles de P sont $\left(2 ; \dfrac{5}{2}\right)$, celles de Q sont $\left(3 ; \dfrac{3}{2}\right)$ et celles de R sont $\left(4 ; \dfrac{7}{2}\right)$.

La courbe $(\mathscr{C})$ admet en chacun des points N et Q une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

La droite (Δ) est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point P ; elle passe par le point S de coordonnées $(3;1)$.

1. **a.** Donner $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.
   b. Déterminer une équation de la droite (Δ).
2. **a.** Déterminer à l'aide du graphique le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ sur l'intervalle $[0 ; 4]$.
   b. Tracer la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$ sur le document en annexe puis, à l'aide du graphique, résoudre l'inéquation $f(x) < \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$.
3. La fonction f est la dérivée d'une fonction F définie sur l'intervalle $[0;4]$. En justifiant la réponse, donner le sens de variation de F.
4. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

   a. Donner le tableau de variations de f.
   b. En déduire le tableau de variations de g.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. Une entreprise a fabriqué 20 000 objets d'un modèle α en 1999. Elle réduit progressivement cette production de 2 500 pièces par an jusqu'à ce que la production devienne nulle. On note u_0 la production du modèle α pour l'année 1999 et u_n la production du modèle α pour l'année $(1999 + n)$.
   a. Calculer u_1 et u_2.
   b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   c. Exprimer u_n en fonction de n.
   d. Déterminer le nombre total d'objets de modèle α qui auront été produits du 1er janvier 1999 au 31 décembre 2007.
2. Dès 1999, cette entreprise lance un nouveau modèle β. 11 000 objets du modèle β ont été produits en 1999. La production du modèle β augmente de 8 % chaque année. On note v_0 la production du modèle β pour l'année 1999 et v_n la production du modèle β pour l'année $(1999 + n)$. Les résultats numériques seront arrondis à l'unité près.
   a. Vérifier que $v_1 = 11\,880$ et calculer v_2.

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

c. Exprimer v_n en fonction de n.

d. Calculer la production de l'année 2007.

e. Déterminer le nombre total d'objets de modèle β qui auront été produits du 1er janvier 1999 au 31 décembre 2007.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Soit la suite u_n définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x + 3$.

a. Tracer dans un même repère orthonormal d'unité 2 cm la représentation graphique (D) de la fonction f et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

c. En faisant apparaître le mode de construction, utiliser ce graphique pour représenter u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

d. Quels semblent être le sens de variation et la limite de la suite (u_n) ?

2. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel, $v_{n+1} = \dfrac{1}{4}v_n$.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Préciser son premier terme v_0.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

c. Exprimer v_n en fonction de u_n et en déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = -3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4.$$

d. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

e. Déterminer la limite de la suite (u_n).

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x.$$

1. Calculer la fonction dérivée de g et étudier son signe.

2. Donner le tableau de variations de g (on ne demande pas les limites en 0 et en $+\infty$). En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.)

2. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ où f' est la fonction dérivée de f. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f.

3. Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[2\,;\,3]$.
   À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de x_0.

4. **a.** Calculer la limite de $\left[f(x)-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right]$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

   b. Calculer les coordonnées du point A, intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec la droite (D) d'équation $y=x+\dfrac{1}{2}$.

   c. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.

   d. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D).

5. Tracer $(\mathscr{C})$, (D) et (T) dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie C

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$F(x)=\frac{x^2+x+(\ln x)^2}{2}$$

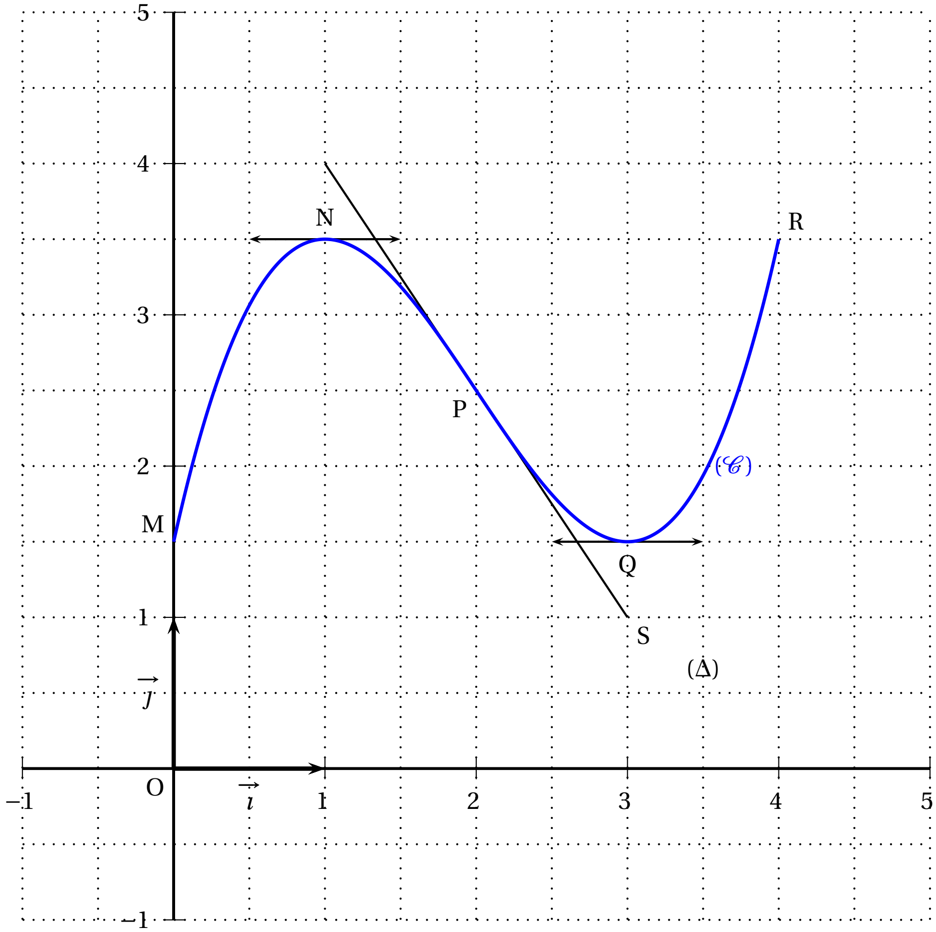
1. Montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Hachurer, sur le graphique précédent, le domaine E limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\mathrm{e}$.

   b. Calculer l'aire de E en unité d'aire, de manière exacte.

   c. Donner la valeur exacte de cette aire en cm^2 et en donner la valeur décimale arrondie au dixième.

Annexe à rendre avec la copie



Baccalauréat ES La Réunion juillet 2000

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

En vue d'étudier ses préférences alimentaires, le chien Motus a le choix chaque soir entre un et un seul des deux menus suivants :

• des croquettes ;

• une soupe avec de la viande et des pâtes aux légumes.

Une étude réalisée sur un nombre élevé de jours permet de constater que Motus a préféré la soupe dans 70 % des cas et les croquettes dans 30 % des cas.

On admet que le comportement du chien reste identique dans l'avenir.

1. On considère un jour donné choisi au hasard, et on appelle C l'évènement « Motus choisit les croquettes ».

Calculer les probabilités de C et de $\overline{C}$.

2. On observe les choix du chien pendant trois jours consécutifs. On admet que ces choix sont indépendants d'un jour à l'autre.

Construire un arbre pondéré pour décrire tous les choix possibles du chien.

3. Si Motus choisit les croquettes, il boit 1 litre d'eau après son repas, s'il choisit la soupe il ne boit que 1/2 litre d'eau.

On note la quantité bue par le chien après ses repas pendant 3 jours consécutifs, choisis au hasard.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de litres d'eau bue par le chien. On suppose que les choix du chien sont indépendants d'un jour à l'autre pendant ces 3 jours.

a. Quelles sont les valeurs possibles de X ?

b. Établir la loi de probabilité de X.

c. Calculer $\mathrm{E}(X)$ et interpréter cette valeur.

EXERCICE 2 **5 points**

(enseignement obligatoire)

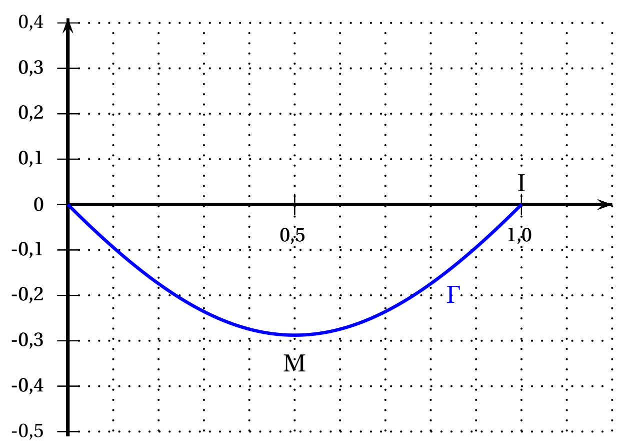
Le but de cet exercice est de déterminer laquelle des fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

• $f_1(x) = x^2 - x$

• $f_2(x) = \ln(x^2 - x + 1)$

• $f_3(x) = x\mathrm{e}^{x-1} - x$

est représentée par la courbe Γ donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.



1. Calculer les fonctions dérivées f_1', f_2', f_3' des fonctions f_1, f_2, f_3.
2. L'examen de la courbe Γ permet d'obtenir cinq informations : A, B, C, D, E.
   - A : les points de coordonnées $(0\,;\,0)$ et $(1\,;\,0)$ appartiennent à Γ.
   - B : la courbe Γ admet en O une tangente d'équation $y = -x$.
   - C : la courbe Γ admet en I une tangente d'équation $y = x - 1$.
   - D : la courbe Γ admet en M une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
   - E : l'ordonnée du point M est inférieure à $-0,26$.

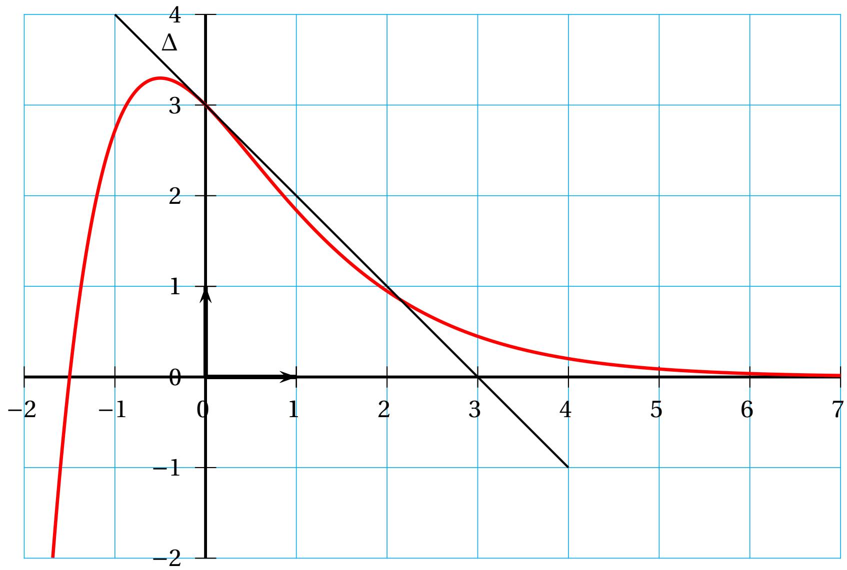
   En utilisant chacune des cinq informations, dans chaque cas, vous préciserez pour chacune des fonctions f_1, f_2, f_3, celles qui vérifient la condition correspondante et celles qui ne vérifient pas cette condition.
   Conclure en donnant une équation de la courbe Γ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Exercice 2 **5 points**
(enseignement de spécialité)

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^{-x}(ax+b), \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

La droite Δ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
Cette tangente passe par les points $\text{A}\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{7}{2}\right)$ et $\text{B}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$.



Partie A

1. Lire sur le graphique les valeurs de $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, $f(0)$, $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.
2. Calculer $f'(0)$.
3. Déterminer une équation de la droite Δ.
4. Déterminer les valeurs des réels a et b.

Partie B

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -\mathrm{e}^{-x}(2x+1)+1$.
   Établir le tableau de variation de h (on ne calculera pas les limites aux bornes de $\mathbb{R}$).
   En déduire que, pour tout x de $[0\,;\,1]$, on a $h(x) \leqslant 0$.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}(2x+3)+x-3$.
   Calculer $g'(x)$ et exprimer $g'(x)$ en fonction de $h(x)$.
3. En déduire le sens de variation puis le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,1]$.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite Δ pour les points d'abscisse x appartenant à $[0\,;\,1]$.
2. En déduire l'inégalité : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{5}{2}$.

PROBLÈME **10 points**

Au 1/01 /1999, une entreprise s'est équipée d'un certain nombre de machines-outils identiques, coûtant chacune à l'achat 400 000 F.
Au bout de t années, chacune se revend en ayant perdu chaque année 26 % de sa valeur de l'année précédente ; on désigne par $R(t)$ cette valeur de revente.
On estime que l'entretien d'une machine coûte forfaitairement 20 000 F, pour toute l'utilisation jusqu'à sa revente.
On appelle coût d'investissement $I(t)$ d'une machine pour l'année t, le coût d'achat de cette machine augmenté du montant forfaitaire de son entretien diminué de sa valeur de revente l'année t.
On donne $I(t) = 420 - R(t)$, exprimé en milliers de francs.

1. Exprimer $R(t)$ en fonction de t.
2. On modélise $R(t)$ par la fonction suivante, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

   $$R(t) = 400\mathrm{e}^{-0,3t}.$$

   On désigne par $C(t)$ le coût total d'utilisation d'une machine au bout de t années. $C(t)$ est donné par :

   $$C(t) = 420 - 400\mathrm{e}^{-0,3t}.$$

   a. Calculer la limite de $C(t)$ en $+\infty$.
   Calculer la dérivée de $C(t)$ et étudier son signe.
   Étudier les variations de la fonction C pour $t \in [0\,;\,+\infty[$.

   b. Vérifier qu'au bout de 15 ans, le coût total est pratiquement égal au coût d'achat augmenté du coût d'entretien, à 5 000 F près.
3. L'entreprise décide de revendre les machines dès que le coût total d'utilisation d'une machine dépasse 330 000 F.

   a. Résoudre l'inéquation $C(t) > 330$. Donner la réponse en nombre entier d'années.

   b. Pour des raisons comptables, l'entreprise revend ses machines au mois de janvier. En quelle année doit-elle le faire ?
   Quel sera le prix de revente d'une machine à cette date ?
   (On donnera la meilleure approximation de ce prix en nombre entier de milliers de francs.)

∽ Baccalauréat ES Liban juin 2000 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

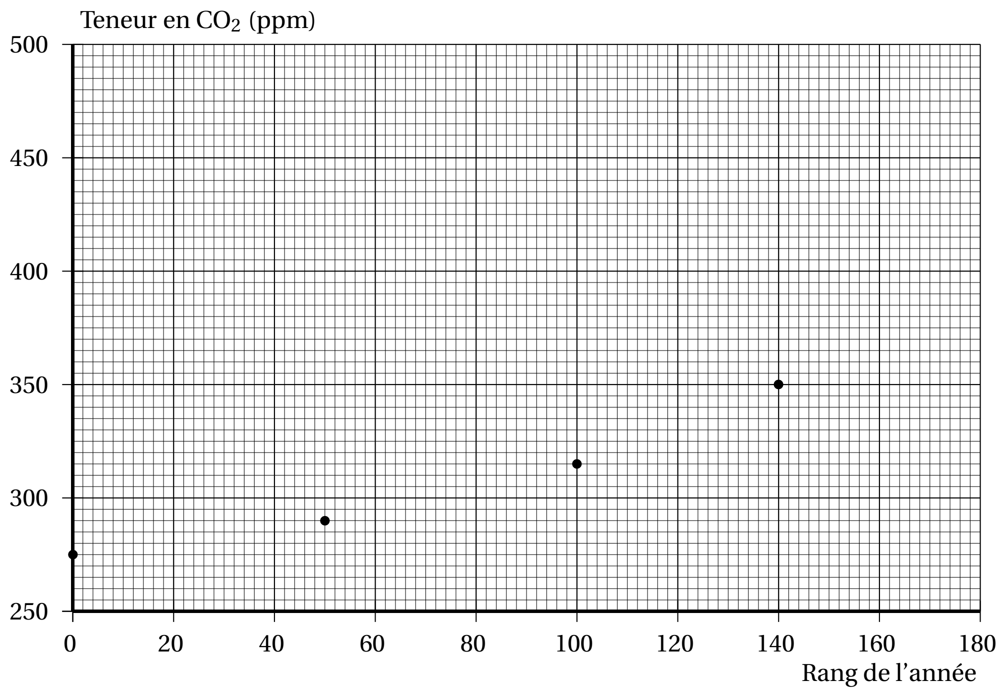
Commun à tous les candidats

Le tableau suivant indique la teneur de l'air en dioxyde de carbone (CO_2), observée depuis le début de l'ère industrielle.

Dans le tableau ci-dessous, x_i représente le rang de l'année et y_i la teneur en CO_2 exprimée en parties par million (ppm).

Année	1850	1900	1950	1990
Rang de l'année x_i	0	50	100	140
Teneur en CO_2 y_i	275	290	315	350

On a représenté dans le repère ci-après le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$.



On veut modéliser cette évolution par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points. Plusieurs types de fonctions semblent utilisables.

1. Modélisation par une fonction affine
   - **a.** À l'aide d'une calculatrice, donner le coefficient de corrélation linéaire, arrondi au centième, de la série $(x_i\ ;\ y_i)$.
   - **b.** À l'aide d'une calculatrice, donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$, avec a arrondi au centième et b à l'unité. Représenter cette droite dans le repère ci-dessus.
   - **c.** Selon ce modèle, quelle teneur en CO_2 peut-on prévoir en 2010 ? Placer dans le repère ci-dessus le point M correspondant à cette prévision.

2. Modélisation par une fonction f définie par $f(x) = 250 + B\text{e}^{Ax}$.

On pose $z_i = \ln\left(y_i - 250\right)$. On admet que la série $(x_i ; z_i)$ a pour coefficient de corrélation linéaire 0,999 et qu'une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés est : $z = 0,01x + 3,2$.

a. Selon ce modèle, quelle teneur en $C0_2$ peut-on prévoir en 2010 ? Placer dans le repère ci-dessus le point N correspondant à cette prévision.

b. Donner une équation de la courbe d'ajustement de y en x, sous la forme $y = f(x) = 250 + B\text{e}^{Ax}$, avec A arrondi au centième et B à l'unité.

c. En déduire des valeurs approchées décimales arrondies à l'unité près de $f(0)$, $f(50)$, $f(100)$, $f(140)$.

3. Laquelle des deux prévisions de la teneur en CO_2 pour 2010 vous semble la plus plausible ? Pourquoi ?

EXERCICE 2 **5 points**
obligatoire

Un jeu forain utilise une roue divisée en dix secteurs : sept sont verts, trois sont rouges.
On fait tourner la roue, et lorsqu'elle s'arrête, un repère désigne un secteur, chaque secteur ayant la même probabilité d'être obtenu.
Jouer une partie est l'expérience aléatoire consistant à faire tourner la roue trois fois de suite, de façon indépendante, en notant à chaque arrêt la couleur obtenue.

1. a. Représenter à l'aide d'un arbre cette expérience aléatoire et indiquer sur chaque branche les probabilités correspondantes.

b. Montrer que la probabilité d'obtenir trois fois le vert est égale à $0,343$.

c. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois le rouge.

d. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois le rouge.

2. Pour jouer une partie, un joueur doit miser une somme d'argent : soit m le montant de sa mise. S'il obtient trois fois le vert, il perd sa mise. S'il obtient une ou deux fois le rouge, il récupère sa mise. S'il obtient trois fois le rouge, il récupère sa mise et gagne une somme égale à dix fois sa mise.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur : les valeurs que peut prendre X sont $-m$, 0 et $10m$.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Exprimer l'espérance de X en fonction de m. Expliquer pourquoi, quelle que soit la mise du joueur, la règle du jeu avantage le forain.

EXERCICE 2 **5 points**
(spécialité)

Partie A - Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,6u_n + 200$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 500$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le terme et la raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que $u_n = 400 \times (0,6)^n + 500$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B - Application économique

Dans un pays, deux sociétés A et B se partagent le marché des télécommunications. Les clients souscrivent, le 1er janvier, soit auprès de A, soit auprès de B, un contrat d'un an au terme duquel ils sont libres à nouveau de choisir A ou B.
Cette année 2000, la société A détient 90 % du marché et la société B, qui vient de se lancer, 10 %. On estime que, chaque année, 20 % de la clientèle de A change pour B, et de même 20 % de la clientèle de B change pour A. On considère une population représentative de 1 000 clients de l'année 2000. Ainsi, 900 sont clients de la société A et 100 sont clients de la société B. On veut étudier l'évolution de cette population les années suivantes.

1. **a.** Vérifier que la société A compte 740 clients en 2001.
   Calculer le nombre de clients de A en 2002.

   b. On note a_n le nombre de clients de A l'année $(2000+n)$.
   Établir que $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,2\,(1\,000 - a_n)$.
   En déduire que $a_{n+1} = 0,6a_n + 200$.
2. En utilisant le résultat de la **partie A**, que peut-on prévoir pour l'évolution du marché des télécommunications dans ce pays ?

PROBLÈME **10 points**

*Le but du problème est l'étude d'une fonction et le tracé de sa courbe représentative (**Partie** B), en s'appuyant sur l'étude du signe d'une fonction auxiliaire (**Partie** A).*

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{-1+\ln x}{x^2}.$$

Certains renseignements concernant la fonction f sont consignés dans le tableau suivant :

x	1		$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$f\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

1. **a.** Montrer que, pour x élément de l'intervalle $[1~;~+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{3-2\ln x}{x^3}$, où f' désigne la dérivée de f.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x, et retrouver les variations de f données dans le tableau (aucun calcul de limite n'est demandé).
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1~;~\mathrm{e}]$.
3. En utilisant les résultats précédents et le tableau de variation de f, donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{\ln x}{x}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. **a.** Déterminer la limite de g en $+\infty$. (On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.)

   b. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[g(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right)\right] = 0$.

   Interpréter ce résultat pour la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ et la courbe $\mathscr{C}$

   c. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
2. Montrer que la fonction f étudiée dans la **partie A** est la fonction dérivée de g.
   En déduire le sens de variation de g.
3. Soit M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse e, et T la tangente à $\mathscr{C}$ en M. Justifier que T est parallèle à $\mathscr{D}$.
4. Tracer les droites $\mathscr{D}$ et T dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité graphique : 2 cm).
   Indiquer le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse α (on utilisera 1,25 pour valeur approchée de α) et la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point. Enfin, tracer la courbe $\mathscr{C}$.
5. On désigne par $\mathscr{S}$ le domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \text{e}$.
   Soit A la valeur exprimée en unités d'aire de l'aire du domaine $\mathscr{S}$.

   a. Exprimer A à l'aide d'une intégrale (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale dans cette question).

   b. Une primitive sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ de la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ est
   $H(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.
   Calculer A.

Baccalauréat ES Métropole juin 2000

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Le tableau suivant, publié en août 1999 dans une revue économique, donne la part du temps partiel au sein de la population active (les valeurs pour 2000 et 2004 sont le résultat d'une estimation).

Année x_i	1980	1985	1990	1995	1997	2000	2004
Part du temps partiel en % y_i	8,3	11	12	15,6	16,8	18	20

On étudie la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ pour $\mathbf{1980 \leqslant x_i \leqslant 1997}$.
Les calculs seront effectués à la calculatrice.

1. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points de coordonnées $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ pour $1980 \leqslant x_i \leqslant 1997$. On prendra : 1 cm pour une part de 2 % en ordonnée, 2 cm pour 5 ans en abscisse en prenant pour origine le point (1980 ; 0).
2. Déterminer les coordonnées de G, point moyen de la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$. Le placer sur le graphique.
3. **a.** Donner la valeur arrondie à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire de la série $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$. Un ajustement affine est-il justifié ?
   Dessiner cette droite sur le graphique.
   b. Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (a et b arrondis à 10^{-3} près).
   c. Peut-on considérer que les estimations pour 2000 et 2004 faites par la revue ont été réalisées en utilisant l'équation obtenue à la question **3. b.** ?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

En 1998 un constructeur automobile français a vendu dans la catégorie « petites voitures » 283 049 véhicules répartis de la façon suivante :
86 214 du modèle A, 166 937 du modèle B, le reste du modèle C.
Le constructeur estime que la probabilité de choix d'un de ces modèles par un client ayant l'intention d'acheter une voiture de cette catégorie, est égale à la fréquence de vente de ce modèle dans la catégorie « petites voitures » de cette marque.
Les résultats seront arrondis à trois décimales.

1. Déterminer la probabilité qu'un client acheteur choisisse le modèle B.
   Quelle est la probabilité qu'il ne choisisse pas le modèle B ?
2. Trois clients achètent un véhicule dans la catégorie « petites voitures », leur choix se fait de façon indépendante. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de clients parmi les trois qui achètent le modèle B.
   a. Construire un arbre de probabilité et déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X.
3. Représenter la fonction de répartition de X
4. Quelle est la probabilité pour qu'au plus deux clients sur les trois achètent un véhicule du modèle B ?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le système bancaire, recevant un dépôt initial $S_0 = 50\,000$ F, en remet 80 % en circulation sous forme de prêts et en conserve 20 % (le montant de cette réserve sera notée E_0). L'activité économique se traduit par le fait que les sommes prêtées reviennent dans le système où elles apparaissent comme un nouveau dépôt S_1, dépôt qui sera traité selon le même processus 80 % remis en circulation, 20 % mis en en réserve).
Le dépôt initial de 50 000 F engendre ainsi une suite S_n de dépôts successifs et une suite E_n de mises en réserve.

1. **a.** Calculer S_1, S_2, E_0, E_1, et E_2.
   b. Exprimer S_n à l'aide de S_{n-1}.
   c. En déduire les expressions de S_n et de E_n en fonction de n.
2. On fait le bilan après que la banque ait reçu les n premiers dépôts $S_0, \dots, S_{n-1}$, (et ait procédé aux mises en réserve correspondantes).
   a. Calculer en fonction de n la somme totale D_n que la banque a reçue.
   b. Calculer la somme totale R_n que la banque a inscrite en réserve.
3. **a.** Montrer que la limite R de la suite (R_n) est égale au dépôt initial S_0.
   b. Déterminer la limite D dans la suite (D_n). Quelle est l'interprétation de la différence $D - S_0$?

PROBLÈME **11 points**

Partie A

1. Soit C_m la fonction définie sur $[0\,;\,6]$ par :

$$C_m(q) = 0,8 + 4(1-2q)\mathrm{e}^{-2q}$$

Cette fonction traduit le coût marginal quotidien d'une usine pour la fabrication d'un produit chimique sous forme liquide, q étant la quantité de produit exprimée en milliers de litres et $C_m(q)$ exprimé en milliers de francs.
Dresser le tableau de variations de C_m, la valeur de $C_m(1)$ figurera dans le tableau.
En déduire le signe de $C_m(q)$ sur $[0\,;\,6]$.

2. **a.** Montrer que la fonction g définie sur $[0\,;\,6]$ par $g(q) = 4q\mathrm{e}^{-2q}$ admet pour fonction dérivée la fonction définie par :

$$g'(q) = 4(1-2q)^{\mathrm{e}-2q}.$$

   b. Le coût marginal est assimilé à la fonction dérivée du coût total. Sachant que les coûts fixes $C_T(0)$ s'élèvent à un millier de francs, déterminer la fonction C_T traduisant le coût total en fonction de q.
3. **a.** Déterminer les variations de C_T sur $[0\,;\,6]$ en utilisant la question **1.**.
   b. Représenter la fonction coût total dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ (unité graphique 2 cm).

Partie B

Le prix de vente de ce liquide est de 1,80 F par litre. La fabrication quotidienne est vendue en totalité.

1. **a.** Représenter sur le graphique précédent la fonction traduisant la recette quotidienne.

b. Montrer que le bénéfice noté $B(q)$ s'exprime par :

$$B(q) = q - 1 - 4q\mathrm{e}^{-2q}.$$

2. Soit la fonction h définie sur $[0\,;\,6]$ par :

$$h(q) = 1,8 - C_m(q).$$

a. Étudier les variations de h en utilisant celles de C_m.

b. Démontrer que l'équation $h(q) = 0$ a une unique solution α sur $[0\,;\,1]$. (On ne demande pas de calculer α.)

c. En déduire le signe de $h(q)$ pour $q \in [0;6]$.

3. **a.** En utilisant la question précédente donner les variations de B.

b. Donner une valeur de $B(\alpha)$ avec deux décimales en prenant 0,28 comme valeur de α.
Que représente cette valeur pour cette usine ?

Baccalauréat ES Polynésie juin 2000

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un client désirant louer une voiture auprès de la société ALIZÉ doit formuler sa demande en précisant deux critères :
- la puissance du véhicule : il a le choix entre deux catégories A ou B ;
- l'équipement : voiture climatisée ou non climatisée.

Une étude statistique portant sur un grand nombre de clients a permis d'établir que 60 % des clients louent une voiture de catégorie A et que, parmi eux, 20 % désirent la climatisation. En revanche, 60 % des clients préférant la catégorie B optent pour la climatisation.

1. Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.
2. Dans cette question, on donnera des résultats numériques exacts. On choisit au hasard un client et on définit les évènements suivants :
   « Le client a choisi une voiture de catégorie A climatisée »
   « Le client a choisi une voiture climatisée ».
   a. Déterminer la probabilité de ces évènements.
   b. Quelle est la probabilité pour que la voiture choisie soit de catégorie A, sachant qu'elle est climatisée ?
3. On suppose que le nombre des clients est suffisamment important pour que la probabilité de choisir une voiture climatisée de catégorie A soit, pour chacun d'eux, celle obtenue à la question 2 et que leurs choix sont indépendants les uns des autres. On choisit au hasard trois clients.
   Soit X le nombre de voitures de catégorie A climatisées louées par ces trois clients.
   a. Montrer que la probabilité de l'évènement $[X = 3]$ est $(0,12)^3$.
   b. Déterminer la probabilité de l'évènement $[X = 0]$ et en donner l'arrondi à deux décimales.
   c. Déterminer la probabilité de l'évènement « Au moins un des clients a choisi une voiture de catégorie A climatisée » et en donner l'arrondi à deux décimales.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Tous les résultats pourront être obtenus à l'aide de calculatrice sans justification seront arrondis à deux décimales.
Chaque trimestre l'INSEE publie la moyenne annuelle des quatre derniers indices trimestriels du coût de la construction des immeubles à d'habitation (base 100 au 4e trimestre 1953). Le tableau suivant donne ces moyennes pour les premiers trimestres des années 1995 à 1999.

Année	1995	1996	1997	1998	1999
rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
moyenne des indices y_i	1 017	1 024,5	1 038	1 063,25	1 065

(*Source : INSEE*)

1. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Un ajustement affine est-il envisageable ? Expliquer pourquoi.
2. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés.
3. En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon, estimer la moyenne des indices prévisible au 1er trimestre 2000.

4. Monsieur Dupont loue à monsieur Lejeune, 3 000 F par mois, un studio à compter du 1er août 1999. Le contrat prévoit une révision annuelle des loyers au 1er août : les loyers sont proportionnels aux moyennes des indices du coût de la construction du premier trimestre de l'année (la moyenne des indices correspondant au loyer initial est 1 065).

   Le propriétaire envisage de fixer le loyer à 3 060 F à compter du 1er août 2000. Cette augmentation serait-elle conforme au contrat si l'on tient compte de la moyenne des indices obtenue à la question 3 ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Madame X décide de verser 5 000 F, chaque année, le 31 décembre, sur un compte en assurance-vie, à partir de l'année 1999. Toutes les sommes déposées sont rémunérées au taux annuel de 5 %, à intérêts composés, ce qui signifie que chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital le 31 décembre et produisent à leur tour des intérêts.
On désigne par C_n(n entier positif ou nul) le capital, exprimé en francs, dont Madame X dispose sur son compte au 1er janvier de l'année $(2000+n)$. On a donc $C_0 = 5000$.

1. **a.** Montrer que le capital acquis au 1er janvier 2001 est 10 250 F.
   b. Établir que, pour tout entier n positif ou nul : $C_{n+1} = 1,05C_n + 5000$.
2. **a.** On pose $u_n = C_n + 100000$, pour n entier positif ou nul. Établir une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b. Exprimer (u_n) en fonction de n.
   c. Montrer que $C_n = 105000(1,05)^n - 105000$.
   d. En quelle année le capital acquis dépasse-t-il 200 000 F pour la première fois ?
3. On pose $S = 5000 + 5000(1,05) + 5000(1,05)^2 + \ldots + 5000(1,05)^{19} + 5000(1,05)^{20}$.
   Calculer la valeur exacte de S et montrer que $S = C_{20}$.

PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction numérique f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 2\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$$

et on note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

A. Étude de f sur $[0~;~+\infty[$

1. Justifier que $f(x) = x + 2 - \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$ puis déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
   Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).
3. On désigne par M le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse x et N le point de (D) de même abscisse x. La distance entre les points M et N est le nombre $MN = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$. Résoudre l'inéquation $MN < 10^{-1}$.
4. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0~;~+\infty[$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet dans l'intervalle $[0~;~1]$ une solution unique x_0 dont on déterminera un encadrement à 10^{-1} près.

B. Représentation de la courbe $(\mathscr{C})$

1. Donner le coefficient directeur de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
2. Tracer (T), (D) et la partie de la courbe $(\mathscr{C})$ correspondant aux points dont l'abscisse appartient à $[0 ; 4]$. Faire figurer le point de la courbe d'abscisse x_0 sur le schéma.

C. Primitive de f

1. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

   a. Déterminer une primitive G de g sur $[0 ; +\infty[$.

   b. Vérifier que $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1} = 1 - g(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

2. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, de la portion du plan délimitée par $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis en donner l'arrondi à deux décimales.

Baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2000

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans une entreprise de conception de logiciels pour l'informatique, 20 % des employés ont un diplôme en gestion des affaires. 70 % des diplômés en gestion des affaires ont des postes de cadre, alors que seulement 15 % de ceux qui n'ont pas ce diplôme occupent ces postes.
Le comité d'entreprise organise en fin d'année une loterie pour tout le personnel. Chaque employé reçoit un billet de loterie et un seul.
Tous les billets sont placés dans une urne et on en tire un totalement au hasard.
L'employé gagnant se voit alors offrir un voyage.

1. **a.** Construire un arbre de probabilité décrivant cette situation.
   b. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   G : « L'employé gagnant a un diplôme de gestion des affaires ».
   C : « L'employé gagnant est un cadre de l'entreprise ».
2. Sachant que l'employé gagnant est un diplômé en gestion des affaires, quelle est la probabilité que ce soit un cadre ?
3. Quelle est la probabilité que l'employé gagnant soit un cadre si l'on sait qu'il n'est pas diplômé en gestion des affaires ?
4. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   « L'employé gagnant est cadre et diplômé en gestion des affaires ».
   « L'employé gagnant est cadre et non diplômé en gestion des affaires ».

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Dans cet exercice, les résultats numériques pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice et seront arrondis à 2 chiffres après la virgule.
Le tableau suivant donne le bénéfice, en millions de francs (MF), obtenu chaque année par une entreprise pour les années 1995 à 1999.

Année	1995	1996	1997	1998	1999
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Bénéfice y_i	10	9	12	8	11

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Que peut-on en déduire quant à la pertinence d'un ajustement affine pour cette série statistique à deux variables ?
2. On considère ensuite la série z_i des effectifs cumulés croissants de la série y_i.
   a. Recopier et compléter le tableau suivant :

Année	1995	1996	1997	1998	1999
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Bénéfice y_i	10	19			

   b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z.
   c. Donner une équation de la droite de régression de z en x.
   d. À l'aide des résultats précédents, montrer qu'il est possible de calculer une estimation du bénéfice cumulé pour l'année 2000, puis du bénéfice pour l'année 2000, arrondi à une unité près.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Une usine produit des appareils ménagers comportant des composants électriques et des pièces mécaniques. Ces appareils peuvent être défectueux. Ces défauts peuvent avoir deux origines, défaut d'origine mécanique, défaut d'origine électrique.
Ces deux défauts sont indépendants et peuvent être simultanés sur un même appareil.
Un suivi statistique de la production journalière permet d'attribuer une valeur de probabilité aux évènements suivants :

- La probabilité, pour un appareil tiré au hasard dans la production journalière, d'être défectueux est de $1,5 \times 10^{-3}$.
- Pour un appareil pris au hasard parmi ceux qui sont défectueux, la probabilité pour que l'une des origines de la panne soit due aux composants électriques est égale à 0,7.
- La probabilité, pour un appareil pris au hasard parmi ceux qui ont un défaut électrique, d'avoir aussi un défaut mécanique est de 0,8.

On désigne par D l'évènement « L'appareil est défectueux ».
On désigne par E l'évènement « L'appareil présente un défaut électrique ».
On désigne par M l'évènement « L'appareil présente un défaut mécanique ».
Les résultats numériques seront donnés avec cinq chiffres après la virgule.

1. Calculer la probabilité de l'évènement : « L'appareil ne présente aucun défaut ».
2. Construire un arbre pondéré représentant cette situation.
3. Calculer les probabilités suivantes :
   a. $P(E \cap M)$;
   b. $P(E)$;
   c. $P(M)$.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ dont une courbe représentative $(\mathscr{C})$ est donnée en annexe dans un repère orthogonal.
Dans tout le problème on se contentera d'étudier les fonctions sur $]0 ; 5]$.

1. Au moyen d'une lecture graphique et en utilisant le tableau de valeurs, donner le signe de f sur $]0 ; 5]$.
2. On note F la primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.
   La courbe de F est donnée en annexe.
   Calculer, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathscr{A}$ compris entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}.$$

1. Calculer la limite de f en zéro par valeurs supérieures.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$?
2. Calculer la dérivée de f et étudier le signe de cette dérivée.
   Dresser le tableau des variations de f sur $]0 ; 5]$.

3. Calculer une primitive de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.
   Donner l'expression de F.

Partie C

Une entreprise qui fabrique des ustensiles de cuisine sait qu'elle peut en produire jusqu'à 5 000 par jour et que son bénéfice, exprimé en milliers de francs, est donné par :

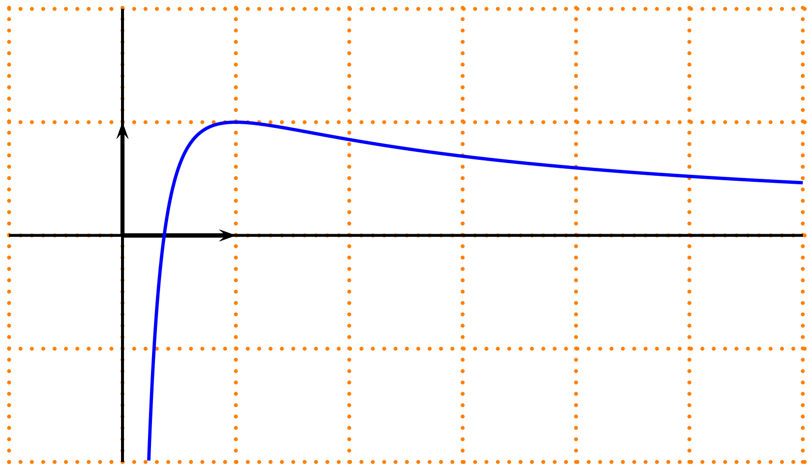
$$B(q) = 10 \times \frac{1 + \ln(q)}{q}$$

où q est le nombre d'unités produites, en milliers.
Déduire de l'étude de la **partie B** :

1. Le nombre minimal d'unités à produire pour que l'entreprise atteigne le seuil de rentabilité (bénéfice positif) ;
2. Le nombre exact d'unités à produire pour que l'entreprise obtienne un bénéfice maximum, ainsi que la valeur de ce bénéfice.

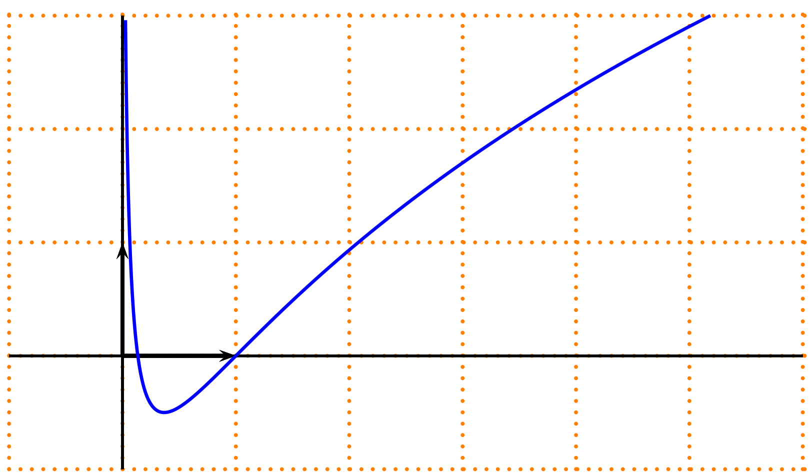
Annexe du problème

Courbe de la fonction f



x	$\frac{1}{e}$	1	e
$f(x)$	0	1	$\frac{2}{e}$

Courbe de la fonction F



x	$\frac{1}{e}$	1	e
$F(x)$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$

Baccalauréat ES Métropole septembre 2000

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une usine fabrique des moteurs électriques pour l'industrie spatiale. Ceux-ci doivent être très fiables et performants ; pour cela ils passent des contrôles très sévères.

Chaque moteur est testé en fin de fabrication. Si le test est positif, le moteur est acheminé chez le client ; si le test est négatif, le moteur retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si, cette fois, le test est positif, le moteur part chez le client mais, si le test est négatif, le moteur est définitivement écarté et détruit.

Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 85 % des moteurs neufs sortis directement des chaines de fabrication mais que, parmi les moteurs révisés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.

Sauf avis contraire, on donnera les valeurs décimales exactes des probabilités demandées.

1. On choisit un moteur au hasard dans la chaine de fabrication.
   a. Construire un arbre de probabilité illustrant les différents cas qui peuvent se présenter pour ce moteur.
   Faire apparaître sur chaque branche les probabilités correspondantes.
   b. Donner la probabilité pour que le premier test en fin de fabrication soit positif pour ce moteur.
   c. Calculer la probabilité pour que ce moteur doive être révisé et soit ensuite acheminé chez le client.
   d. Calculer la probabilité pour que ce moteur soit finalement écarté et détruit.
   e. Calculer la probabilité pour que ce moteur soit envoyé chez le client.
2. La fabrication d'un moteur revient à 60 000 francs auxquels il faut rajouter 10 000 francs si le moteur est révisé. Un moteur est facturé au client la somme de t francs (t nombre réel positif).
   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque moteur fabriqué, associe le gain (éventuellement négatif que réalise l'entreprise sur ce moteur.
   a. Déterminer en fonction de t les trois valeurs que peut prendre X et déterminer la loi de probabilité de X.
   (On rappelle que le bénéfice est la différence entre le prix de vente et le prix de revient.)
   b. Calculer en fonction de t l'espérance mathématique de X et en déduire la valeur de t à partir de laquelle l'entreprise fera un bénéfice positif en vendant un grand nombre de moteurs (arrondir au franc près).

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

M$^{\text{me}}$ X décide d'ouvrir un plan d'épargne. Le taux **mensuel** de celui-ci est de 0,4 %, les intérêts sont capitalisés tous les mois. Elle verse 10 000 F le 1$^{\text{er}}$ janvier 2000. Puis, tous les premiers de chaque mois à partir du 1$^{\text{er}}$ février 2000, elle verse 600 F sur ce plan.

Soit u_n la somme qui se trouve sur son plan après n mois d'ouverture. Ainsi $u_0 = 10000$ et $u_1 = 10640$.

1. Calculer u_2 et u_3.
   Écrire une relation entre u_{n+1} et u_n.
2. On définit la suite (v_n) telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, on ait $v_n = u_n + 150000$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

3. Calculer le temps nécessaire pour économiser la somme de 100 000 F sur ce plan.
En quelle année cela se produira-t-il ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Le conseil municipal d'une station touristique de montagne a décidé de faire équiper une falaise afin de créer un site d'escalade. L'équipement doit se faire depuis le pied de la falaise. Deux entreprises spécialisées dans ce genre de chantier ont été contactées et ont envoyé des devis. On se propose d'étudier ceux-ci.
Devis de l'entreprise A :
Le premier mètre équipé coûte 100 F, puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 20 F de plus que le mètre précédent (100 F pour équiper une falaise de un mètre, 100 F + 120 F = 220 F pour équiper une falaise de deux mètres, 100 F + 120 F + 140 F = 360 F pour une falaise de trois mètres, etc.)
Devis de l'entreprise B :
Le premier mètre équipé coûte 50 F, puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 5 % de plus que le mètre précédent (50 F pour équiper une falaise de un mètre, 50 F + 52,50 F = 102,50 F pour équiper une falaise de deux mètres, 50 F + 52,50 F + 55,125 F = 157,625 F pour une falaise de trois mètres, etc.).
On appelle u_n le prix du n-ième mètre équipé et S_n le prix de l'équipement d'une falaise de n mètres de hauteur indiqués par l'entreprise A.
On appelle v_n le prix du n-ième mètre équipé et R_n le prix de l'équipement d'une falaise de n mètres de hauteur indiqués par l'entreprise B.

1. Exprimer u_n puis S_n en fonction de n.
2. Exprimer v_n puis R_n en fonction de n.
3. Calculer le prix à payer pour équiper une falaise de 50 mètres de hauteur avec chacune des deux entreprises. Préciser l'entreprise la moins chère. On arrondira les prix au franc près.
4. Le conseil municipal a décidé d'accorder un budget de 120 000 F pour équiper ce site. Calculer la hauteur de la falaise qui peut être équipée avec cette somme par chacune des deux entreprises A et B (arrondir au mètre près).

PROBLÈME **10 points**

Une société est spécialisée dans l'exploitation de gravières (le gravier extrait est utilisé pour la construction d'autoroutes). Elle doit étudier le plan d'exploitation d'un nouveau site d'extraction. Voici les conditions d'exploitation définies par la direction :
« L'exploitation débutera le 1$^{\text{er}}$ janvier 2001. La production journalière de gravier devra rapidement augmenter pour atteindre son maximum après un an et demi de travail, puis elle devra décroître lentement. »
On traduit en langage mathématique ces consignes afin de modéliser la production journalière et la production totale. On choisit habituellement pour modéliser la production journalière du site une fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = (at^2 + bt + c)\mathrm{e}^{-t}$$

où a, b et c sont trois nombres réels.
$f(t)$ représente la production journalière de gravier extrait (en milliers de tonnes), t étant la durée écoulée depuis le début de l'ouverture du site (t est en années, c'est un réel positif). On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.
Les consignes peuvent se traduire ainsi :
- $(\mathscr{C})$ passe par le point O de coordonnées $(0~;~0)$.
- La tangente à $(\mathscr{C})$ en O a pour coefficient directeur 3.
- La courbe $(\mathscr{C})$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1,5.

1. Montrer que sous ces contraintes f est définie par

$$f(t) = \left(2t^2 + 3t\right)\text{e}^{-t}.$$

2. Déterminer la dérivée f' de f et montrer que

$$f'(t) = (-2t + 3)(t + 1)\text{e}^{-t}.$$

   Étudier les variations de la fonction f pour $t \geqslant 0$. On admet que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

   Préciser le signe de f sur $[0~;~+\infty[$.

3. Calculer le maximum de f sur $[0~;~+\infty[$. En donner la valeur arrondie à 10^{-3} près. Quelle est la production journalière maximum prévue sur ce site, et à quelle date sera-t-elle atteinte ?
4. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ sur une feuille de papier millimétré (unités : 3 cm sur l'axe des abscisses, 5 cm sur l'axe des ordonnées).
5. Montrer qu'il existe une seule valeur t_0, comprise entre 3 et 4, telle que $f(t_0)$ soit égale à 1 (soit 1 000 tonnes par jour).

   Donner à l'aide de la calculatrice une valeur de t_0 arrondie à 10^{-2} près.
6. Montrer que la fonction F définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$F(t) = \left(-2t^2 - 7t - 7\right)\text{e}^{-t}$$

   est une primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.
7. Considérant que la gravière sera exploitée 200 jours par an, on admettra que la production totale prévue pendant la durée t est donnée par la formule

$$P(t) = 200 \times \int_0^7 f(x)\,\text{d}x.$$

   a. Transformer l'écriture de $P(t)$ en utilisant le résultat de la question 6 et étudier les variations de la fonction P sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

   b. On prévoit que l'exploitation de ce site doit être interrompue au bout de cinq ans. Calculer à 1 000 tonnes près par défaut la quantité de gravier qui aura été extraite, ainsi que la production moyenne annuelle sur cette période.

∽ Baccalauréat ES Polynésie septembre 2000 ∾

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un salarié a mis en réserve 10 000 F sur un compte rémunéré, au taux de 5 % par an, le 1er janvier 2000. Au 1er janvier des années suivantes, les intérêts sont cumulés à son capital. Le salarié décide par ailleurs de faire prélever sur ce même compte les frais de gestion de sa carte bancaire. Ces frais sont annuels, s'élèvent à 200 F et sont prélevés le 1er janvier de l'année suivante.
On note u_0 le capital au 1er janvier 2000 et u_n le capital au 1er janvier de l'année
$(2000 + n)$.
Ainsi $u_0 = 10000$ et $u_1 = 10300$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Montrer que $u_{n+1} = 1,05u_n - 200$.
3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $U_n = u_n - 4000$.
   Montrer que v est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
4. En déduire l'expression de U_n puis de u_n en fonction de n.
5. De quelle somme, arrondie au franc, le salarié disposera-t-il au 1er janvier 2010 ?
6. Au bout de combien d'années le capital initial aura-t-il doublé ?

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Une enquête est faite auprès des inscrits à un stage multi-activités (randonnée, natation, parapente, ...).
On note :
- F l'ensemble des femmes participant à ce stage ;
- A l'ensemble des stagiaires, hommes et femmes, pratiquant la randonnée.

L'enquête relève que :
- F représente 30 % de l'ensemble des stagiaires ;
- A représente 48 % de l'ensemble des stagiaires ;
- chez les stagiaires du groupe A, il y a deux fois plus d'hommes que de femmes.

1. On interroge un stagiaire au hasard.
   a. Quelle est la probabilité que ce stagiaire pratique la randonnée ?
   b. Quelle est la probabilité que ce stagiaire soit une femme pratiquant la randonnée ?
2. On interroge au hasard une stagiaire femme. Quelle est la probabilité qu'elle pratique la randonnée ?
3. On interroge trois stagiaires au hasard, de manière indépendante. Quelle est la probabilité que, parmi ces trois stagiaires, aucun ne pratique la randonnée ?

Problème **10 points**

Les représentations graphiques sont faites dans un même repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

a. Calculer $f'(x)$. Montrer que $f'(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le sens de variation de f.

c. Tracer la partie $\mathcal{C}$ de la courbe représentative de f limitée à $[0\,;3]$.

2. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \ln(x+1)$.

a. Représenter graphiquement la fonction ln sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. En déduire la partie $\mathcal{C}'$ de la courbe représentative de g limitée à $[0\,;3]$.

3. a. Soit Ψ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ par :

$$\Psi(x) = f(x) - g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(x+1).$$

Calculer $\Psi(x)$, puis dresser le tableau de variations de Ψ (on y fera figurer la valeur $\Psi(0)$).
En déduire le signe de $\Psi(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;3]$.

b. Quelles sont les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$?

4. a. Soit $G(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.
Montrer que G est une primitive de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Calculer, en cm^2 , la valeur exacte de l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.
Donner une valeur approchée décimale de cette aire à 10^{-3} près.

Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2000

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Dans chacun des calculs, donner les résultats sous forme de fiactions irréductibles.

1. Le jeune Bob obtient des résultats moyens à l'école. Pour le motiver, sa maman lui propose le jeu suivant : à chaque fois qu'il obtient une « bonne » note, il peut tirer successivement sans remise deux pièces dans un sac contenant 7 pièces de 5 francs et 3 pièces de 10 francs.

Si les deux pièces sont de valeurs différentes, il garde ces deux pièces et sa maman complète le sac pour une autre fois.

Si les deux pièces sont de même valeur, il remet les deux pièces dans le sac.

Déterminer la probabilité des évènements suivants :

A : « Bob tire deux pièces de 5 francs » ;

B : « Bob tire deux pièces de 10 francs » ;

C : « Bob tire deux pièces de valeurs différentes ».

2. On conserve le principe du jeu du 1).

On se propose de faire gagner un peu plus d'argent à Bob en changeant juste le nombre de pièces de 10 francs dans le sac, le nombre de pièces de 5 francs étant toujours de 7.

On suppose qu'il y a n pièces dans le sac dont toujours 7 pièces de 5 francs (n est un entier naturel supérieur ou égal à 10).

a. Montrer que la probabilité p_n de l'évènement « Bob tire deux pièces de valeurs différentes » est :

$$p_n = \frac{14(n-7)}{n(n-1)}$$

b. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[10\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{14(x-7)}{x(x-1)}.$$

Étudier les variations de f et en déduire les deux valeurs entières consécutives de n entre lesquelles la fonction f présente son maximum. Donner alors la valeur maximale de p_n.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de passagers sur une ligne aérienne entre 1994 et 1998 :

Année	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Nombre de passagers p_i	7 550	9 230	10 745	12 840	15 665

Dans cet exercice, les résultats numériques pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice, sans justification. Ils seront donnés sous forme décimale approchée à 10^{-3} *près par défaut sauf à la question* 3.

1. a. On pose $y_i = \ln(p_i)$.

Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
y_i					

b. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées ; les graduations commencent à 0 sur l'axe des abscisses et à 8 sur l'axe des ordonnées).

Placer le point moyen G de ce nuage.

2. a. Justifier pourquoi un ajustement affine est acceptable.

b. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement affine (ou droite de régression) (D) de y en x.

Tracer la droite (D) sur le graphique précédent.

3. En supposant la même évolution du nombre de passagers, donner une estimation de ce nombre de passagers en l'an 2000 (arrondir le résultat à 100 près).

EXERCICE 2 **6 points**
Enseignement de spécialité

À l'entraînement, un jeune basketteur effectue des tentatives pour marquer un panier. Pour chaque tentative, il dispose de deux essais. On considère que la tentative est réussie si le premier essai est réussi ou, sinon, lorsque le second essai est réussi. Après plusieurs jours, son entraîneur a constaté que :

- la probabilité de réussir le premier essai est 0,5 ;
- la probabilité de réussir le deuxième essai, sachant que le premier a été raté, est 0,4.

Dans tout l'exercice, on considère que les tentatives successives sont indépendantes.

1. Le joueur fait une tentative de marquer un panier. Montrer que la probabilité de succès est $0,7$.

2. Le joueur effectue deux tentatives successives. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A « Réussir les deux tentatives » ;

B « Réussir les deux tentatives au premier essai ».

3. Le joueur effectue cinq tentatives successives. Quelle est la probabilité d'en réussir exactement quatre ? (Donner un résultat arrondi à $0,01$ près.)

4. Le joueur effectue n tentatives successives où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

a. Montrer que la probabilité p_n de l'évènement : « Le joueur réussit au moins une tentative », est :

$$p_n = 1 - 0,3^n.$$

b. Déterminer le sens de variation de la suite $\left(p_n\right)$.

Déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

c. Déterminer le nombre minimal n de tentatives que doit effectuer le joueur pour que la probabilité p_n soit supérieure à $0,999$.

PROBLÈME **10 points**

La répartition de la masse salariale d'une entreprise entre ses salariés peut être décrite par une fonction f qui permet d'apprécier si la distribution des salaires est plus ou moins régulièrement répartie. Une telle fonction, qui indique des pourcentages de salaires en fonction de pourcentages d'individus, est définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et satisfait aux conditions (C) suivantes :

(C_1) : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;

(C_2) : f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$;

(C_3) : pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f'(x) \leqslant x$.

Ce problème a pour but d'étudier deux de ces fonctions, de tracer leur courbe représentative et de comparer la répartition des masses salariales des entreprises correspondantes.

Partie I

⋆ **Étude d'une fonction préliminaire**

On considère la fonction g définie sur $[0;1]$ par :

$$g(x) = 1 - \mathrm{e}^{x-1}.$$

Calculer $g'(x)$, où g' désigne la fonction dérivée de g ; étudier son signe.
Calculer $g(0)$ et $g(1)$; en déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;1]$.

Partie II

On considère deux entreprises P et Q pour lesquelles les fonctions p et q donnant les répartitions de masse salariale sont définies sur $[0;1]$ par :

$$p(x) = x^2 \quad \text{et} \quad q(x) = x\mathrm{e}^{x-1}.$$

⋆ **A. Étude des conditions (C) pour les fonctions p et q**

1. Montrer que la fonction p vérifie les trois conditions (C_1), (C_2), (C_3).
2. **a.** Montrer que la fonction q vérifie la condition (C_1).
   b. Calculer $q'(x)$ où q' désigne la fonction dérivée de q.
   Étudier le signe de $q'(x)$ sur $[0;1]$.
   Montrer que la fonction q vérifie la condition (C_2).
   c. Montrer que pour tout x de $[0;1]$: $x - q(x) = xg(x)$ où g est la fonction de la partie 1.
   Montrer que la fonction q vérifie la condition (C_3).

⋆ **B. Tracé des courbes représentatives des fonctions p et q**

On appelle (Δ) la droite d'équation $y = x$ et on appelle respectivement $\left(\Gamma_p\right)$ et $\left(\Gamma_q\right)$ les représentations graphiques des fonctions p et q dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 10 cm.
Recopier et compléter le tableau suivant (donner les valeurs arrondies à 0,01 près).

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$p(x)$											
$q(x)$											

Tracer (Δ), $\left(\Gamma_p\right)$ et $\left(\Gamma_q\right)$ dans le repère défini ci-dessus.

Partie III

⋆ **Coefficient de Gini**

Le coefficient de Gini d'une entreprise est un indicateur d'inégalité de répartition salariale dans l'entreprise. Plus il est grand, plus la répartition des salaires est inégale. Dans une entreprise dont la répartition de la masse salariale est décrite par une fonction f satisfaisant aux conditions (C), on appelle coefficient de Gini le nombre réel :

$$G_f = 2\int_0^1 [x - f(x)]\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer le coefficient de Gini G_p de l'entreprise P
2. **a.** Montrer que la fonction Q définie sur $[0;1]$ par $Q(x) = (x-1)\mathrm{e}^{x-1}$ est une primitive de la fonction q sur $[0;1]$.

b. Calculer le coefficient de Gini G_q de l'entreprise Q.

3. Comparer G_p et G_q.
Dans laquelle des deux entreprises la répartition de la masse salariale est-elle la plus inégale ? justifier la réponse.

∽ Baccalauréat Nouvelle-Calédonie décembre 2000 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

On prévoit qu'une automobile, achetée neuve, aura subi une décote de 20 % la première année d'utilisation, puis une nouvelle décote de 15 % la deuxième année, et enfin une décote de 10 % chacune des années suivantes.

1. Une automobile est achetée neuve 120 000 francs. Déterminer la valeur de cette automobile, au franc près, au bout :
   a. d'un an.
   b. de deux ans.
   c. de quatre ans.
2. Une automobile est achetée neuve au prix P_0 (en francs). On appelle P_n, la valeur de cette automobile, en francs, au bout de n années.
   a. Exprimer P_n en fonction de P_0, et de n, lorsque n est supérieur ou égal à 3.
   b. Au bout de quatre ans, la valeur d'une automobile est 75 000 francs. Quel était, au franc près, son prix initial ?
   c. Quel est le plus petit entier n tel que :
   $$0,68 \times 0,9^{n-2} \leqslant 0,5 ?$$
   d. Une voiture a été achetée en l'an 2000. Déduire de la question **2. c.** l'année à partir de laquelle sa valeur sera, pour la première fois, inférieure ou égale à la moitié du prix du neuf.
   Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
Un commerçant possède un lot de 500 pantalons de taille allant de 1 à 4 et de couleur rouge, verte ou blanche.
Après l'inventaire de son lot, le commerçant constate que les tailles n° 1 représentent 60 % du stock, que les tailles n° 2 en représentent 20 % et qu'il y a autant de tailles n° 3 que de tailles n° 4.
D'autre part, parmi les tailles n° 1, 30 % des pantalons sont blancs et 50 % sont verts.
Enfin pour chacune des tailles n° 2, n° 3 et n° 4, 20 % des pantalons sont blancs et 40 % sont verts.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Taille / Couleur	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4	Total
Blanche					
Rouge			20		
Verte					
Total					500

2. Ce commerçant décide de vendre 200 francs chaque pantalon vert de la taille n° 1, ainsi que chaque pantalon blanc ou rouge des tailles n° 2, n° 3 et n° 4. Les autres pantalons de la taille n° 1 seront vendus 250 francs l'unité, et les pantalons verts des tailles n° 2, n° 3 et n° 4, 100 francs l'unité.
   Un client choisit un pantalon au hasard.

a. Déterminer la probabilité que ce pantalon soit vert.

b. Sachant que ce pantalon coûte 200 francs, déterminer la probabilité qu'il soit vert.

c. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque pantalon choisi, associe son prix.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles, sauf indication contraire.

Dans une école maternelle, l'enseignante demande à chaque enfant de choisir chaque matin 3 jouets parmi 9 rouges, 6 jaunes et 5 bleus.
Tous ces jouets se trouvent mélangés dans une caisse.
L'enseignante s'intéresse plus particulièrement à Rémi qui choisit chaque matin les 3 jouets au hasard. On suppose que tous les choix de 3 jouets sont équiprobables.

1. Combien y a-t-il de choix possibles de 3 jouets ?

2. On désigne par A, B et C les évènements suivants :
A « Rémi a choisi un jouet de chaque couleur ».
B « Rémi a choisi trois jouets de la même couleur ».
C « Rémi a choisi exactement deux jouets rouges ».

a. Montrer que la probabilité de A est $\dfrac{9}{38}$.

b. Déterminer la probabilité de B.

c. Déterminer la probabilité de C.

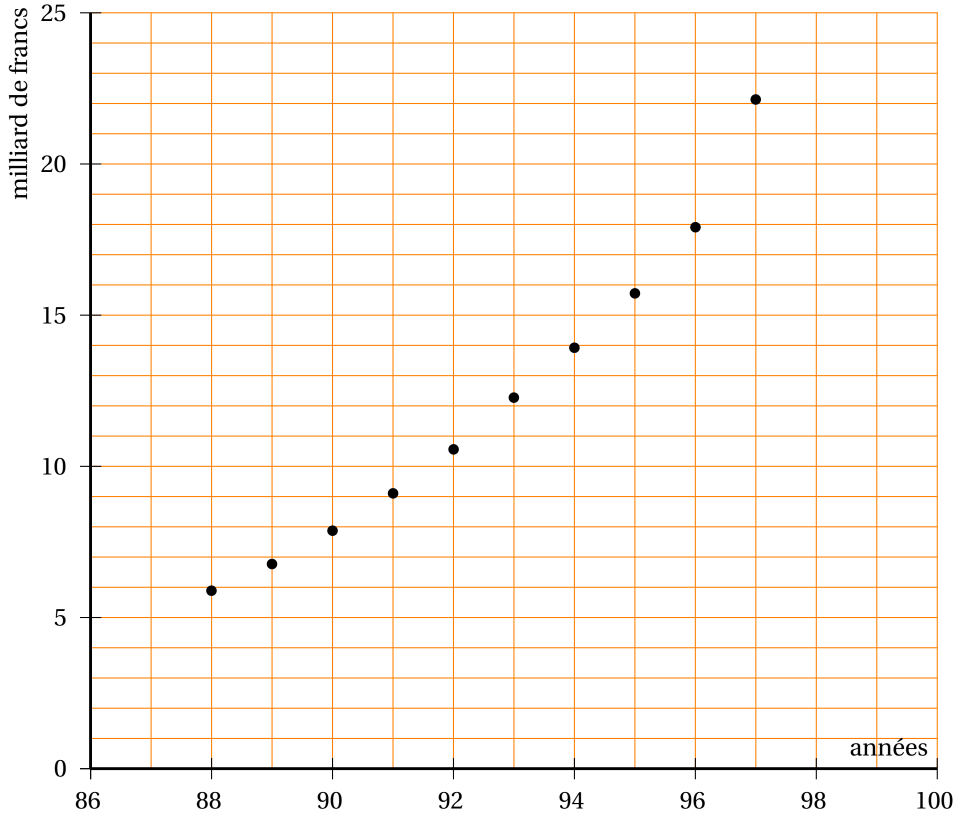
3. L'enseignante observe Rémi pendant 5 matins consécutifs. Elle note le nombre de jours où il aura choisi trois jouets de trois couleurs différentes.
Quelle est la probabilité que ce nombre de jours soit au moins égal à 4 ? En donner une valeur décimale arrondie à 10^{-4} près.

PROBLÈME **10 points**

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'actif net d'une mutuelle de 1988 à 1997 :

x_i	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
y_i	5,89	6,77	7,87	9,11	10,56	12,27	13,92	15,72	17,91	22,13

où x_i est le nombre d'années écoulées depuis 1900, y_i est l'actif net en milliards de francs, et i un entier allant de 1 à 10.
On a représenté ci-après le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à la série statistique, dans le plan rapporté à un repère orthogonal : unités graphiques : 1 cm pour une année en abscisse, 1 cm pour un milliard de francs en ordonnée; l'origine correspondant au point A de coordonnées (86; 0).



Partie A

On veut réaliser un ajustement affine du nuage par la méthode des moindres carrés.
Tous les calculs statistiques seront effectués à la machine et les résultats donnés à 10^{-2} *près.*

1. Justifier pourquoi un ajustement affine, entre x et y, est envisageable.
2. Déterminer par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$, l'équation de la droite $\mathcal{D}$ d'ajustement affine de y en x (ou droite de régression).
3. Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique fourni.
4. Estimer l'actif net prévisible de la mutuelle en l'an 2000.

Partie B

On veut étudier la fonction f définie dans l'intervalle $[88\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{0,143x-10,813}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f, dans le repère orthogonal fourni.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** La fonction f est la composée de deux fonctions croissantes.
   Préciser ces fonctions.

   b. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[88\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. **a.** Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en donnant les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.

x	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
$f(x)$										

b. Construire la courbe ($\mathscr{C}$) sur le graphique fourni ci-après.

4. a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[88\,;\,+\infty[$.

b. Déterminer une valeur décimale approchée à 10^{-2} près, de la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[88\,;\,97]$.

Partie C

On admet que la fonction f est aussi un modèle mathématique de l'évolution de l'actif net de la mutuelle.

1. a. En utilisant cette nouvelle approximation, déterminer, à 10^{-2} près, l'actif net prévisible de la mutuelle en l'an 2000.

b. Comparer ce résultat avec celui obtenu dans la partie **A** : à partir de l'observation graphique, un des deux résultats est-il plus vraisemblable ? Pourquoi ?

2. Interpréter le résultat obtenu dans la question **4. b.** de la partie **B)** .