Baccalauréat ES 2001

L'intégrale d'avril 2001 à mars 2002

☙ Baccalauréat ES Pondichéry avril 2001 ❧

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Le tableau suivant indique, en millions, la population de la France métropolitaine d'après les recensements depuis 1946.

Année	Rang x_i de l'année	Population y_i
1946	0	40,439
1954	8	42,706
1962	16	46,425
1968	22	49,712
1975	29	52,592
1982	36	54,335
1990	44	56,615
1999	53	58,416

Le détail des calculs statistiques effectués avec une calculatrice n'est pas demandé. Les nombres à déterminer seront arrondis à trois décimales.

1. Quel est le coefficient de corrélation linéaire entre x et y ?
   Un ajustement affine est-il envisageable ?
2. Le plan est rapporté à un repère orthogonal, les unités graphiques étant :
   - 0,25 cm sur l'axe des abscisses ;
   - 1 cm sur l'axe des ordonnées, la graduation des ordonnées débutant à 40.

   a. Construire le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.

   b. Indiquer les coordonnées du point moyen G associé à la série $(x\ ;\ y)$ et placer ce point sur le graphique précédent.
3. Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer cette droite (D) sur le graphique précédent.
4. En supposant que cette évolution de la population se poursuive, donner une estimation de la population en 2005.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Claude range ses crayons de couleur et il en trouve un orange, trois jaunes et quatre bleus. Il prend au hasard successivement trois crayons dont il note les couleurs : o pour orange, j pour jaune et b pour bleu.

1. Tracer un arbre pondéré illustrant cette expérience aléatoire.
   Les réponses aux questions suivantes seront exprimées sous forme d'une fraction irréductible.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Les trois crayons ont la même couleur » ?
3. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Les trois crayons sont pris parmi les crayons de couleur orange ou jaune » ?
4. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Parmi les trois crayons, un au moins est bleu » ?
5. Claude veut dessiner un drapeau bleu et jaune. Quelle est la probabilité qu'il puisse le faire, sachant que le premier crayon est bleu ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Les six points suivants sont définis par leurs coordonnées :
A(1 ; −1 ; 3) ; B(1 ; 1 ; 3) ; C(1 ; 1 ; −3) ; A′(19 ; −1 ; 3) ; B′(19 ; 1 ; 3) ; C′(19 ; 1 ; −3).
Aucune figure n'est exigible.

1. **a.** Montrer que les trois points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Établir que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$ est normal au plan (ABC).
   c. Écrire une équation cartésienne du plan (ABC).
   d. Les quatre points A, B, B′ et C sont-ils coplanaires ?

   a. Prouver que le triangle ABC est rectangle.
   b. Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un rectangle.
2. **a.** Démontrer que les trois points A′, B′ et C′ ne sont pas alignés.
   b. Les plans (ABC) et (A′B′C′) sont-ils sécants ou parallèles ? Justifier votre réponse.
3. **a.** Calculer les longueurs des segments [AB], [BC] et [AA′] notées respectivement l_0, l_1 et l_2.
   b. Les nombres l_0, l_1 et l_2 sont-ils les trois premiers termes d'une suite arithmétique ? Si oui, donner la raison.
   c. Les nombres l_0, l_1 et l_2 sont-ils les trois premiers termes d'une suite géométrique ? Si oui, donner la raison.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi : [2\,;\,20] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto x - 2 - 2\ln(x).$$

1. Étudier les variations de la fonction φ puis dresser son tableau de variation.
2. Montrer que la fonction φ s'annule exactement une fois sur l'intervalle [2 ; 20].
   Indiquer la valeur arrondie à une décimale de ce nombre.
3. En déduire le signe de la fonction φ sur l'intervalle [2 ; 20] et récapituler ces résultats dans un tableau.

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthogonal, les unités graphiques étant 1 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.
Soit f la fonction définie par :

$$f : [2\,;\,20] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \frac{x\ln(x)}{x-2}.$$

$(\mathscr{C})$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni de ce repère.

1. **a.** Montrer que la dérivée f' de f a le même signe que φ sur]2 ; 20].
   b. étudier les variations de la fonction f, déterminer la limite de f en 2 puis dresser le tableau de variation de cette fonction.
2. Prouver qu'il existe un unique point de la courbe $(\mathscr{C})$ où la tangente à la courbe en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.

3. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie C

Soit g la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} g : & [2\,;\,20] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}x^2 - 2x\ln(x). \end{array}$$

1. Montrer que g est une primitive de φ sur $[2\,;\,20]$.

2. Soit I le nombre défini par :

$$\mathrm{I} = \int_{16}^{20} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Exprimer le nombre I uniquement à l'aide de nombres entiers et des deux nombres $\ln 2$ et $\ln 5$.

b. Donner la valeur de I arrondie à deux décimales.

Baccalauréat ES Amérique du Nord juin 2001

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice les probabilités demandées seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à 10^{-3} *près.*

Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60 % des élèves sont des filles. De plus 40 % des filles et 30 % des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note A l'évènement « L'élève choisi fume », et $P(A)$ la probabilité de cet évènement.
   On note F l'évènement : « L'élève choisi est une fille ».
   Quelle est la probabilité que :
   a. Cet élève soit un garçon ?
   b. Cet élève soit une fille qui fume ?
   c. Cet élève soit un garçon qui fume ?
2. Déduire des questions précédentes, en le justifiant, que $P(A) = 0,36$.
3. L'enquête permet de savoir que :
   • Parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
   • Parmi les élèves non fumeurs, 65 % ont des parents non fumeurs.
   On note B l'évènement : « L'élève choisi a des parents fumeurs ».
   On notera $P(C/D)$ la probabilité de l'évènement C sachant l'évènement D. Dans cette question, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.
   a. Calculer les probabilités $P(A \cap B)$ et $P\left(\overline{A} \cap \mathrm{B}\right)$. En déduire $P(B)$.
   b. Calculer $P(A/B)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.
   Calculer $\mathrm{P}\left(A/\overline{B}\right)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.
   Quelle remarque amène la comparaison de ces deux résultats ?
4. On rappelle que, pour chaque élève choisi, la probabilité qu'il soit fumeur est égale à 0,36. On choisit quatre élèves de terminale au hasard. On admettra que la population d'élèves de terminale est suffisamment grande pour que le choix d'élèves au hasard soit assimilé à un tirage avec remise.
   Quelle est la probabilité qu'aucun de ces quatre élèves ne soit fumeur ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice les sommes seront données arrondies au franc le plus proche.

Un directeur du personnel propose à l'un de ses employés de choisir entre deux formes d'augmentation de salaire.

Sachant que son salaire actuel est de 6 000 F par mois, il lui propose soit une augmentation régulière de 55 F tous les mois (première proposition), soit une augmentation de 0,8 % tous les mois (deuxième proposition).

1. On se place dans le cadre de la première proposition et on note M_n le salaire en francs au bout de n mois.
   a. Vérifier que M_1 est égal à 6 055. Montrer que la suite (M_n) définie pour tout entier naturel n est une suite arithmétique dont on donnera la raison.
   b. Donner l'expression de M_n en fonction de n.

c. Calculer M_{12}, M_{24}, M_{36}, M_{48}.

2. On se place dans le cadre de la deuxième proposition et on note M'_n le salaire en francs au bout de n mois.

a. Montrer que la suite $\left(M'_n\right)$ définie pour tout entier naturel n est une suite géométrique de raison 1,008. Calculer M'_1.

b. Donner l'expression de M'_n en fonction de n.

c. Calculer M'_{12}, M'_{24}, M'_{36}, M'_{48}.

3. Quelle proposition permet d'obtenir le meilleur salaire mensuel au bout de trois ans ?

4. Avant de choisir une des deux propositions, le salarié compare la somme des salaires perçus.
Pour la proposition 1, on note S_n la somme des salaires sur les n premiers mois, de M_1 à M_n.
Pour la proposition 2, on note S'_n la somme des salaires sur les n premiers mois.

a. Exprimer S_n et S'_n en fonction de n.

b. Calculer S_{36}, S_{48}, S_{60} et S'_{36}, S'_{48}, S'_{60}.

c. Le salarié pense rester encore cinq ans dans l'entreprise.
S'il s'intéresse au montant total des salaires perçus, quelle proposition va-t-il choisir ?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un client dispose d'un capital de 20 000 F sur un compte bancaire. Ce capital ne lui rapporte pas d'intérêt et il l'utilise de la façon suivante :

- chaque début de mois, il retire 10 % de son capital ;
- le dernier jour de chaque mois il reverse 1 000 francs sur ce compte.

L'exercice a pour but de comprendre l'évolution de son capital.

1. On appelle C_0 le capital détenu au 31 décembre 2000 et C_n le capital détenu au bout de n mois, ces sommes étant exprimées en francs.

a. Vérifier que $C_1 = 19000$ et que $C_2 = 18100$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $C_{n+1} = 0,9C_n + 1000$.

c. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $C_n > 10000$. En déduire le signe de $C_{n+1} - C_n$, puis le sens de variation de la suite (C_n).

2. On considère la suite (U_n) définie par $U_n = C_n - 10000$.

a. Montrer que la suite (U_n), définie pour $n > 0$, est une suite géométrique dont on précisera le premier terme U_0 et la raison.

b. En déduire l'expression générale de U_n en fonction de n. Montrer que $C_n = 10000(0,9^n + 1)$.

c. Quelle est la limite de la suite (C_n) ?

d. Calculer la valeur de C_{12} arrondie au centime le plus proche. En déduire la somme totale qui a été retirée du compte durant l'année 2001.

PROBLÈME **10 points**
Étude d'une série statistique

Partie A

Le nombre d'utilisateurs de téléphone portable en France est donné par le tableau suivant :

Mois	12/1996	10/1997	05/1998	10/1998	02/1999	07/1999	09/1999	03/2000
Rang x_i	0	10	17	22	26	31	33	39
Millions d'utilisateurs y_i	2,5	4,5	7,2	9,4	12	15	16,2	22,6

Les calculs seront effectués avec la calculatrice, aucun détail de ces calculs n'est demandé.

1. **Réalisation d'un ajustement affine**
   a. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal où 1 cm représente quatre mois sur l'axe des abscisses, 1 cm représente 1 million d'utilisateurs sur l'axe des ordonnées.
   b. Donner la valeur approchée à 10^{-3} près par défaut du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$.
   Un ajustement affine est-il justifié ?
   c. Placer le point moyen G de cette série $(x_i\ ;\ y_i)$, après avoir déterminé ses coordonnées.
   d. Donner l'équation de la droite (D) de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$, a et b étant arrondis à 10^{-2} près.
   Tracer cette droite (D) sur le graphique précédent.
2. **Réalisation d'un autre ajustement**
   On considère le tableau suivant :

Mois	12/1996	10/1997	05/1998	10/1998	02/1999	07/1999	09/1999	03/2000
Rang x_i	0	10	17	22	26	31	33	39
$z_i = \ln(y_i)$	$\ln(2,5)$	$\ln(4,5)$	$\ln(7,2)$	$\ln(9,4)$	$\ln(12)$	$\ln(15)$	$\ln(16,2)$	$\ln(22,6)$

   Soit la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$, où $z_i = \ln(y_i)$.
   a. On admet qu'une équation de la droite de régression de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, est $z = 0,056x + 0,961$, avec $z = \ln(y)$.
   Exprimer y en fonction de x. Mettre y sous la forme $y = \alpha e^{0,056x}$.
   Donner la valeur décimale de α arrondie à 10^{-1} près.
   b. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;50]$ par $g(x) = 2,6e^{0,056x}$. En vous aidant de la calculatrice, tracer avec soin et sans justification la courbe représentative (C) de la fonction g sur le graphique précédent, pour x compris entre 0 et 50.
3. À partir du graphique, quel ajustement semble être le meilleur ?

Partie B

On se propose de comparer par le calcul les deux ajustements. Pour cela on considère les fonctions f, g et h définies sur l'intervalle $[0\,;50]$ par

$$f(x) = 0,5x + 0,08\ ;\ g(x) = 2,6e^{0,056x}\ ;\ h(x) = g(x) - f(x).$$

1. Résoudre l'inéquation $g(x) > 35$. En déduire l'année et le mois à partir desquels il y aura, d'après le second modèle, plus de 35 millions d'utilisateurs de téléphone portable en France.
2. a. Soit h' la fonction dérivée de la fonction h.
   Montrer que $h'(x) = 0,1456e^{0,056x} - 0,5$.
   b. Résoudre l'équation $h'(x) = 0$. On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi entier, de la solution x_0 de cette équation.
   c. Justifier le signe de $h'(x)$, puis établir le tableau de variation de h sur l'intervalle $[0\,;50]$. On donnera les valeurs arrondies à 10^{-2} près de $h(0)$, $h(x_0)$,
   $h(50)$. Pour calculer $h(x_0)$, on remplacera x_0 par son arrondi entier.
   d. En remarquant que $h'(x) = g'(x) - f'(x)$, montrer que $g'(x_0) = 0,5$.
   e. Soit (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse x_0. Que dire des droites (T) et (D) ?
   Tracer la droite (T).
   f. Que représente la valeur x_0 lorsqu'on compare les fonctions f et g considérées dans chacun des deux ajustements ?

3. **a.** En utilisant les variations de h, démontrer que la fonction h s'annule pour deux valeurs x_1 et x_2 de l'intervalle $[0\,;\,50]$.

   b. Encadrer x_1 par deux entiers successifs. Faire de même pour x_2.

   c. Placer les valeurs x_1 et x_2 sur le graphique. Que représentent ces valeurs lorsqu'on compare les fonctions considérées dans les deux ajustements ?

Baccalauréat ES Antilles–Guyane juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

À partir des productions réalisées pour l'année 2000, on veut comparer les résultats prévisibles de deux entreprises A et B jusqu'en 2015.

1. La production de l'entreprise A pour l'année 2000 est de 11 000 pièces. Chaque année, sa production augmente de 3 %.
   - **a.** Quelle est sa production en 2001 ? en 2002 ? en 2015 ? (Donner les résultats arrondis à l'entier.)
   - **b.** Quel est le pourcentage d'augmentation de la production de 2000 à 2015 ? (Résultat arrondi à 0,1 près.)
   - **c.** Exprimer en fonction de n la production de l'entreprise A en l'an $(2000+n)$ (n entier $0 \leqslant n \leqslant 15$).
2. L'entreprise B a produit 9 000 pièces en 2000, et sa production augmente de 5 % par an.
   - **a.** Quelle est sa production en 2015 ?
   - **b.** Exprimer en fonction de n la production de l'entreprise B en l'an $(2000+n)$ (n entier $0 \leqslant n \leqslant 15$).
   - **c.** Déterminer l'entier n tel que en l'an $2000+n$, la production de l'entreprise B dépasse pour la la première fois, la production de l'entreprise A.

EXERCICE 2 **4 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule :

- si elle est rouge, il gagne 10 F ;
- Si elle est jaune, il perd 5 F ;
- Si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir replacé la première boule tirée.

Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 F, sinon il perd 4 F.

1. Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.
2. Calculer la probabilité de l'évènement « le joueur est gagnant ».
3. Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).
   - **a.** Établir la loi de probabilité de la variable X.
   - **b.** Calculer l'espérance de X.
4. Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

EXERCICE 2 **4 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

La courbe de la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln x.$$

est donnée en annexe.

On considère la suite (u_n) à termes strictement positifs définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 7 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

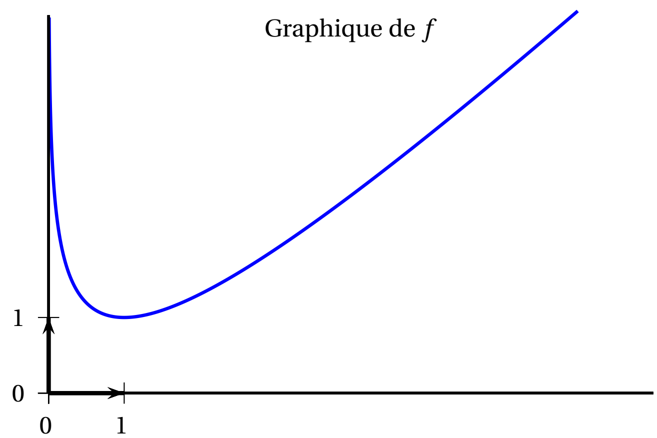
Partie I

1. Au moyen du graphique donné en annexe, déterminer le minimum de f sur $]0~;~+\infty[$ et en déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 1$.
2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n. Montrer que la suite (u_n) est monotone décroissante.

Partie II

1. Construire dans le repère de la courbe (C) donné en annexe la droite (D) d'équation $y = x$.
2. En vous aidant de la droite (D), représenter sur l'axe des abscisses du graphique ci-dessous les cinq premiers termes de la suite (u_n).
3. Quelle conjecture peut-on faire en ce qui concerne la limite de la suite (u_n) ?

Annexe à rendre avec la copie



Problème **12 points**

Le but de ce problème est l'étude de deux fonctions qui modélisent les importations et les exportations de l'entreprise E.

Partie A

⋆ **Étude de fonctions**

Les fonctions f et g sont définies sur $[0~;~\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{36}{8 + \mathrm{e}^{-x}} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\ln(x+1) + 2,5.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).

1. **a.** Étudier les variations de f et de g.

   b. Calculer les limites de f et de g en $+\infty$.
2. Représenter graphiquement ces deux fonctions. On nommera leurs courbes respectivement $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$, et on se limitera aux valeurs de x entre 0 et 6.
3. Recopier et compléter le tableau suivant, avec des valeurs numériques arrondies à 10^{-2} près.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$				4,47			
$g(x)$		3,89					

Partie B

⋆ **Étude de la fonction $g - f$**

On pose $h = g - f$.
Le but de cette question est d'étudier le signe de $h'(x)$ afin d'établir le tableau des variations de h sur $[0 ; \infty[$.

1. Calculer la dérivée h' de h.

2. a. Vérifier que $e^x.h'(x) = \dfrac{2e^x}{x+1} - \dfrac{36}{(8+e^{-x})^2}$.

b. On rappelle que pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $e^x > x+1$.
Établir l'inégalité $(8+e^{-x})^2 \geqslant 64$.
En utilisant successivement ces deux résultats, établir que

$$e^x h'(x) \geqslant \frac{2e^x}{x+1} - \frac{9}{16} \quad \text{et que} \quad e^x h'(x) \geqslant 2 - \frac{9}{16}.$$

c. Établir le tableau de variation de h.

d. Montrer que $h(x)$ s'annule pour une seule valeur x_0 comprise entre 0 et 6.
Déterminer un encadrement de x_0 de largeur 10^{-2}.

Partie C

⋆ **Application**

Notations : x désigne le temps en années. On pose $x = 0$ au 1er janvier 2000.
Pour l'entreprise E, $f(x)$ désigne le montant, en millions de francs, des achats pour l'année x et $g(x)$ désigne le montant, en millions de francs, de ses ventes.

1. Quel est le montant des achats et des ventes de cette entreprise à la fin de l'année 2000 ?

2. À partir d'une certaine date, les ventes l'emportent sur les achats.

a. Déterminer l'année au cours de laquelle les ventes l'emportent sur les achats.

b. Indiquer alors le rang de la semaine.

∽ Baccalauréat ES Asie juin 2001 ∽

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Dans une kermesse, un jeu est organisé de la façon suivante : le joueur mise 10 francs puis il réalise un tirage en deux étapes :

1^re^ étape : Le joueur tire au hasard un billet dans un panier. Dans ce panier, on a placé 10 billets marqués « U_1 » et 2 billets marqués « U_2 ».
2^e^ étape :
— Si le joueur a obtenu un billet marqué « U_1 », il tire alors un jeton dans une urne U_1 où sont placés 10 jetons marqués « Perdant » et 2 jetons marqués « Gagnant ».
— Si le joueur a obtenu un billet marqué « U_2 », il tire alors un jeton dans une urne U_2 où sont placés 7 jetons marqués « Perdant » et 5 jetons marqués « Gagnant ».

On note A l'évènement : Le joueur a tiré un billet « U_1 ».
On note B l'évènement : Le joueur a tiré un billet « U_2 ».
On note G l'évènement : Le joueur a tiré un jeton marqué « Gagnant ».
Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

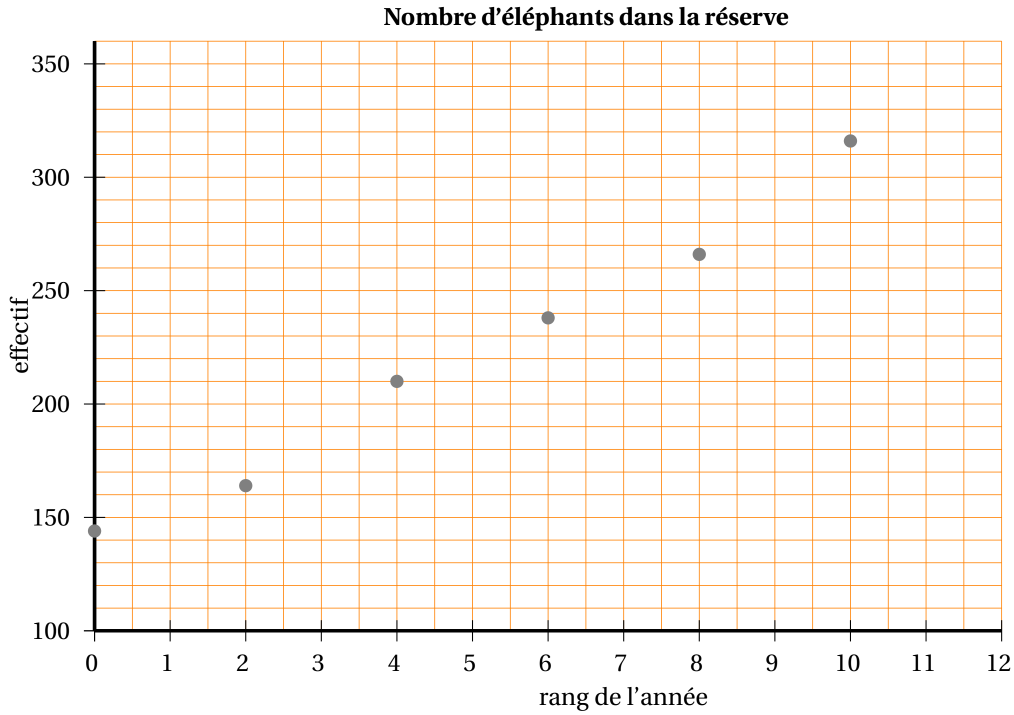
1. Construire un arbre pondéré qui décrit ce jeu.
2. Calculer la probabilité des évènements $(G \cap A)$ et $(G \cap B)$.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\dfrac{5}{24}$.
4. Quelle est la probabilité conditionnelle de l'évènement A par rapport à l'évènement G ?
   Les évènements A et G sont-ils indépendants en probabilité ?
5. Avec un jeton gagnant de l'urne U_1, le joueur reçoit 25 F ; avec un jeton gagnant de l'urne U_2, il reçoit 50 F ; sinon rien. On notera X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue du jeu.
   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b. Établir la loi de probabilité de X.
   c. Déterminer son espérance mathématique.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau suivant représente l'évolution du nombre d'éléphants dans une réserve, à partir de sa création en 1988 :

Année	1988	1990	1992	1994	1996	1998
Rang de l'année : x_i	0	2	4	6	8	10
Effectif : y_i	144	164	210	238	266	316

Le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à cette série statistique est représenté en annexe.
Ce dernier document sera complété au fur et à mesure et rendu avec la copie.
L'objet de l'exercice est de faire des prévisions sur l'effectif de la population d'éléphants de cette réserve pour l'année 2000.
Ces prévisions seront arrondies à l'entier le plus proche.
Aucun détail des calculs statistiques, à effectuer à la calculatrice, n'est demandé dans cet exercice.
Les coefficients des équations de droites seront arrondis au centième.



Partie A

Un premier ajustement affine du nuage de points est réalisé avec la droite $\Delta_1 = (M_0M_{10})$.

1. Tracer sur le graphique de l'annexe cette droite Δ_1.
2. Au moyen d'une lecture graphique, déduire une prévision p_1 de l'effectif pour l'année 2000.

Partie B

On désigne par (Δ_2) la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

1. Donner une équation de (Δ_2) et tracer cette droite sur le graphique joint en annexe.
2. Calculer la nouvelle prévision p_2 pour l'effectif en l'an 2000.

Partie C

L'effectif pour l'année 1999 est maintenant connu : 336 éléphants.

1. Placer le nouveau point sur le graphique.
2. On intègre cette valeur dans la série statistique initiale.
   a. Donner l'équation de la nouvelle droite (Δ_3) de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
   b. Calculer la prévision correspondante p_3 pour l'effectif en l'an 2000.

Partie D

On ne garde dans le tableau que les valeurs des années 1994 à 1999.

1. Donner l'équation de la droite (Δ_4) de régression de y en x.
2. Calculer la nouvelle prévision p_4 pour l'an 2000.

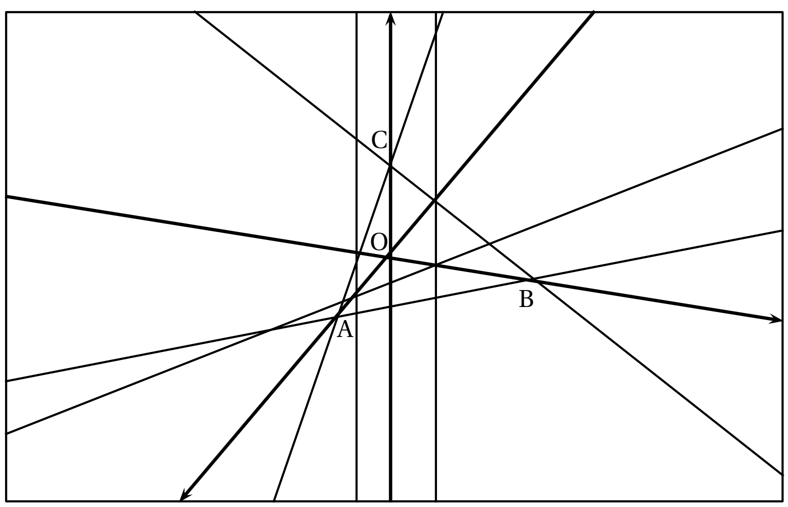
EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormal.
Représenter ce repère sur votre copie en prenant pour unité sur chaque axe 2 cm.
La qualité de cette représentation sera prise en compte. Le candidat pourra s'aider du graphique donné en annexe.

1. On donne le plan (P) d'équation $2x+2y+3z=6$.
   a. Déterminer les coordonnées des points A, B, C intersections du plan (P) avec les axes du repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
   b. Tracer les droites d'intersection du plan (P) avec les plans de coordonnées du repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
2. On considère le plan (Q) d'équation $x+2y=2$.
   a. Déterminer les coordonnées des points d'intersections du plan (Q) avec les axes du repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, quand ceux-ci existent.
   b. Tracer les droites d'intersection du plan (Q) avec les plans de coordonnées du repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
   c. Tracer l'intersection des deux plans (P) et (Q).
3. On donne les points D(1 ; 0 ; 0), E(0 ; −4 ; 0) et F(0 ; 0 ; 4).
   a. Déterminer une équation du plan (R) qui contient les points D, E, F.
   b. Calculer les coordonnées du point G, intersection des trois plans (P), (Q) et (R).

Annexe



PROBLÈME **10 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x)=x+3+\mathrm{e}^{(-x+2)}.$$

On notera $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentation de f dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthonormal.
On prendra pour unité graphique 1 cm sur chaque axe.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. Montrer l'existence d'une droite (D) asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$. Donner une équation de (D).
3. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. **a.** Tracer la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère défini plus haut.

   b. En utilisant le graphique, indiquer le nombre de solutions de l'équation E : $f(x) = 8$.
   Donner une valeur approchée de ces solutions avec la précision permise par le graphique.
5. Justifier que sur l'intervalle $[2\,;6]$, l'équation E admet une solution unique α, dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
6. On appelle M la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;9]$.
   Calculer M, en donner une valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise industrielle produit chaque jour x centaines d'objets $(1 < x < 20)$.
Le coût de fabrication de x centaines d'objets est donné par $f(x)$ exprimé en milliers de francs.

1. Calculer le coût de fabrication de 600 objets, 1 000 objets, 1 200 objets, arrondi au franc.
   Quel est, dans chacun de ces cas, le coût arrondi au franc de fabrication d'un objet ?
2. Quelle quantité d'objets doit-on fabriquer pour que le coût de fabrication soit le plus proche possible de 8 000 F ?
3. Montrer que le coût de fabrication est minimal lorsque l'entreprise fabrique une quantité q_0 d'objets. Donner la valeur de q_0.
   Quel est alors le coût, en francs, de fabrication d'un objet ?

∾ Baccalauréat ES Centres étrangers juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne le taux d'équipement en lave-vaisselle des ménages français, de 1975 à 1993.

Année	1975	1980	1985	1990	1993
x_i : rang de l'année	0	5	10	15	18
y_i : taux en %	8,4	16,5	23,1	30,0	33,6

(Source : INSEE)

Par exemple : 8,4 % des ménages français ont un lave-vaisselle en 1975.

Dans tout l'exercice, le détail des calculs n'est pas demandé. Les résultats pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice ; ils seront arrondis à 10^{-3} *près.*

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (unité graphique : 0,5 cm par année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 3 % sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Représenter le nuage de points $\left(x_i\,;\,y_i\right)$. On utilisera une feuille de papier millimétré.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique et le placer sur le dessin précédent.

2. **a.** Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $\left(x_i\,;\,y_i\right)$.

   Un ajustement affine est-il justifié ?

   b. Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.

   Représenter (D) sur le dessin précédent.

3. On suppose dans cette question que le modèle obtenu à la question **2.** reste valable pour les années suivantes.

   a. Calculer le taux d'équipement en lave-vaisselle que l'on peut prévoir en 2002.

   b. En quelle année ce taux dépasserait-il 50 % ? Déterminer l'année par le calcul.

   Expliquer comment on peut retrouver graphiquement ce résultat.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une enquête est faite auprès des élèves d'un lycée. Elle révèle que 30 % d'entre eux sont allés le mois précédent au moins quatre fois au cinéma.

1. D'après cette enquête, quelle est la probabilité pour qu'un lycéen, pris au hasard, y soit allé au plus trois fois ?

2. On interroge trois élèves choisis au hasard et de manière indépendante.

   Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves qui, parmi ces trois élèves, sont allés au moins quatre fois au cinéma le mois précédent.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X. On pourra utiliser un arbre pondéré.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

3. Soit F la fonction de répartition de X. Représenter graphiquement F dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm par unité en abscisse et 10 cm pour une unité en ordonnée).

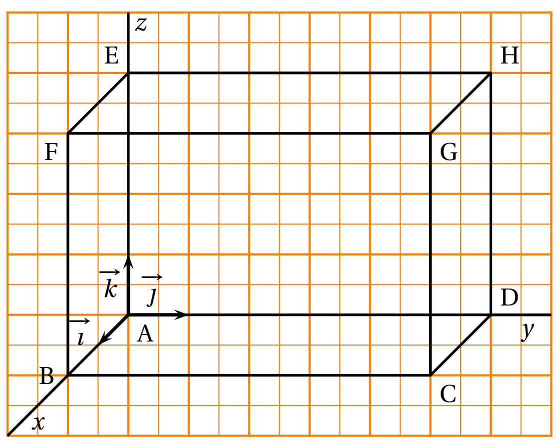
Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$.

ABCDEFGH est un pavé défini par $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{\imath}$; $\overrightarrow{AD} = 6\,\overrightarrow{\jmath}$; et $\overrightarrow{AE} = 4\,\overrightarrow{k}$.
I, J et K sont les milieux respectifs de [EF], [FB] et [AD].

1. Placer les points I, J et K sur la figure donnée en annexe. Donner les coordonnées des points B, D et E. Puis vérifier par le calcul que I, J et K ont pour coordonnées respectives $(1\,;\,0\,;\,4)$, $(2\,;\,0\,;\,2)$ et $(0\,;\,3\,;\,0)$.
2. Soit (P_1) le plan d'équation $y = 0$ et (P_2) le plan d'équation $2x + z = 6$.
   - **a.** Donner un vecteur $\overrightarrow{n}_1$, normal au plan (P_1) et un vecteur $\overrightarrow{n}_2$ normal au plan (P_2).
   - **b.** En déduire que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.
   - **c.** Soit (Δ) l'intersection des deux plans (P_1) et (P_2).
     Montrer que (Δ) est la droite (IJ).
3. Soit $\overrightarrow{n}(2\,;\,2\,;\,1)$.
   - **a.** Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$
   - **b.** En déduire que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK).
   - **c.** Montrer alors que le plan (IJK) a pour équation $2x + 2y + z = 6$.
4. On considère le plan (P) d'équation $5x + y = 5$.
   - **a.** Déterminer les coordonnées des points R et T, intersections du plan (P) avec les axes (Ax) et (Ay) respectivement.
   - **b.** Vérifier que le point I appartient au plan (P).
   - **c.** Sur la figure précédente, placer les points R et T, puis dessiner la trace du plan (P) sur le plan (xAy).



Problème **11 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)^2\mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$.

Partie A ⋆ Étude d'une fonction

1. Calculer la limite de f en - ∞.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} + 2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$.

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$. (On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha}\mathrm{e}^{-x} = 0$, pour tout réel α.)
   Quelle interprétation graphique peut-on en faire ?
3. Soit la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(1 - x^2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

4. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Résumer cette étude dans un tableau.
6. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[1\,;3]$. Donner un encadrement décimal de x_0, d'amplitude 10^{-2}.
7. Construire dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 2 cm la courbe $(\mathscr{C})$, la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0, ainsi que les tangentes horizontales à la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie B ⋆ Étude de la fonction inverse

1. Montrer que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(x_0)$, où x_0 désigne le nombre défini à la question **6.** de la **partie A**.
3. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
4. Dresser le tableau des variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$ en donnant les justifications nécessaires.

Partie C ⋆ Calcul d'aire

On considère la fonction F définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \left(-x^2 - 4x - 5\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

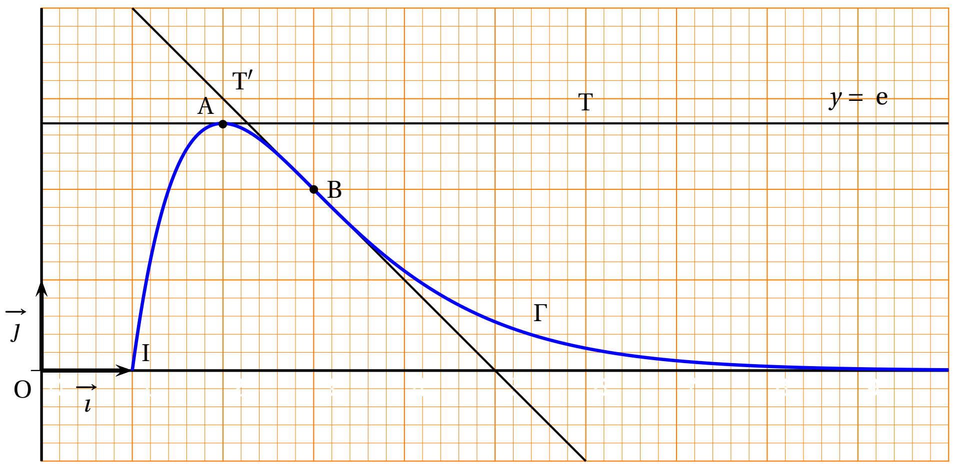
1. Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. On considère l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en cm^2 du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.
   Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis une valeur approchée par défaut de $\mathscr{A}$ à 10^{-2} près.

∽ Baccalauréat ES Liban juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Sur le document ci-dessous, le graphique est celui de la courbe Γ représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.



La courbe Γ passe par les points I$(1~;~0)$, A$(2~;~\text{e})$ et B$(3~;~2)$ où : $\text{e} = \exp(1)$. La droite T est tangente à Γ au point A et elle est parallèle à l'axe des abscisses.
La droite T′ est tangente à Γ en B et elle passe par le point de coordonnées $(5~;~0)$.
La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$.
L'axe des abscisses est asymptote à la courbe Γ.

1. À l'aide d'une lecture graphique :

a. Donner les valeurs de $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, puis de $f'(2)$ et $f'(3)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

b. Déterminer une équation de la droite T′.

c. Donner la limite de f en $+\infty$.

d. Dresser le tableau de variations de f ; donner le signe de f sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

2. La fonction g est définie, pour tout x de l'intervalle $[1~;~+\infty[$, par
$g(x) = \ln(f(x))$.

a. Donner les valeurs de $g(2)$, $g(3)$, puis de $g'(2)$ et $g'(3)$, où g' désigne la fonction dérivée de g.

b. Déterminer les limites de g en 1 et en $+\infty$.

c. Dresser en le justifiant le tableau de variations de g sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

d. En utilisant la courbe représentative Γ de la fonction f, donner une valeur approchée des solutions de l'équation $g(x) = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Un jeu de société est composé d'un grand nombre de fiches qui proposent chacune trois questions indépendantes : la première porte sur la géographie, la seconde sur l'histoire et la troisième sur les arts. À tour de rôle, chaque joueur tire une fiche au hasard et doit répondre aux trois questions dans l'ordre où elles sont proposées.
Le meneur de jeu remplit un bulletin réponse :

G	H	A

dans lequel, pour chaque question, il reporte F si la réponse est fausse, J si elle est juste. Ainsi, si le joueur a bien répondu aux questions sur la géographie et sur les arts, mais n'a pas trouvé la bonne réponse à la question sur l'histoire, le bulletin réponse à cette fiche sera :

G	H	A
J	F	J

Le résultat sera noté : JFJ.

1. **a.** Donner la liste des huits résultats différents que l'on peut obtenir pour une fiche.

   b. À chaque bulletin réponse est attribuée une note : une réponse juste, J, fait gagner 5 points ; une réponse fausse ou l'absence de réponse, F, fait perdre 2 points.
   Donner la liste des résultats qui conduisent à un total de 8 points.

2. La probabilité que Marc donne la réponse juste à une question, qu'elle soit sur la géographie, sur l'histoire ou sur les arts, est de 0,6.
   Marc tire une fiche et répond aux trois questions.

   a. Quelle est la probabilité que Marc obtienne le bulletin réponse cité en exemple ci-dessus ?

   b. Montrer que la probabilité que son bulletin réponse conduise à une note de 8 points est 0,432.

3. On appelle X la variable aléatoire égale à la note obtenue par Marc pour un bulletin réponse.

   a. Préciser toutes les valeurs (positives ou non) prises par X.

   b. Établir la loi de probabilité de X.

   c. Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Maud vise une cible avec une fléchette. La probabilité qu'elle atteigne la cible est $\dfrac{2}{3}$.
Les résultats des lancers successifs sont supposés indépendants.

1. Si Maud effectue cinq lancers successifs, quelle est la probabilité qu'elle atteigne exactement deux fois la cible ?

2. Maud et Paul décident de jouer des billes avec la règle du jeu suivante :
   - Maud mise des billes puis lance une fléchette.
   - Avant le premier lancer, Maud mise une bille.
   - À chaque lancer :
   • si elle rate la cible, elle perd sa mise que Paul récupère ; le jeu continue ; elle triple sa mise avant de lancer une nouvelle fléchette ;
   • si elle atteint la cible, elle récupère sa mise et Paul lui donne autant de billes que ce qu'elle vient de miser ; le jeu s'arrête.
   On suppose dans cette question que le jeu n'est pas limité par le nombre de billes.

   a. Soit a_n la mise de Maud avant le $(n+1)$-ième lancer. Ainsi $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.
   Donner les valeurs de a_2 et a_3.
   Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
   En déduire la valeur de a_n en fonction de n.

   b. Maud a raté la cible aux n premiers lancers : elle a donc perdu les mises $a_0,\ a_1, \cdots, a_{n-1}$.
   Montrer qu'elle a perdu $\dfrac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$ billes depuis le début du jeu.

3. Lorsque Maud et Paul commencent le jeu défini dans le 2., ils ont chacun 160 billes.

a. Si Maud perd à toutes les parties successives, quel est le nombre k maximum de lancers qu'elle peut effectuer ?

b. Quelle est la probabilité que cette situation se réalise et que Maud atteigne la cible au k-ième lancer ?

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Le document ci-après est à compléter et à rendre avec la copie.
La fonction h est définie sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ par :

$$h(x) = x^2 + \frac{16x}{2x+1} - 8\ln(2x+1).$$

1. Montrer que : $h'(x) = \dfrac{2x(2x+5)(2x-3)}{(2x+1)^2}$, h' désignant la fonction dérivée de h sur l'intervalle $[0\,;\,8]$.

2. Étudier les variations de h sur l'intervalle $[0\,;\,8]$.

3. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}\,;\,8\right]$.

Déterminer une valeur approchée de α arrondie à 0,01 près.

4. Déduire des résultats précédents le signe de h sur l'intervalle $[0\,;\,8]$.

Partie B

La fonction M est définie sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ par :

$$M(x) = x + \frac{8}{2x+1}.$$

La fonction C_{T} est la primitive de la fonction M sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ qui s'annule pour $x = 0$. Calculer $C_{\text{T}}(x)$.

Partie C

Une entreprise produit une quantité variable x d'appareils (x est exprimé en milliers d'appareils) dont le coût marginal M est la fonction définie dans la **partie B.**. Dans la suite du problème, tous les coûts seront exprimés en milliers de francs.
On modélise le coût total de production de x milliers d'appareils, pour x appartenant à $\left[\frac{1}{4}\,;\,8\right]$ par la fonction C_{T} définie dans la **partie B**.

1. a. Vérifier que le coût moyen, par millier d'appareils, est défini sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\,;\,8\right]$ par :

$$C_m(x) = x + 4\frac{\ln(2x+1)}{x}.$$

b. Calculer $C'_m(x)$, où C' désigne la fonction dérivée de C.

c. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\,;\,8\right]$, $C'_m(x) = \dfrac{h(x)}{2x^2}$, où h est la fonction étudiée dans la **partie A.**.

d. Étudier les variations de la fonction C_m, et dresser son tableau de variations.

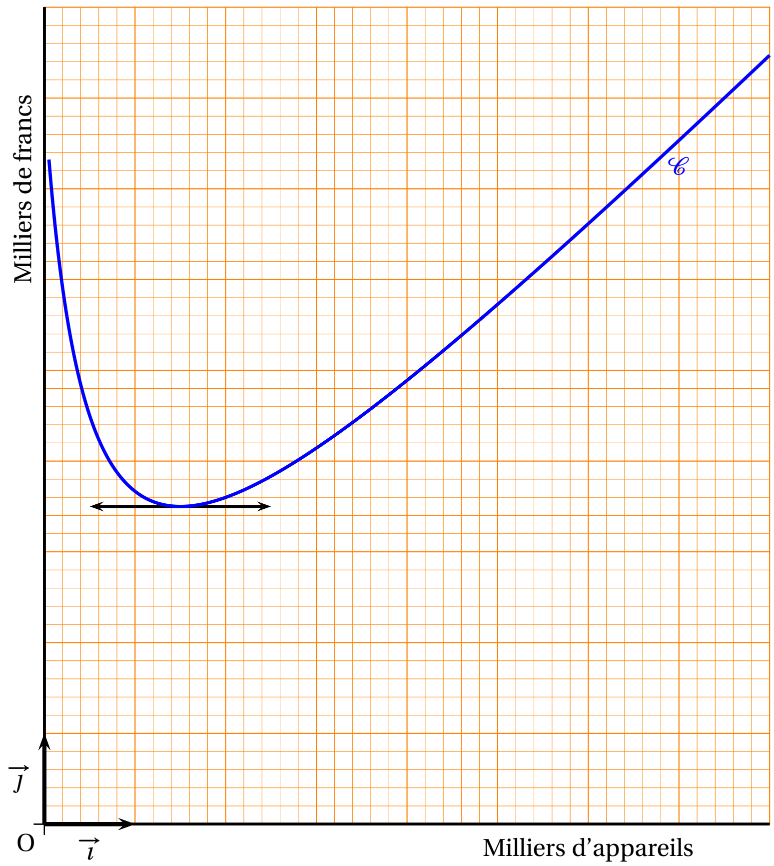
2. a. Pour quelle production, arrondie à la dizaine près, le coût moyen, par millier d'appareils, est-il minimum ?

b. Vérifier que, pour cette valeur approchée de la production, le coût moyen et le coût marginal ont la même valeur, à 5 francs près.

3. Le graphique donné ci-après est celui de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction M dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, où 2 cm représentent 1 000 appareils sur l'axe des abscisses et 2 cm représentent 1 000 F sur l'axe des ordonnées.

a. On note $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de la fonction C_m dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ précédent. Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ sur le document donné ci-après.

b. Par une lecture graphique que l'on expliquera, retrouver le résultat de la question **2. b.**.



Baccalauréat ES Métropole juin 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une université propose aux étudiants trois orientations et trois seulement : une filière A, une filière B et une filière C. Chaque étudiant de l'université est inscrit dans une des trois filières et une seule.
Les effectifs de la filière A sont le double de ceux de la filière B.
Les effectifs de la filière B sont le triple de ceux de la filière C.
On sait de plus que :

20 % des étudiants de la filière A sont des filles ;
30 % des étudiants de la filière B sont des filles ;
40 % des étudiants de la filière C sont des filles.

On choisit au hasard un étudiant de cette université.
On note A l'évènement « L'étudiant est inscrit dans la filière A ». De même pour B et C.
On note F l'évènement « L'étudiant est une fille » ;
G l'évènement : « L'étudiant est un garçon ».

1. Calculer les probabilités des évènements A, B, C ; on vérifiera que $p(B) = 0,3$.
2. Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A et soit une fille.
   Montrer que $p(F) = 0,25$.
3. Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A sachant que c'est une fille.
4. L'étudiant, choisi au hasard, n'est pas inscrit dans la filière A. Calculer alors la probabilité que ce soit une fille.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le prix de vente des terrains à bâtir dans la même commune rurale est donné par le tableau suivant :

Année	1980	1985	1987	1990	1995	1997	2000
Rang de l'année x_i	0	5	7	10	15	17	20
Prix du m^2 en francs y_i	58,8	60,9	62,1	67,5	71,7	73	73,8

1. Quelle est, en pourcentage, l'augmentation du prix du m^2 entre 1980 et 2000 ?
2. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal où 5 cm représentent 10 ans en abscisse, 5 cm représentent 10 francs en ordonnée.
3. Déterminer le point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
4. Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ à 0,01 près.
   On considère que ce coefficient justifie un ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de y en x, notée (D) (les coefficients sont arrondis à 0,01).
   Tracer (D).
5. Estimer à 1 millier de francs près le prix d'un terrain de 1 500 m^2 en 2003.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un club de sport propose deux types d'abonnement non permutables.
Formule A : une cotisation annuelle de 500 F à laquelle s'ajoute la première année seulement un droit d'entrée de 10 000 F.

Formule B : une cotisation annuelle initiale de 1 000 F qui augmente de 10 % par an. Dès la seconde année, pour fidéliser la clientèle, on effectue une réduction de 50 F sur la cotisation annuelle. Si C_n, est le montant, exprimé en francs, de la cotisation annuelle la n-ième année, on a $C_1 = 1000$, et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $C_{n+1} = 1,1C_n - 50$.

1. Déterminer la somme T_n versée au club de sport par membre pendant n années avec la formule A.
2. Soit (D_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $D_n = C_n + \alpha$ où α est un réel.
   Déterminer le réel α pour que la suite (D_n) soit une suite géométrique de raison 1, 1 et préciser le terme initial de la suite.
3. On suppose dans cette question que $\alpha = -500$.
   a. Exprimer D_n puis C_n en fonction de n.
   b. Soit S_n la somme versée au club par un membre pendant n années avec la formule B.
   Montrer que $S_n = 5000\,[(1,1)^n - 1] + 500n$.
   c. Quel nombre minimum d'années un membre doit-il cotiser pour que la formule A soit plus avantageuse que la formule B ?

PROBLÈME **11 points**

On donne les fonctions f et g, définies sur $[1~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 1,1x + \ln x - \ln(x+1), \quad g(x) = 1,1x + \frac{1}{x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

Partie A

1. Étudier les variations de f sur $[1~;~+\infty[$.
   Trouver la limite en $+\infty$ de $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.
   En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 1,1x$ est une asymptote de la courbe $(\mathscr{C})$. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).
3. Tracer $(\mathscr{C})$ et (D).

Partie B

1. Étudier les variations de g sur $[1~;~+\infty[$ et la limite de g en $+\infty$.
2. Vérifier que la droite (D) est une asymptote de la courbe $(\mathscr{C}')$.
   Quelle est la position de $(\mathscr{C}')$ par rapport à (D) ?
3. Tracer $(\mathscr{C}')$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$ et (D).
4. On pose $H(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln x$, pour tout x de $[1~;~+\infty[$.
   Calculer $H'(x)$; en déduire une primitive sur $[1~;~+\infty[$ de la fonction $i~:~x \mapsto g(x) - f(x)$.
5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^5 \left[g(x) - f(x)\right]\,\mathrm{d}x$.
   En donner une interprétation graphique.

Partie C

Les fonctions f et g données plus haut modélisent respectivement la quantité d'objets produits par une entreprise et la quantité d'objets commandés à cette entreprise.
Plus précisément, si t est la date exprimée en semaines, $f(t)$ est la quantité d'objets produits à la date t en milliers et $g(t)$ la quantité d'objets commandés à cette même date en milliers.

1. Lorsque l'on a $f(t) > g(t)$, on dit que « la demande est satisfaite à la date t ».
Démontrer que la demande n'est jamais satisfaite.

2. On admet que le nombre total d'objets, en milliers, dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates n et n' avec $n' > n$ est donné par $\displaystyle\int_n^{n'} \left[g(t) - f(t)\right]\,\mathrm{d}t$.
Donner, à un objet près, le nombre total d'objets dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates 1 et 5.

3. On considère que « le niveau de fabrication est suffisant » lorsque moins de 20 demandes d'objets ne sont pas satisfaites, c'est-à-dire lorsque l'on a : $g(t) - f(t) < 0,02$.
En admettant que $g - f$ est une fonction strictement décroissante sur $[1~;~+\infty[$, à partir de quelle date le niveau de fabrication est-il suffisant ?

Baccalauréat ES Polynésie juin 2001

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Toutes les réponses aux questions posées devront être soigneusement justifiées.
La courbe $(\mathscr{C})$ donnée sur l'annexe est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur [- 3 ; 3] dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. La courbe $(\mathscr{C})$ vérifie les quatre conditions suivantes :

- elle passe par l'origine O du repère et par le point A(- 3 ; 9) ;
- elle admet au point B d'abscisse 1 une tangente horizontale et elle admet la droite (OA) pour tangente en 0.

1. Quel est le coefficient directeur d la droite (OA) ?
2. L'un des trois schémas numérotés 1, 2 et 3 donnés en annexe est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de la fonction f. Indiquez le numéro de ce schéma en précisant les raisons de votre choix.
3. On suppose que f est définie sur $[-3\,;\,3]$ par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ où } a,\ b,\ c,\ d \text{ sont des réels.}$$

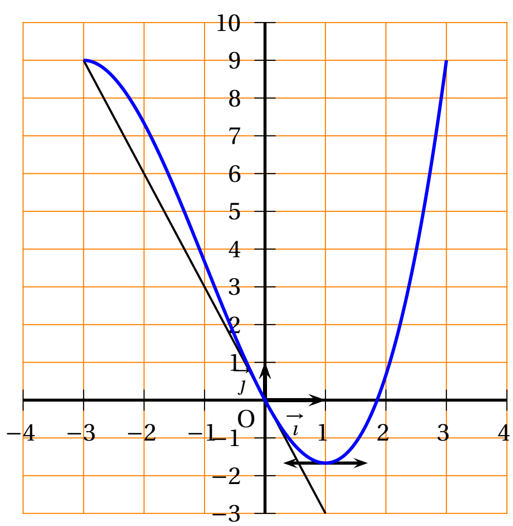
   a. Montrer en utilisant les quatre conditions de départ que :

$$a = \frac{1}{3},\ b = 1,\ c = -3,\ d = 0.$$

   b. On désigne par f'la fonction dérivée de la fonction f. Factoriser $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f sur $[-3\,;\,3]$.

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle [1 ; 2] et déterminer l'arrondi à une décimale de α.

Annexe



Courbe $(\mathscr{C})$ de f

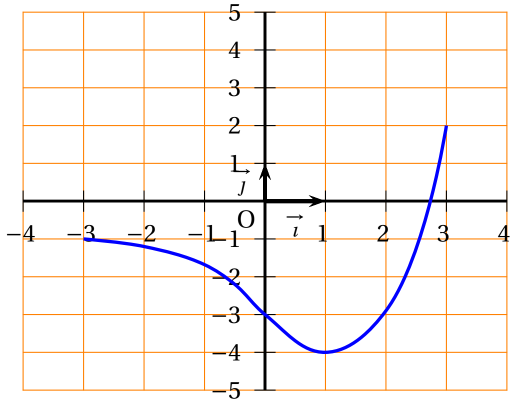


Schéma 1

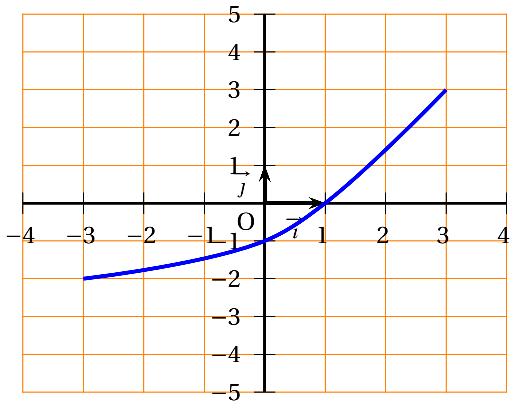


Schéma 2

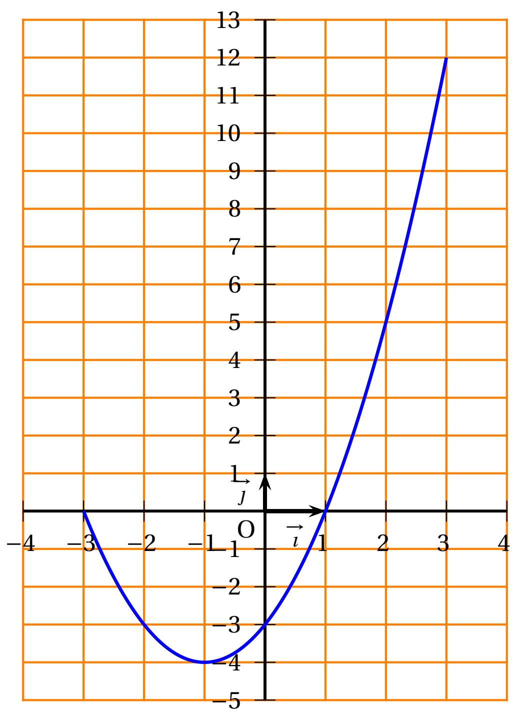


Schéma 3

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour tous évènements A et B on note :

— $\overline{A}$ l'évènement contraire de A;
— $P(A)$ la probabilité de l'évènement A;
— $P(A/B)$ ou $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

Un club de tennis comporte 500 adhérents : 300 hommes et 200 femmes. Le tennis en compétition est pratiqué par 90 hommes et 40 femmes. Les autres adhérents pratiquent ce sport uniquement pour le loisir. On choisit au hasard un adhérent. On note :

- H l'évènement : « L'adhérent est un homme »;
- F l'évènement : « L'adhérent est une femme »;
- C l'évènement : « L'adhérent pratique la compétition ».

1. a. Calculer les probabilités $P(H)$, $P(F)$ et $P_F(C)$.

b. Décrire l'évènement $C \cap F$ et calculer sa probabilité.

c. Justifier l'égalité suivante : $P(C) = \dfrac{13}{50}$.

d. L'adhérent choisi pratique la compétition. Quelle est la probabilité que cet adhérent soit une femme?

2. Chaque adhérent doit payer une cotisation annuelle de 3 000 F s'il pratique le tennis en compétition et de 2 500 F dans le cas contraire. De plus, pour la saison 2000-2001 une réduction exceptionnelle de 10 % est consentie aux femmes pratiquant la compétition.

On appelle X la variable aléatoire égale au montant de la cotisation payée par l'adhérent choisi pour la saison 2000-2001.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Monsieur A emprunte 40 000 F à un taux de 5 %. Il désire effectuer chaque année, à la date anniversaire de l'obtention du prêt, des remboursements constants de 6 000 F, sauf éventuellement la dernière année où le remboursement pourra être moindre. Ces 6 000 F comprennent le remboursement des intérêts sur le capital dû et un amortissement du capital.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre p d'années nécessaires pour effectuer le remboursement de ce prêt.

Pour tout entier naturel n, on désigne par C_n le capital, exprimé en francs, restant dû après le n-ième remboursement. On a donc : $C_0 = 40000$ et $C_1 = 36000$.

1. a. Montrer que $C_2 = 31\,800$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n tel que $0 \leqslant n < p$, l'égalité suivante est vraie :

$$C_{n+1} = 1,05C_n - 6000.$$

2. Pour tout entier naturel n tel que $0 \leqslant n < p$ on pose $U_n = C_n - \alpha$ où α est un réel.

a. Déterminer α pour que les nombres U_n soient les termes successifs d'une suite géométrique de raison 1,05 dont on déterminera le premier terme.

b. En déduire, dans ce cas, l'expression de U_n en fonction de n, puis celle de C_n en fonction de n.

3. Déterminer le plus petit entier n tel que $C_n < 6\,000$.
On appelle cet entier n_0. Calculer alors C_{n_0}, et le montant du (n_0+1)-ième remboursement.
Quelle a donc été la durée p du remboursement? Quel est le montant du remboursement total? (Les résultats seront arrondis au centime.)

PROBLÈME **10 points**

Partie A
⋆ **Étude de deux fonctions**

On considère deux fonctions f et g définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\mathrm{e}^x + 1}{3} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{8}{2\mathrm{e}^x - 1}.$$

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Déterminer la limite de g en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
b. Étudier les variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$.
c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f et par (Γ) celle de g, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ [unité graphique 2 cm].
a. Déterminer par le calcul les coordonnées du point I commun à $(\mathscr{C})$ et à (Γ).
b. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
c. Tracer (T), $(\mathscr{C})$ et (Γ) dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Faire figurer le point I sur le schéma.

4. **a.** Montrer que $g(x) = -8 + 16\dfrac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x - 1}$ sur $[0\,;\,+\infty[$. En déduire une primitive G de g sur $[0\,;\,+\infty[$.
b. On considère l'ensemble des points du plan situés entre (Γ), l'axe $x'x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 5$. Hachurer sur le graphique cette partie du plan et calculer son aire en cm^2. On en donnera une valeur exacte, puis l'arrondi du résultat à 10^{-2}.

Partie B

⋆ **Application économique**

1. *Prix d'équilibre*
Les fonctions f et g précédemment définies dans la **partie A** sont les fonctions d'offre et de demande de la vente d'un produit liquide sur un marché.
Plus précisément :
• $f(v)$ est le prix de vente unitaire proposé par les producteurs du secteur pour un volume v de ce produit;
• $g(v)$ désigne le prix unitaire accepté par les consommateurs pour la même quantité v de ce produit.
Le volume v est exprimé en m^3 et les prix en milliers de francs.
a. Comment peut-on interpréter, d'un point de vue économique, le sens de variation de la fonction g?
b. Sur un marché en concurrence pure et parfaite, le prix p_0 qui se forme sur le marché correspond à l'égalité entre l'offre et la demande; p_0 est le prix d'équilibre. Déterminer le volume v_0 correspondant du liquide arrondi à 10^{-3}, puis déterminer p_0.

2. *Surplus des consommateurs* Tous les consommateurs qui étaient prêts à acheter à un prix supérieur au prix d'équilibre réalisent un gain fictif appelé surplus des consommateurs. On admet que ce gain est mesuré par

$\mathrm{S}_c = \displaystyle\int_0^{v_0} g(v)\,\mathrm{d}v - p_0 v_0$ en milliers de francs.

a. Placer sur le graphique les points $\mathrm{E}(v_0, 0)$ et $\mathrm{F}(0, p_0)$. Donner une interprétation graphique du surplus des consommateurs.

b. Calculer une valeur exacte du surplus des consommateurs, puis en donner l'arrondi au franc.

Baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2001

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne le pourcentage de conscrits (jeunes gens ayant 18 ans dans l'année) qui sont en surpoids ou obèses.

Année	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pourcentage y_i	11,5	11,7	12,5	13,5	13,3	14,5	15,8	15,5	15,6	16,5

(Enquête du laboratoire espace, santé et territoire, université de Paris X – Nanterre)

Les résultats des calculs seront arrondis à 10^{-2} près.
Les coordonnées des points seront arrondies à 10^{-1} près.

1. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à la série statistique dans un repère orthonormé. L'origine du repère correspond au point de coordonnées (0 ; 10).
   G désigne le point moyen de ce nuage. Calculer ses coordonnées (x_0 et y_0).
   Placer ce point sur le graphique.
2. **a.** Trouver une équation de la droite (D) obtenue par la méthode des moindres carrés.
   b. Tracer cette droite (D) sur le graphique précédent et vérifier que le point G appartient à cette droite.
3. **a.** Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre $\rho = \dfrac{\text{cov}(x\ ;\ y)}{\sigma_x \sigma_y}$.
   b. Calculer la somme S des carrés des résidus correspondant à cet ajustement.
   c. Vérifier que $\dfrac{\text{S}}{\sum\left(y_i - y_0\right)^2} = 1 - \rho$.
4. En utilisant les résultats précédents donner une estimation du pourcentage de jeunes gens en surpoids ou obèses ayant 18 ans en 2001.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

Le système éducatif français est composé du 1^er^ degré (écoles maternelles et primaires) et du 2^e^ degré (collèges et lycées).
Le personnel assurant le fonctionnement est composé de personnel enseignant et de personnel non enseignant (administration, service...).
À la rentrée 1999, on a les informations suivantes :

- 64 % du personnel est enseignant
- 40 % du personnel est dans le 1er degré
- 39 % du personnel enseignant est dans le 1er degré.

On utilisera les notations suivantes pour désigner les évènements :

E : « être enseignant »
$\overline{E}$: « ne pas être enseignant »
$D1$: « être dans le 1er degré »
$D2$: « être dans le 2e degré »

On choisit au hasard une personne ; après justification, les résultats des calculs seront donnés sous forme décimale à 10^{-2} près.

1. Quelle est la probabilité pour un enseignant d'être dans le 1er degré ?
2. Quelle est la probabilité pour un enseignant d'être dans le 2e degré ?

3. Quelle est la probabilité pour une personne du système éducatif d'être enseignant du 1er degré ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être enseignante, sachant qu'elle est employée dans le 1er degré ?
5. Quelle est la probabilité pour une personne de ne pas être enseignante, sachant qu'elle est employée dans le 2e degré ?

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

Un couple dépose au premier janvier de l'an 2000, une somme de 5 000 euros sur un compte rémunéré au taux annuel de 6 %.
Par la suite, ce couple possède une capacité d'épargne annuelle de 3 000 euros, épargne versée tous les 1er janvier sur le compte précédent.
Les intérêts sont capitalisés au 31 décembre de chaque année.
On note S_n la somme dont le couple dispose au 1er janvier de l'année $(2000 + n)$.

1. Calculer les valeurs de S_0, S_1, S_2.
2. Montrer que l'expression de S_{n+1}, en fonction de S_n est donnée par la relation :

$$S_{n+1} = 1,06S_n + 3000.$$

3. On pose $T_n = S_n + 50000$.
   a. Montrer que (T_n) est une suite géométrique de raison 1,06.
   b. Exprimer T_n puis S_n en fonction de n.
   c. Au 1er janvier de quelle année le couple possédera-t-il une épargne supérieure à 50 000 euros ?

PROBLÈME **10 points**
Une entreprise fabrique un produit en quantité x.
Le coût total de ce produit est donné par

$$C_{\text{T}}(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{9}{2}\ln(x+1) \quad \text{pour} \quad x \in [0\,;\,5].$$

Les coûts sont exprimés en millions d'euros et x est exprimée en milliers de tonnes.

Partie I - Étude d'une fonction auxiliaire f

On considère la fonction f définie sur $[0;5]$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{9x}{x+1} - 9\ln(x+1).$$

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que l'on peut écrire

$$f'(x) = \frac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}.$$

   Les détails du calcul de f' devront figurer sur la copie.
2. Établir le tableau de variations de f sur $[0;5]$.
3. En déduire que f s'annule sur $[0;5]$ pour une valeur unique α.
4. Déterminer un encadrement à 10^{-3} près de α. (On précisera la méthode utilisée.)

5. Déduire des résultats précédents le signe de f sur $[0\,;5]$.

Partie II – Étude du coût moyen

La fonction coût moyen C_m est définie sur $[0\,;5]$ par :

$$C_m(x) = \frac{C_{\mathrm{T}}(x)}{x} = \frac{x}{4} + \frac{9}{2} \times \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

1. Calculer $C'_m(x)$ et vérifier que l'on peut écrire $C'_m(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2}$ où f est la fonction auxiliaire de la question **1** de la partie **I**.
Les détails du calcul de C'_m devront figurer sur la copie.

2. Étudier le sens de variation de C_m sur $[0\,;5]$.

3. Pour quelle production, exprimée en tonnes, à une unité près, le coût moyen est-il minimal ? Quel est alors ce coût ?

Baccalauréat ES Métropole septembre 2001

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Sur une portion de 6 kilomètres de boulevard périphérique, le trafic peut être perturbé entre 7 h et 11 h du matin.
Au début de cette portion, un panneau indique, à chaque instant, le temps de parcours d'un véhicule sur ces 6 kilomètres.
On modélise l'évolution du trafic à l'aide de la fonction f définie sur $[1 ; 5]$ par

$$f(t) = 8\mathrm{e}\frac{\ln t}{t} + 4 \quad \text{où e est égal à } \exp(1).$$

Le nombre $f(t)$ est alors le temps de parcours indiqué sur le panneau et exprimé en minute, à un instant t exprimé en heure. Il est 7 h du matin à l'instant $t = 1$.
Le panneau indique « trafic fluide » s'il faut moins de 6 minutes pour parcourir les 6 kilomètres, il indique « trafic perturbé » s'il faut plus de 11 minutes.

1. **a.** Étudier les variations de f sur $[1 ; 5]$ et dresser son tableau de variations.

   b. En déduire que le trafic n'est pas fluide à 7 h 10 min et qu'il ne l'est plus jusqu'à 11 h.

2. Soit g la fonction définie sur $[1 ; 5]$ par

$$g(t) = (\ln t)^2.$$

   a. Calculer $g'(t)$ et en déduire une primitive de f sur $[1 ; 5]$.

   b. Déterminer, à une minute près, la valeur moyenne du temps nécessaire pour parcourir les 6 kilomètres, entre 7 h et 11 h du matin.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Une personne qui dispose de 20 € souhaite miser sur « pair » ou « impair » avant le lancer d'un dé.
La mise est doublée si on gagne, sinon elle est perdue.
Au premier lancer, elle mise 10 € sur « impair », et on suppose que la probabilité d'obtenir « pair » est la même que celle d'obtenir « impair ».
En revanche, aux lancers suivants, elle mise toute la somme qui lui reste ou s'arrête s'il ne lui reste plus rien. Elle décide de jouer au maximum trois fois.

1. Dans cette question, on suppose que la personne mise chaque fois sur « impair » et qu'à chaque fois la probabilité d'obtenir « pair » est égale à celle d'obtenir « impair ».
   On note X la somme qui lui reste à la fin.

   a. Illustrer la situation par un arbre pondéré.

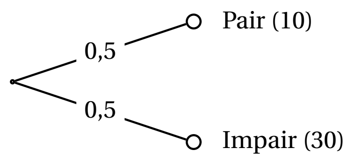
   b. Déterminer la loi de probabilité associée à l'ensemble des valeurs prises par X ainsi que l'espérance de cette loi.

2. Pour cette question, on a constaté après une étude statistique qu'après un « impair », la probabilité d'obtenir de nouveau un « impair » est de $0,4$, et qu'après un « pair », la probabilité d'obtenir de nouveau un « pair » est de $0,45$.
   Le sachant, la personne mise, à partir du deuxième lancer, sur la solution la plus probable.
   On note Y la somme qui lui reste à la fin.

   a. Illustrer la situation par un arbre pondéré.

b. Déterminer la loi de probabilité associée à l'ensemble des valeurs prises par Y ainsi que l'espérance de cette loi.

Remarque : *Dans les deux cas décrits par les deux questions, le premier niveau de l'arbre pondéré est donc le suivant où la somme qui reste à la personne est mise entre parenthèses :*



EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 7$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 6}{5}.$$

1. Calculer $u_1,\ u_2,\ u_3$.

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = u_n - 2.$$

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n, et en déduire que :

$$u_n = 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 2.$$

c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3. Illustration graphique

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{2x+6}{5}.$$

a. Tracer la représentation graphique D de f, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

b. Placer, sur l'axe des abscisses, le point P_0 d'abscisse u_0. En utilisant les droites D et Δ, construire les points $\text{P}_1,\ \text{P}_2,\ \text{P}_3$ de l'axe $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\right)$ d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3.

À quoi correspond, sur ce graphique, l'abscisse du point d'intersection des deux droites D et Δ ?

PROBLÈME **10 points**

Première partie

Dans une commune les habitants paient un impôt en fonction de leurs revenus.
La population est alors classée du plus faible impôt au plus fort.
Le tableau suivant indique que $(100y)\,\%$ de la recette fiscale due à cet impôt est payée par $(100x)\,\%$ de la population.

Ainsi le couple (0,7 ; 0,25) signifie que 70 % de la population paie 25 % de la recette fiscale.

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	0	0,025	0,04	0,06	0,1	0,16	0,25	0,4	0,65	1

1. **a.** Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i,\ y_i\right)$.
   Vous prendrez un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

   b. Un ajustement affine entre les variables statistiques x et y vous paraît-il approprié ?

2. *Dans cette question le détail des calculs n'est pas demandé.*
   On considère la variable statistique $z = \ln(y)$ pour les valeurs de y strictement positives.

   a. Recopier et compléter le tableau suivant où z_i sera arrondi à 0,01.

x_i	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$z_i = \ln y_i$	$-3,69$								

   b. Donner une équation de la droite obtenue comme ajustement affine par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = ax + b$ où a et b seront arrondis à 0,1.

   c. En déduire une relation entre y et x de la forme $y = \alpha\exp(ax)$ où α sera arrondi à 0,01.

   d. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant des valeurs arrondies à 0,01.

x_i	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\alpha\exp(ax_i)$									

   Comparer avec le tableau initial et donner un bref commentaire.

Deuxième partie

Soient f et g les fonctions définies sur [0 ; 1] par

$$f(x) = 0,01\exp(4,6x) \quad \text{et} \quad g(x) = x - f(x).$$

On note $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f et (Δ) la droite d'équation $y = x$ dans le repère de la première partie.

1. **a.** En utilisant $f(x)$ comme ajustement de la variable statistique y de la première partie, déterminer à 1 % près le pourcentage de la population payant la moitié de la recette fiscale.

   b. Étudier les variations de f sur [0 ; 1].

   c. Tracer $(\mathscr{C})$ et (Δ) sur le graphique de la première partie.

2. **a.** Résoudre l'équation $f'(x) = 1$ sur [0 ; 1] ; la solution β sera arrondie à 0,01.
   Tracer la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 3.

   b. Résoudre l'inéquation $f'(x) > 1$ sur [0 ; 1].

   c. Donner une relation entre $g'(x)$ et $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de g sur [0 ; 1].

   d. Pour quelle valeur de x la fonction g atteint-elle son maximum ?
   Interpréter graphiquement ce résultat.

Baccalauréat ES Polynésie septembre 2001

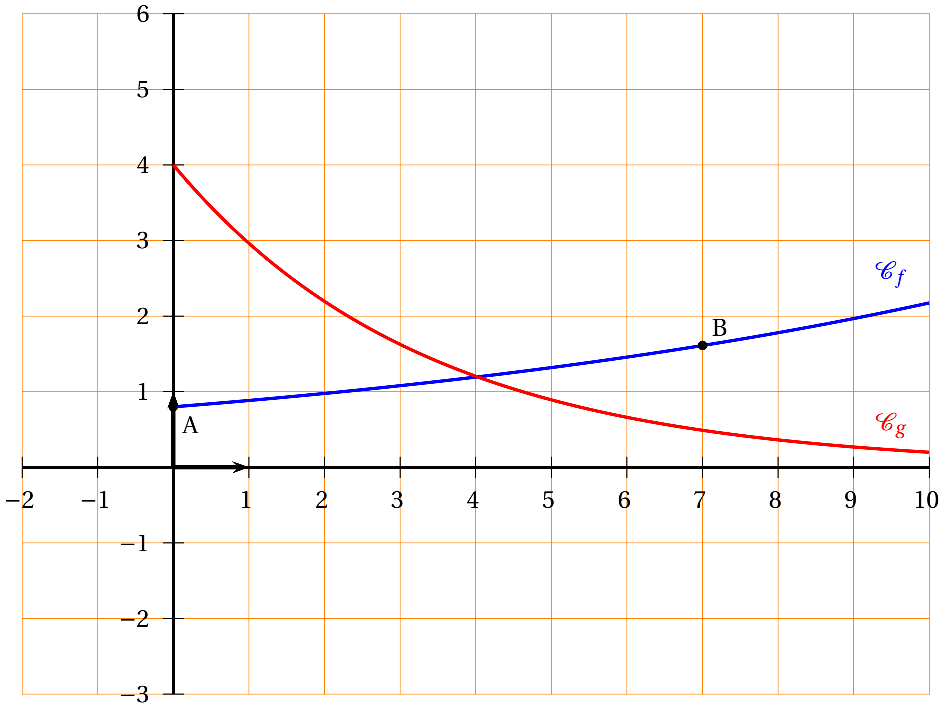
EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Sur le graphique ci-après, la courbe $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{ax}, \text{où } a \text{ et } k \text{ sont deux constantes réelles.}$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B de coordonnées : A $(0 ; 0{,}8)$ et B $(7 ; 1{,}6)$.
La courbe $\mathcal{C}_g$ est la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0 ; 10]$ par :

$$g(x) = 4\mathrm{e}^{-0{,}3x}.$$



1. **a.** Déterminer les nombres a et k à 10^{-1} près.
   b. Justifier le sens de variation de g.
   c. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ dans $[0 ; 10]$.
2. Dans une étude de marché, pour un produit donné, on a modélisé l'offre par la fonction f et la demande par la fonction g en fonction du prix unitaire x par :

$$f(x) = 0{,}8\mathrm{e}^{0{,}1x} \quad \text{et} \quad g(x) = 4\mathrm{e}^{-0{,}3x}.$$

   Le prix d'équilibre correspond à la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
   a. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ dans $[0 ; 10]$.
   b. Donner la valeur approchée, notée x_e à 10^{-1} près par défaut du prix d'équilibre.
3. **a.** Pour x appartenant à $[0 ; 9]$ montrer que le quotient $\dfrac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$ est constant.
   On donnera une valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.

b. En déduire le taux d'accroissement, exprimé en pourcentage, de l'offre quand le prix unitaire augmente d'une unité.

4. Le prix est fixé égal au prix x_e. On augmente ce prix de 1 % ; déterminer alors le pourcentage t % de variation de la demande (on donnera un arrondi de t à 10^{-1}).

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Une maison d'édition a ouvert le 1er janvier 2002, sur Internet, un site de vente par correspondance. Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de livres vendus par mois en milliers.

Mois	janvier 2002	janvier 2003	juillet 2003	janvier 2004	avril 2004
Rang du mois x_i	1	13	19	25	28
Nombre de livres en milliers y_i	1,2	2,5	3,5	5,1	6

1. Représenter le nuage de points $\left(x_i\ ;\ y_j\right)$ dans un repère (unités graphiques : 1 cm représente deux mois en abscisse et 1 cm représente 500 livres en ordonnée).

2. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel plutôt qu'un ajustement affine. Pour cela, on pose $z_i = \ln\left(y_i\right)$.
Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant où z_i est arrondi à 10^{-3}.

Rang du mois x_i	1	13	19	25	28
$z_i = \ln\left(y_i\right)$			1,253		

3. *Dans cette question, les résultats numériques pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice, sans justification.*
Écrire une équation de la droite d'ajustement affine D de z en x par la méthode des moindres carrés, (les coefficients seront arrondis à 10^{-2}).

4. Déduire de la question précédente une relation entre y et x de la forme $y = a\mathrm{e}^{kx}$.
Les coefficients a et k seront arrondis à 10^{-2}.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On considère un groupe de 500 villes d'un pays.
Chaque année les impôts locaux d'une ville peuvent augmenter ou ne pas augmenter.
n étant un entier naturel, on note :

- a_n la probabilité qu'une ville ait augmenté les impôts locaux l'année n ;
- b_n la probabilité qu'une ville n'ait pas augmenté les impôts locaux l'année n ;
- P_n la matrice $(a_n\ \ b_n)$ traduisant l'état probabiliste à l'année n.

On a constaté statistiquement que tous les ans :

- 20 % des villes qui ont augmenté les impôts l'année précédente les augmentent l'année suivante ;
- 90 % des villes qui n'ont pas augmenté les impôts l'année précédente les augmentent l'année suivante.

1. a. Chaque année, une ville peut être à l'état A « les impôts locaux ont augmenté » ou à l'état B « les impôts locaux n'ont pas augmenté ».
Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

b. Vérifier que la matrice M de ce graphe est $\begin{pmatrix}0,2 & 0,8\\0,9 & 0,1\end{pmatrix}$

2. On a constaté qu'en 2002, les impôts locaux ont été augmentés dans 300 villes et n'ont pas été augmentés dans 200 villes.

   On note a_0 et b_0 les fréquences correspondantes.

   a. Déterminer l'état initial $P_0 = (a_0 \quad b_0)$.

   b. Calculer P_1. En déduire le nombre de villes qui augmenteront les impôts en 2003 et le nombre de celles qui ne les augmenteront pas en 2003.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n :

$$a_n + b_n = 1 \quad \text{et} \quad P_{n+1} = P_n \times M.$$

   Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.

4. Soit $P = (x \quad y)$ l'état stable. Expliquer ce que représentent x et y et déterminer x et y en utilisant les résultats précédents.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,12]$ par

$$f(x) = \frac{5\ln x}{x^2}.$$

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{5(1-2\ln x)}{x^3}$.
2. En déduire les variations de f sur $[2\,;\,10]$ puis dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique sur $[2\,;\,10]$ notée α puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

PARTIE B

Une ville décide de promouvoir les déplacements à vélo afin de lutter contre la pollution et a acheté un parc de 1 000 vélos qu'elle loue à la journée. On constate que la demande est fonction du prix de location et que cette demande est modélisée par la fonction f donnée ci-dessus dans la partie A définie sur $[2\,;\,10]$ où x désigne le prix de location d'un vélo pour la journée et $f(x)$ la demande en milliers de vélos.

1. En utilisant la partie A, indiquer le prix à partir duquel la demande sera inférieure à 500 vélos.

   On donnera la valeur au centime d'euro près.
2. On suppose que le prix de location est fixé à 3 euros. Calculer le pourcentage de variation de la demande à 10^{-2} près lorsque le prix augmente de 0,03 euros.
3. Le pourcentage de variation de la demande lorsque le prix augmente de 1 % est appelé « élasticité de la demande par rapport au prix ».

   On admet qu'une valeur approchée de ce nombre est $x\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. On note $\text{E}(x) = x\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

   a. Montrer que $\text{E}(x) = \dfrac{1-2\ln(x)}{\ln(x)}$.

   b. Calculer E(3) arrondi à 10^{-2}. Comparer ce résultat avec celui de la question 2.

PARTIE C

1. Calculer la recette lorsque le prix est égal à 3 € (on donnera le résultat à l'euro près).

2. Exprimer en euros la recette $R(x)$ en fonction du prix x.
3. Montrer que $R'(x) = 5\,000 \times \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

   Étudier les variations de R sur $[2\,;\,10]$.
4. En déduire le prix de location permettant d'obtenir la recette maximum et déterminer cette recette maximum.

   Le prix de la location sera arrondi au centime d'euro près et la recette à l'euro près.

∽ Baccalauréat ES Amérique du Sud décembre 2001 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On donne le tableau suivant indiquant l'évolution du nombre de centenaires en France depuis le début du siècle :

années	1911	1931	1946	1962	1970	1980	1992	1995	2000
x_i	11	31	46	62	70	80	92	95	100
nombre de centenaires y_i	118	241	261	440	1 273	3 112	4 323	6 060	9 264

source : INSEE

Tous les résultats statistiques seront donnés à l'aide de la calculatrice.
Le détail des calculs n'est pas demandé.

1. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points $M(x_i\ ;\ y_i)$: unités graphiques : 1 cm pour 10 ans sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 500 personnes sur l'axe des ordonnées.

2. On constate, au vu de ce nuage, qu'un ajustement linéaire ne semble pas le mieux adapté.
On s'intéresse alors à la série $(x_i,\ \ln y_i)$.
On appelle z_i une valeur approchée de $\ln y_i$ par défaut à 10^{-4} près.

a. Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i	11	31	46	62	70	80	92	95	100
z_i	4,770 6	5,484 7	5,564 5						9,133 8

Pour la série $(x_i\ ;\ z_i)$ du tableau précédent, donner le coefficient de corrélation linéaire (on en donnera une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près) et justifier qu'un ajustement, linéaire est envisageable.

b. Déterminer l'équation $z = ax + b$ de la droite D de régression de z en x par la méthode des moindres carrés. Les nombres a et b seront donnés à 10^{-5} par défaut.

3. Si l'évolution restait la même, estimer le nombre de centenaires en France en 2015.

EXERCICE 2 **6 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Des calculs statistiques effectués sur les élèves de terminale d'un lycée, concernant l'année scolaire 1999-2000. ont donné les renseignements suivants :
en juin 2000, les élèves de terminale se répartissaient ainsi : 45 % en S, 25 % en L, et 30 % en ES. Les taux, arrondis, de réussite au baccalauréat ont été les suivants :

S	L	ES
87 %	85 %	79 %

À la fin du mois de décembre 2000, sur l'ensemble des élèves, qui étaient en terminale dans ce lycée en juin de la même année, on en choisit un au hasard.
Dans la suite de l'exercice, on appelle :

S l'évènement « l'élève choisi était en S l'année scolaire précédente »,
L l'évènement « l'élève choisi était en L l'année scolaire précédente »,
E l'évènement « l'élève choisi était en ES l'année scolaire précédente »,
R l'évènement « l'élève choisi a été reçu au baccalauréat ».

1. a. Donner $p(E)$, $p(R/E)$ et montrer que $p(R \cap E) = 0,237$.

b. Calculer $p(R \cap S)$ et $p(R \cap L)$.

c. En déduire que la probabilité que cet élève choisi au hasard ait été reçu au baccalauréat est $0,841$.

2. Lorsque les élèves, **reçus au baccalauréat**, sont venus au lycée chercher leur diplôme, on s'est renseigné sur leur poursuite d'études, et on a obtenu les résultats suivants :

élèves issus de	S	L	ES
poursuite d'études en faculté	40 %	60 %	40 %

On appelle :

F l'évènement « l'élève choisi est en faculté »,
E' l'évènement $R \cap E$,
L' l'évènement $R \cap L$,
S' l'évènement $R \cap S$.

a. Donner $p(F/E')$.

b. Calculer $p(F \cap E')$.

c. Montrer que la probabilité que l'élève choisi soit en faculté est 0,378 9.

3. À la même date, on choisit, toujours au hasard, un élève qui se trouvait en terminale de ce lycée l'année scolaire précédente et **qui se trouve maintenant en faculté**.

a. Pourquoi les évènements $F \cap E'$ et $F \cap E$ sont-ils les mêmes ?

b. Calculer la probabilité que l'élève choisi soit issu de terminale ES ? (En donner une valeur approchée par excès à 10^{-4} près).

EXERCICE 2 **6 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Des adolescents (5 garçons et 7 filles) passent ensemble des vacances.
Ils décident de tirer au sort deux d'entre eux chaque jour pour former une équipe chargée d'effectuer les courses.

1. *Pour le tirage au sort fait le premier jour, on donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.*

a. Combien d'équipes différentes peuvent-ils obtenir par ce tirage au sort ?

b. Calculer la probabilité que l'équipe soit constituée de deux filles.

c. Montrer que la probabilité que l'équipe soit mixte est $\dfrac{35}{66}$.

Dans les questions suivantes, les résultats seront donnés sous forme décimale : valeurs approchées par défaut à 10^{-4} *près.*

2. On suppose dans cette question que les vacances durent 6 jours. Ils recommencent chaque jour le tirage au sort dans les mêmes conditions (indépendamment des résultats des jours précédents).

a. Calculer la probabilité que le sort désigne des équipes mixtes exactement quatre fois.

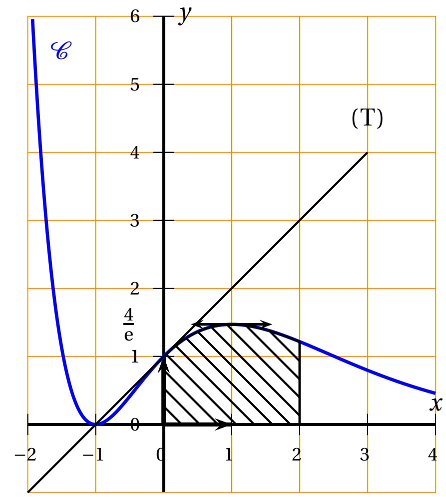
b. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois une équipe mixte.

3. Quelle durée minimale doit avoir leur séjour pour que la probabilité que les courses soient effectuées au moins une fois par deux adolescents de sexe différent dépasse 0,999 ?

PROBLÈME **8 points**

Partie A :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. Sur le graphique ci-contre, la courbe ($\mathscr{C}$) représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite (T) est la tangente à la courbe au point A d'abscisse 0.

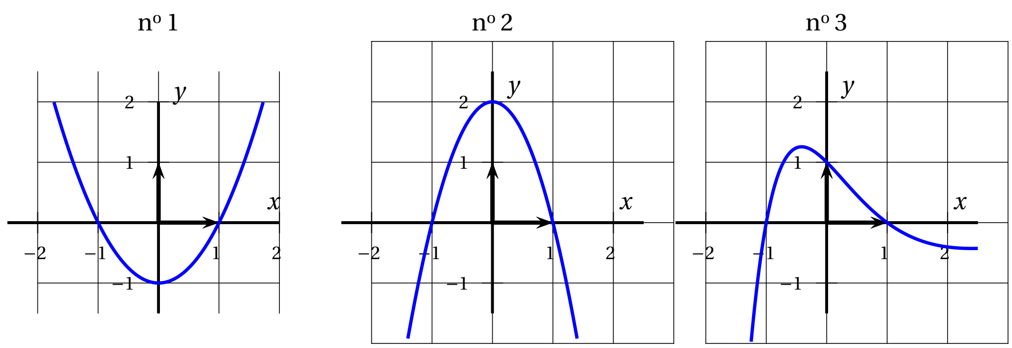


1. À partir du graphique, reproduire et compléter le tableau suivant :

x	-1	0	1
$f(x)$			
$f'(x)$			

Justifier les valeurs de $f'(-1)$ et $f'(0)$.

2. La fonction f a pour dérivée une fonction f' dont la courbe est l'une des trois suivantes. Indiquer laquelle en justifiant votre réponse.



3. Expliquer graphiquement pourquoi l'aire de la partie hachurée, exprimée en unités d'aire, est un nombre compris entre 2 et $\dfrac{8}{e}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 + 2x + 1\right)e^{-x}.$$

1. Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) \geqslant 0$.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
Déterminer alors la limite de f en $+\infty$.
Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de f ? Si oui préciser laquelle.

3. a. Montrer que la dérivée de f est définie par $f'(x) = (-x^2+1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier alors les variations de f suivant les valeurs de x. Dresser le tableau de variations de f.

4. a. Montrer que, sur l'intervalle $[1\,;\,3]$, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α unique.

b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. En fait la représentation graphique de la fonction f est la courbe $(\mathscr{C})$ dessinée dans la **partie A**.

a. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \left(-x^2 - 4x - 5\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

Calculer $g'(x)$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée par excès à 10^{-2} près.

c. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie décembre 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne la dépense de consommation finale des ménages français en biens d'équipement pour les années 1993 à 1998.

Année	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Dépense y_i en milliards de francs	34,6	35,8	18,8	40,5	41,5	46,1

(Source INSEE, Comptes Nationaux)

Le détail des calculs statistiques, à effectuer à la machine, n'est pas demandé.

1. **a.** Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ en prenant comme unités graphiques : 2 cm pour 1 rang en abscisses et 1 cm pour 1 milliard de francs en ordonnées, en faisant débuter la graduation à 30 sur l'axe des ordonnées.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point sur le graphique.

   On veut réaliser un ajustement affine de ce nuage de points afin d'obtenir une prévision pour l'année 1999 de la dépense des ménages français en biens d'équipement.

2. Dans cette question on utilise la méthode d'ajustement dite de la droite de Mayer.

   a. On désigne par G_1 le point moyen des trois premiers points (M_1, M_2 et M_3) du nuage et par G_2 le point moyen des trois derniers points (M_4, M_5 et M_6) du nuage.

   Calculer les coordonnées de G_1 et G_2 puis placer ces deux points sur le graphique.

   b. Démontrer que l'équation réduite de la droite (G_1G_2) est $y = 2,1x + 32,2$.

   Tracer (G_1G_2) sur le graphique.

   c. Calculer la prévision pour l'année 1999 de la dépense des ménages français en biens d'équipement obtenue en utilisant la droite (G_1G_2).

3. Dans cette question, on utilise la méthode des moindres carrés.

   a. Soit D la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés ; elle a pour équation réduite $y = 2,18x + b$.

   Justifier que $b = 31,92$ en utilisant le point moyen G.

   Tracer D sur le graphique.

   b. Calculer la prévision pour l'année 1999 de la dépense des ménages français en biens d'équipement obtenue en utilisant la droite D.

4. Le montant réel de la dépense pour l'année 1999 a été de 48,8 milliards de francs.

   Commenter, au vu de cette donnée, les prévisions obtenues par les deux méthodes d'ajustement envisagées précédemment.

EXERCICE 2 **6 points**

Enseignement obligatoire

Une entreprise fabrique un article qui doit répondre à des normes précises. On considère que 8 % des articles produits ne sont pas conformes aux normes. Un test de contrôle en fin de fabrication est censé repérer les articles non conformes. Cependant le test comporte une certaine marge d'erreur ; une étude a établi que

- 5 % des articles conformes aux normes sont refusés par le test ;
- 10 % des articles non conformes aux normes sont acceptés par le test.

On considère un article pris au hasard au moment de passer le test.

On note :

C l'évènement « l'article est conforme aux normes » ;
T l'évènement « l'article est accepté par le test ».
$\overline{C}$ et $\overline{T}$ désignent les évènements contraires respectifs de C et T.
La probabilité d'un évènement E est notée $p(E)$; la probabilité conditionnelle de E sachant que F est réalisé est notée $p_F(E)$.

1. **a.** Déduire des données les probabilités $p(C)$, $p\left(\overline{C}\right)$, $p_C(T)$, $p_{\overline{C}}(T)$, $p_C\left(\overline{T}\right)$ et $p_{\overline{C}}\left(\overline{C}\right)$ (on pourra faire un arbre).
   b. Calculer $p(T \cap C)$ et $p\left(T \cap \overline{C}\right)$. En déduire que $p(T) = 0,882$.
   c. Quelle est la probabilité que le contrôle donne un résultat erroné ?
2. Le coût de fabrication d'un article est 80 F.
   Tout article refusé par le test est détruit.
   Chaque article accepté par le test est mis sur le marché et vendu 120 F mais lorsqu'un tel article n'est pas conforme aux normes, l'entreprise doit rembourser 140 F au client (prix d'achat plus 20 F de frais de port) et l'article litigieux est détruit.
   Soit X le nombre indiquant le bénéfice ou la perte correspondant à un article choisi au hasard. L'ensemble des valeurs de X est : $\{+40\ ;\ -80\ ;\ -100\}$.
   a. Exprimer les évènements $(X = 40)$, $(X = 80)$ et $(X = -100)$ en utilisant C, $\overline{C}$, T et $\overline{T}$.
   b. Donner la loi de probabilité associée à ces trois valeurs.
   c. Calculer l'espérance de cette loi. Quelle interprétation peut-on en donner ?

EXERCICE 2 **6 points**
Enseignement de spécialité

Dans un certain milieu professionnel M, toute personne est tenue de posséder un agenda et de le renouveler chaque année. On supposera qu'aucune personne n'achète plus d'un agenda.
Deux fournisseurs, désignés respectivement par a et b, se partagent le marché des agendas dans le milieu M (donc tout individu faisant partie de M se fournit soit auprès de a, soit auprès de b).
On cherche à prévoir les parts de marché futures de a et b en faisant l'hypothèse que d'une année sur l'autre :

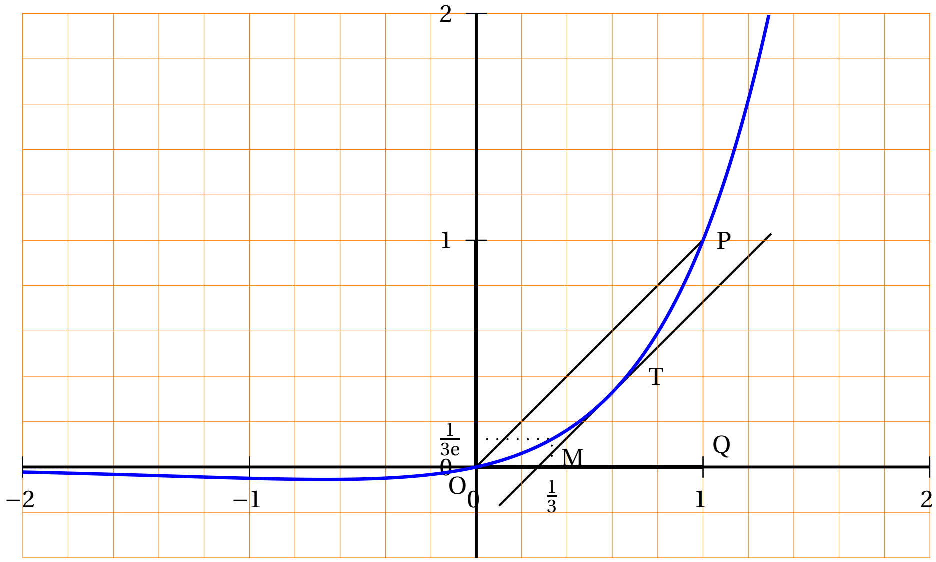
- 76 % des clients de a restent fidèles à a ;
- 64 % des clients de b restent fidèles à b.

Pour l'année 2000, 40 % des individus faisant partie de M ont choisi a et les autres ont choisi b.
On considère une personne prise au hasard dans M.
On note, pour tout entier naturel n :
A_n l'évènement « l'année $2000+n$, la personne choisit a ».
B_n l'évènement « l'année $2000+n$, la personne choisit b ».

1. **a.** Déduire des données les probabilités $p(A_0)$, $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{B_n}(A_{n+1})$.
   b. Démontrer la relation $p(A_{n+1}) = 0,76 \times p(A_n) + 0,36 \times p(B_n)$.
   c. On pose, pour tout entier naturel n, $p_n = p(A_n)$. Justifier la relation $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,36$.
2. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = 0,6 - p_n$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,4 ; préciser son premier terme u_0.
   b. Exprimer u_n puis p_n en fonction de n.
   c. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Exprimés en pourcentages, les nombres $p(A_n)$ et $p(B_n)$ constituent les prévisions, pour une future année $2000+n$, des parts de marché respectives de a et b.
   Quelle évolution peut-on prévoir à long terme pour les parts de marché respectives de a et b si le comportement de la clientèle reste toujours le même ?

PROBLÈME **10 points**

Sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Expression de la fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{mx} + p$, m et p étant deux constantes.

a. En utilisant les points P(1 ; 1) et $\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3\mathrm{e}}\right)$ de la courbe $\mathscr{C}$, démontrer que m et p vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lcr} m+p & = & 0 \\ m+3p & = & -3 \end{array}\right. .$$

b. En déduire que $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}$.

2. Tableau de variations de f.

a. Calculer la limite de f en $+\infty$. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b. Vérifier que

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2}x+1\right)\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}.$$

c. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f.

3. Point de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite (OP)

a. On admet que f' est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.
Démontrer que, dans l'intervalle c$[0 ; 1]$, l'équation $f'(x) = 1$ a une solution unique t.
Donner un encadrement de t d'amplitude 10^{-2}.

b. Justifier que t est l'abscisse du point T de la courbe $\mathscr{C}$, situé entre O et P où la tangente est parallèle à la droite (OP).

4. Aire du domaine situé entre la courbe et le segment [OP]

On note $\mathscr{A}$ la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, le segment [OQ] et le segment [PQ] et S la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et le segment [OP].

a. Justifier que $S = \dfrac{1}{2} - \mathscr{A}$.

b. Déterminer pour quelle valeur du réel k la fonction

$$G \quad : \quad x \longmapsto k\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}.$$

est une primitive de la fonction $g \qquad : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}$.

c. Vérifier que $f(x) = \dfrac{2}{3}\left(f'(x) - g(x)\right)$. En déduire une primitive F de f.

d. Démontrer que $\mathscr{A} = \dfrac{2}{9}\left(1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$.

Donner alors la valeur exacte de S puis une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

Baccalauréat ES Nouvelle–Calédonie mars 2002

EXERCICE 1 **5 points**

Les résultats seront donnés, dans cet exercice, sous la forme d'une fraction.

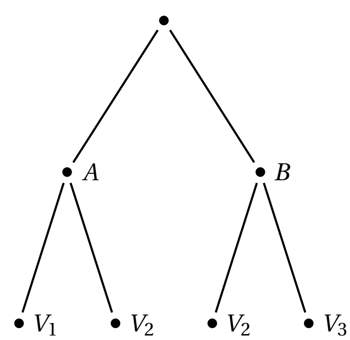
Un club a organisé en l'an 2000, à l'intention de ses adhérents, trois voyages différents.
Deux contrats sont proposés (à l'exclusion de toute autre possibilité)

— un contrat ($\mathscr{A}$) avec l'obligation d'effectuer au plus deux voyages ;
— un contrat ($\mathscr{B}$) avec l'obligation d'effectuer au moins deux voyages.

1 200 membres ont participé à au moins l'un de ces trois voyages et 800 ont choisi le contrat de type ($\mathscr{A}$).
On choisit au hasard un des participants.
On note :

— A l'évènement : « a choisi un contrat de type ($\mathscr{A}$) » ;
— B l'évènement : « a choisi un contrat de type ($\mathscr{B}$) » ;
— V_1 l'évènement : « a effectué exactement 1 voyage » ;
— V_2 l'évènement : « a effectué exactement 2 voyages » ;
— V_3 l'évènement : « a effectué exactement 3 voyages » ;
— $p(E)$ la probabilité de l'évènement E ;
— $p_F(E)$ la probabilité de l'évènement E sachant que F est réalisé.

On sait de plus que plus que $p_A(V_1) = \dfrac{3}{4}$ et $p_{V_2}(A) = \dfrac{2}{3}$.
Pour répondre aux questions suivantes on pourra s'aider de l'arbre ci-dessous (en le complétant au fur et à mesure)



1. **a.** Déterminer $p(A)$ et $p(B)$.

   b. Déterminer $p(A \cap V_1)$ et en déduire que $p(V_1) = \dfrac{1}{2}$.

   c. Déterminer $p(A \cap V_2)$ et en déduire que $p(V_2) = \dfrac{1}{4}$.

   d. Calculer $p(V_3)$.

   e. Déterminer $p_B(V_2)$. À quoi correspond ce nombre ?

2. On répète 5 fois, de façon indépendante, le choix au hasard d'un des participants.
   Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de membres, parmi les 5 choisis, ayant effectué exactement 2 voyages.

   a. Déterminer $p(X = 0)$.

   b. Déterminer $p(X \geqslant 1)$.

   c. Déterminer $p(X = 3)$.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans cet exercice, les résultats numériques pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice sans justification.
Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de départs à la retraite au sein d'une entreprise à effectif stable.

Année	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
y_i	50	53	53	58	57	59	63	64

x_i désigne le rang de l'année ; y_i désigne le nombre de départs à la retraite.

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ associé à la série double dans un repère orthogonal ayant pour origine le point $\text{M}_0(0\ ;\ 50)$, et pour unités 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

2. Dans cette question les résultats seront donnés à 10^{-2} près par défaut.

a. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. (Hors programme 2003,)

b. Peut-on envisager un ajustement affine ? Pourquoi ?

c. Donner une équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

d. Tracer cette droite sur le graphique précédent.

3. En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon pour les années suivantes, déterminer une estimation, arrondie à l'entier le plus proche, du nombre de départs à la retraite dans cette entreprise en 2000, puis en 2003.

4. En réalité, 64 employés ont fait valoir en 2000 leur droit à la retraite.
Soit T : estimation théorique obtenue pour l'année 2000.
Soit R : nombre réel donné ci-dessus.
On considère la différence T − R.
Quel pourcentage cette différence représente-t-elle par rapport à l'estimation théorique ?

PROBLÈME **11 points**

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Unités graphiques $\dfrac{1}{4}$ cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $\text{I} = [0\,;\,60]$ par

$$g(x) = \frac{x-8}{10(x+2)}.$$

On désigne par Γ sa courbe représentative relativement au repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. a. Calculer la dérivée de la fonction g.

b. Étudier le sens de variations de la fonction g.

c. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Γ avec l'axe des ordonnées, puis avec l'axe des abscisses.

d. Déterminer le signe de la fonction g sur I.

2. Démontrer que Γ admet en un point A et un seul une tangente parallèle à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{9}x + 10$.

3. **a.** Vérifier que, pout tout x de I, $g(x) = \dfrac{-1}{x+2} + \dfrac{1}{10}$.
   b. Déterminer une primitive de la fonction g sur I.
   c. Calculer le nombre réel $\displaystyle\int_{10}^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$. Préciser, en justifiant, ce que représente géométriquement ce nombre.

Partie B

On considère la fonction B définie sur I = [0 ; 60] par

$$B(x) = 0,1x - \ln(x+2) - 1.$$

1. **a.** Démontrer que la fonction B est dérivable sur I.
   b. Démontrer que petit tout réel x appartenant à I on a $B'(x) = g(x)$.
   c. Dresser le tableau de variations de B.
2. **a.** Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ admet dans l'intervalle [49 ; 50] une solution et une seule. On note α cette solution.
   b. Déterminer un encadrement à 10^{-1} près de α.
   c. Déduire des questions 1. c. et 2. a. que l'équation $B(x) = 0$ admet dans l'intervalle I = [0 ; 60] une solution et une seule.
3. Tracer la courbe représentative de la fonction B dans le repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie C

Une entreprise produit quotidiennement x voitures ($0 \leqslant x \leqslant 60$) pour un coût total exprimé en millions de francs par

$$C(x) = 0,2x + \ln(x+2) + 1.$$

Chaque voiture produite est vendue, et ce, au prix de 300 000 francs. On appelle $R(x)$ la recette totale (en millions de francs) résultant de la vente de x voitures.

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2. Exprimer le terme $R(x) - C(x)$ en fonction de x. Que représente ce terme ?
3. Déterminer le nombre minimal de voitures à fabriquer journellement pour rentabiliser l'entreprise.
4. Pour quelle production quotidienne de voitures la perte de l'entreprise est-elle maximale ?