Baccalauréat ES 2002

L'intégrale d'avril à novembre 2002

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

∽ Baccalauréat ES Pondichéry avril 2002 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On donne les valeurs d'un indice boursier au premier de chaque mois entre janvier et septembre 2001.

Date	1/01	1/02	1/03	1/04	1/05	1/06	1/07	1/08	1/09
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Indice y_i	7 100	6 900	6 800	6 600	6 500	6 350	6 400	6 250	6 000

Les calculs seront effectués à l'aide de la calculatrice. Aucun détail de ces calculs n'est demandé.

1. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$. On prendra 1 cm pour deux unités en abscisse et 1 cm pour 200 points d'indice en ordonnées, en commençant au point $(0 ; 5\,000)$.
2. Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ arrondi à $0,01$.
3. On considère que ce coefficient justifie un ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Donner une équation de la droite D d'ajustement affine de y en x (les coefficients étant arrondis à 0,01). Tracer D dans le repère.
4. On suppose que la tendance se poursuit.
   a. En utilisant cet ajustement, donner une estimation à 10 points près de cet indice boursier au 1er janvier 2002.
   b. Calculer le mois à partir duquel on peut estimer que cet indice sera inférieur à 5 000. Comment peut-on vérifier ce résultat graphiquement ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un jardinier propose ses services pour la plantation de la pelouse dans un lotissement nouvellement construit. Il dispose de deux produits : soit un gazon sport, soit un gazon anglais.
Parmi les foyers du lotissement, 60 % se déclarent intéressés par cette offre ; cependant le jardinier sait par expérience que, parmi ceux qui se disent intéressés, 50 % se décident pour le gazon sport, 30 % pour le gazon anglais, les autres renonçant finalement à faire appel à lui.
On note :

I l'évènement « le foyer est intéressé » ;
S l'évènement « le foyer prend du gazon sport » ;
A l'évènement « le foyer prend le gazon anglais » ;
R l'évènement « le foyer renonce à faire appel au jardinier ».

Un foyer du lotissement est pris au hasard.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   - « le foyer est intéressé et prend du gazon sport » soit $I \cap S$;
   - $I \cap A$;
   - $I \cap R$.
2. Calculer la probabilité que le jardinier ne plante pas la pelouse dans ce foyer.
3. La plantation du gazon sport est facturée 2 000 € et celle du gazon anglais s €. On appelle X la variable aléatoire égale au montant (qui peut être nul) versé au jardinier par un foyer pris au hasard dans le lotissement.
   a. Donner la loi de probabilité de X.
   b. Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de s.

c. Calculer s pour que le jardinier espère gagner en moyenne 1 200 € par foyer dans ce lotissement.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit M la matrice carrée d'ordre 5 :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Construire le graphe associé à M. On appellera A, B, C, D, E les sommets.
   Ce graphe est-il connexe ? Est-il complet ?
2. Existe-t-il une chaîne eulérienne ?
   Existe-t-il un cycle eulérien ?
3. Donner un encadrement du nombre chromatique du graphe et déterminer sa valeur.
4. **a.** Calculer M^2.
   b. Combien y-a-t-il de chaînes de longueur 2 entre A et B ? Entre C et A ?
5. Combien y-a-t-il de chaînes de longueur 3 entre B et D ?

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Une société d'achats en ligne veut analyser le déroulement d'une vente promotionnelle « flash » qu'elle a organisée sur l'Internet.
Cette vente, d'une durée annoncée de trois minutes, a provoqué sur son site un flux financier que l'on peut supposer continu et dont la vitesse instantanée a été variable en fonction du temps.
On a pu modéliser cette vitesse pendant les trois minutes de l'ouverture du site par la fonction f définie par

$$f(t) = 20t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

où t est le temps exprimé en minutes ($t \in [0\,;\,3]$) et $f(t)$ est la vitesse instantanée de ce flux, exprimée en milliers d'euros par minute.
Sauf indication contraire, les résultats numériques seront arrondis au millième.

Partie A

Étude de la vitesse instantanée pendant les trois minutes de la vente.

1. Déterminer la fonction dérivée de f.
2. Démontrer que la vitesse admet un maximum. Donner un arrondi au millième de ce maximum.
3. Dessiner la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthogonal (unités : 5 cm en abscisse, 1 cm en ordonnées) et préciser la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 (on calculera son coefficient directeur).

Partie B

Détermination de la vitesse moyenne pendant les trois minutes de la vente.

1. Vérifier que la fonction F définie sur $[0;3]$ par

$$F(t) = -20\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

est une primitive de f sur $[0;3]$.

2. En déduire l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $t = 0$ et $t = 3$ exprimée en unités d'aire, puis en cm^2.

3. Quelle est la valeur moyenne de f sur $[0;3]$?

4. Quelle a été la somme totale transférée à la fin des trois minutes (à un euro près) ?

Partie C

Au cours des trois minutes, la somme d'argent transférée en fonction du temps écoulé (exprimée en milliers d'euros) est représentée par la fonction g définie par :

$$g(t) = 20 - 20\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad \text{avec } t \in [0\,;\,3].$$

1. Étudier les variations de g.

2. Tracer la courbe représentative de g et la tangente au point d'abscisse 0 dans le repère précédent.

3. On veut savoir à partir de quel instant t_0 il y a eu au moins 18 000 euros transférés.

a. Donner un encadrement d'amplitude 0,1 de t_0 en utilisant le graphique.

b. Résoudre l'inéquation $g(t) \geqslant 18$. En déduire une expression de la valeur exacte de t_0 et sa valeur approchée à une seconde près par excès.

Baccalauréat ES Amérique du Nord juin 2002

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

En l'absence d'indications spécifiques, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près. On effectuera les calculs statistiques à l'aide de la calculatrice. Aucun détail n'est alors demandé.

Après injection d'une substance médicamenteuse, un laboratoire de recherche mesure l'évolution de la quantité de cette substance dans le sang d'un individu.
Après une série de mesures, on obtient les résultats donnés dans le tableau indiqué en annexe (document 1), où x désigne le temps écoulé depuis l'injection (exprimé en minutes) et y désigne la quantité de substance (exprimée en dixièmes de grammes par litre). Le nuage de points correspondant est indiqué sur le document 2 de la feuille annexe.
Les mesures réalisées pour $x = 10$ et $x = 60$ ayant été plusieurs fois vérifiées, on juge que les points A et B sont fiables. On se propose de modéliser ce nuage à l'aide de la courbe représentative d'une fonction, afin de réaliser une prévision sur les points d'abscisses 50 et 70 pour lesquels les mesures n'ont pas été effectuées.
Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

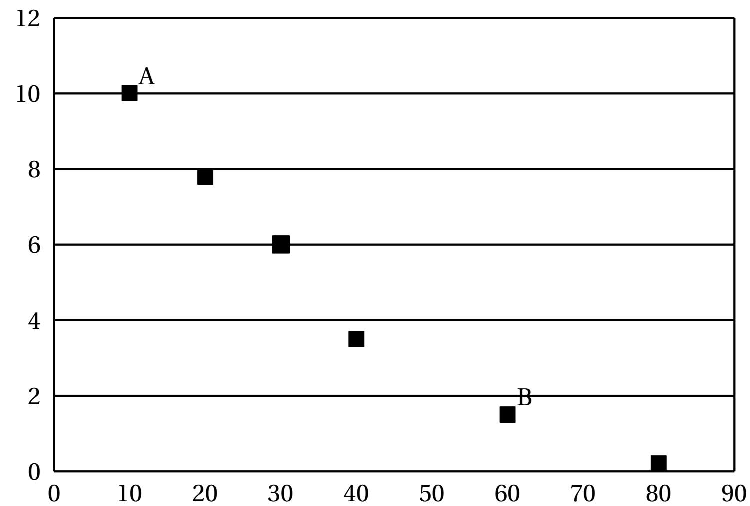
1. On propose un premier modèle d'ajustement du nuage par une courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = a\ln(x) + b$, et on impose à la courbe de passer par les points A et B.
   a. Déterminer alors les réels a et b.
   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille annexe (document 2).
   c. Prévoir, à l'aide de ce premier modèle, les quantités mesurables pour $x = 50$ et $x = 70$.
2. Dans cette question, on détermine un deuxième modèle d'ajustement du nuage.
   a. Compléter le tableau (document 3) qui figure sur la feuille annexe avec des résultats arrondis à 10^{-3} près. Calculer alors le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(t,\ y)$. Un ajustement affine paraît-il alors envisageable ?
   b. Déterminer une équation de la droite de régression de y en t par la méthode des moindres carrés.
   c. Montrer que ce second modèle conduit à des prévisions de y, pour $x = 50$ et $x = 70$, égales à 2,70 et 1,04 respectivement.
3. Une autre équipe de recherche a effectué les mesures pour $x = 50$ et $x = 70$ dans les mêmes conditions et a obtenu respectivement $y = 2,4$ et $y = 0,6$. Quel modèle doit-on préférer pour ajuster ce nuage ?

ANNEXE
Feuille à rendre avec la copie
Exercice 1

Tableau des coordonnées des points du nuage (document 1) :

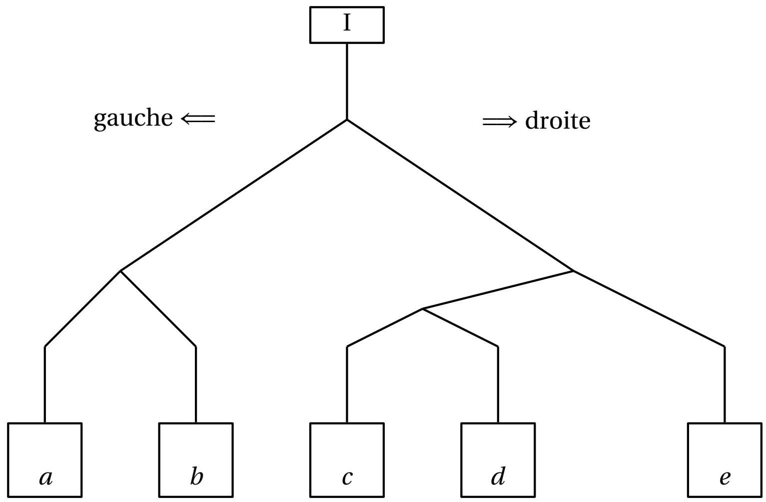
x	10	20	30	40	60	80
y	10	7,8	6	3,5	1,5	0,2

Nuage de points (document 2) :



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



On considère le circuit de billes schématisé par la figure ci-dessus. Un joueur lâche une bille en I et on admet qu'à chaque bifurcation la bille prend la direction gauche avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.

1. Réaliser un arbre pondéré modélisant cette expérience aléatoire.
2. **a.** Utiliser cet arbre pour déterminer les probabilités des évènements élémentaires suivants, sous forme de fractions irréductibles :
   A : « La bille arrive en a » ;
   B : « La bille arrive en b » ;
   C : « La bille arrive en c » ;
   D : « La bille arrive en d » ;
   E : « La bille arrive en e ».
   Vérifier que la probabilité de l'évènement D est $\frac{9}{64}$.

   b. Parmi les évènements précédents, quel est l'évènement le moins probable ? Le plus probable ?
3. Le joueur gagne 48 points si la bille arrive en a, 16 points si elle arrive en b et 64 points si elle arrive en c. Il ne gagne rien si la bille arrive en d et il perd 32 points si elle arrive en e.

   a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus : ainsi si la bille arrive en e, on a $X = -32$. En utilisant les résultats de la deuxième question, donner la loi de probabilité de X.

   b. Calculer alors $\mathrm{E}(X)$, espérance mathématique de X. Le joueur a-t-il intérêt à jouer ?

   c. L'organisateur du jeu se doit de proposer un jeu équitable (c'est-à-dire tel que $\mathrm{E}(X) = 0$). Pour cela il décide de modifier le nombre de points perdus si la bille arrive en e. Quel nombre de points perdus doit-il choisir pour que $\mathrm{E}(X) = 0$?

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme

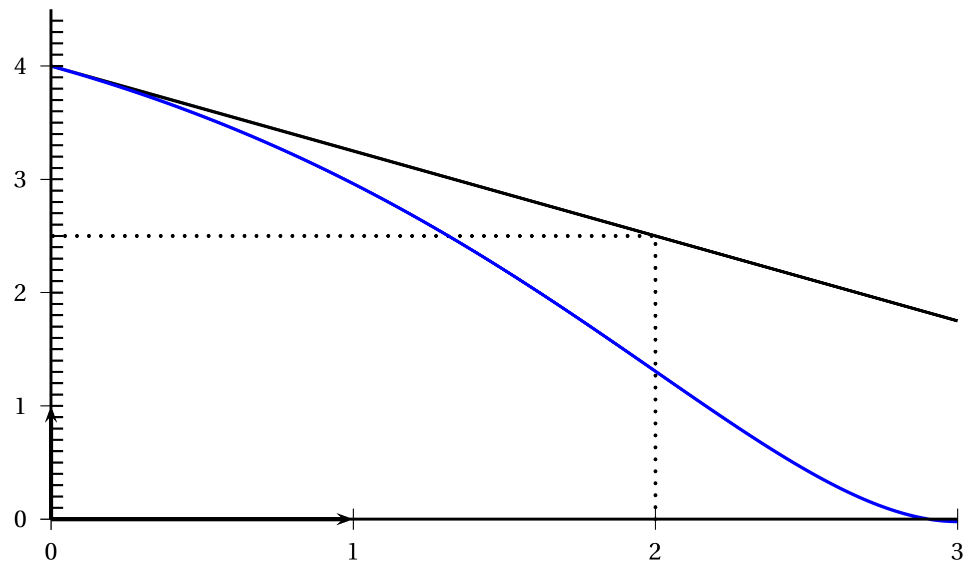
$$f(x) = k + \frac{1}{4}(ax + b)\mathrm{e}^{x},$$

où a, b et k sont des nombres réels que l'on se propose de déterminer dans la **partie A**.

Partie A

Sur la figure ci-dessous, on peut lire la représentation graphique de la fonction f obtenue sur l'intervalle $[0\,;\,3]$ à l'aide d'un logiciel de tracé ou d'une calculatrice graphique. On précise que :

- A est le point de la courbe d'abscisse 3,
- Au point A, la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses,
- Le point B$(0\,;\,4)$ est un point de la courbe,
- La droite (BC) est tangente à la courbe au point B, avec C $(2\,;\,2{,}5)$.



1. Déterminer une équation de la droite (BC).

2. Donner les valeurs des nombres $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(3)$.

3. Calculer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a, b et k, f' désignant la fonction dérivée de f.

4. Déduire des résultats des questions **2.** et **3.** les valeurs des réels a, b et k. Vérifier que pour tout x réel : $f(x) = 5 + \dfrac{1}{4}(x-4)\mathrm{e}^{x}$.

Partie B

On étudie maintenant la fonction f définie par : $f(x) = 5 + \dfrac{1}{4}(x-4)\mathrm{e}^{x}$ sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer $f(3)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près. Confronter ce résultat à la figure de la première partie.

2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = (5-\mathrm{e}^{x}) + \dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^{x}$ et en déduire la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$).

Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?

3. a. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

b. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe la droite Δ, d'équation $y = 5$, en un point E dont on précisera les coordonnées.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ (unités graphiques : 1 cm sur $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\right)$ et 2 cm sur $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\jmath}\right)$.

5. En utilisant une observation graphique et la remarque de la question **1** de la **partie B**, indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ (on ne demande pas de résoudre cette équation mais il faut justifier succinctement la réponse).

Partie C

1. Vérifier graphiquement que, pour tout réel x dans l'intervalle $[-2~;~2]$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 5.$$

2. Démontrer que la fonction g, définie par $g(x) = (x-1)\text{e}^x$, est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h : x \longmapsto x\text{e}^x$.

3. **a.** Vérifier que, pour tout réel x, on a : $5 - f(x) = \text{e}^x - \dfrac{1}{4}x\text{e}^x$.

   b. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe et les droites d'équations $x = -2,~ x = 2$ et $y = 5$. On hachurera ce domaine sur le graphique et on donnera un résultat exact, puis approché à 10^{-2} près.

∽ Baccalauréat ES Antilles-Guyane juin 2002 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

On rappelle que l'euro est la nouvelle monnaie en usage en France.
Le tableau ci-dessous donne l'évolution du SMIC horaire converti en euros de 1995 à 2002.

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
SMIC horaire en euros y_i	5,64	5,78	6,01	6,13	6,21	6,41	6,67

(Source : INSEE)

1. Calculer le pourcentage d'évolution du SMIC horaire entre les années 1995 et 2001 (le résultat sera arrondi au centième)
2. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 10 cm pour 1 euro sur l'axe des ordonnées; les graduations commencent à 0 sur l'axe des abscisses et à 5 sur l'axe des ordonnées)
3. Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés et les résultats seront donnés au millième.

   Le nuage de points montre qu'un ajustement affine est justifié.

   Donner une équation de la droite de régression D de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Représenter la droite D dans le repère précédent.
4. Calculer, avec cet ajustement affine, le montant du SMIC horaire en euros que l'on peut prévoir en 2005 (résultat arrondi au centième)
5. On envisage un autre modèle pour prévoir l'évolution du montant du SMIC horaire. On suppose qu'à partir de l'année 2001, le SMIC horaire progressera de 2 % par an. On désigne par u_n le montant du SMIC horaire, en euros, de l'année $(2001+n)$. On a donc $u_0 = 6,67$.

   a. Calculer le montant du SMIC horaire en 2005 (résultat arrondi au centième)

   b. À partir de quelle année le SMIC horaire aura-t-il dépassé 10 euros ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Lors d'une enquête réalisée auprès de familles d'une région, concernant leur habitation principale, on apprend que 55 % des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, 40 % en sont locataires et enfin 5 % occupent leur logement gratuitement (ces familles seront appelées dans la suite de l'exercice « occupant à titre gratuit ».)
Toutes les familles interrogées habitent soit une maison individuelle , soit un appartement; toute habitation ne contient qu'une seule famille.
60 % des propriétaires habitent une maison individuelle, 80 % des locataires habitent un appartement et enfin 10 % des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle.
On interroge au hasard une famille de la région et on note :
A l'évènement : « la famille habite un appartement »;
L l'évènement : « la famille est locataire »;
P l'évènement : « la famille est propriétaire »;
G l'évènement : « la famille est occupant à titre gratuit ».
On notera $p(E)$ la probabilité de l'évènement E. L'évènement contraire de E sera noté $\overline{E}$.
$p(E/F)$ désignera la probabilité conditionnelle de l'évènement E par rapport à l'évènement F.

1. **a.** Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes : $p\left(\overline{A}/P\right)$, $p(A/L)$ et $p\left(\overline{A}/G\right)$.

b. Construire un arbre pondéré résumant la situation.

2. Calculer la probabilité de l'évènement : « la famille est propriétaire et habite un appartement ».
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $0,585$.
4. On interroge au hasard une famille habitant un appartement. Calculer la probabilité pour qu'elle en soit le propriétaire.
5. On interroge trois familles de la région, le choix de ces familles se faisant aléatoirement et de manière indépendante.
   Calculer la probabilité d'interroger trois familles habitant un appartement.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Un dé à 6 faces a été testé sur un grand nombre de lancers.
On a obtenu les résultats partiels suivants pour chaque face :

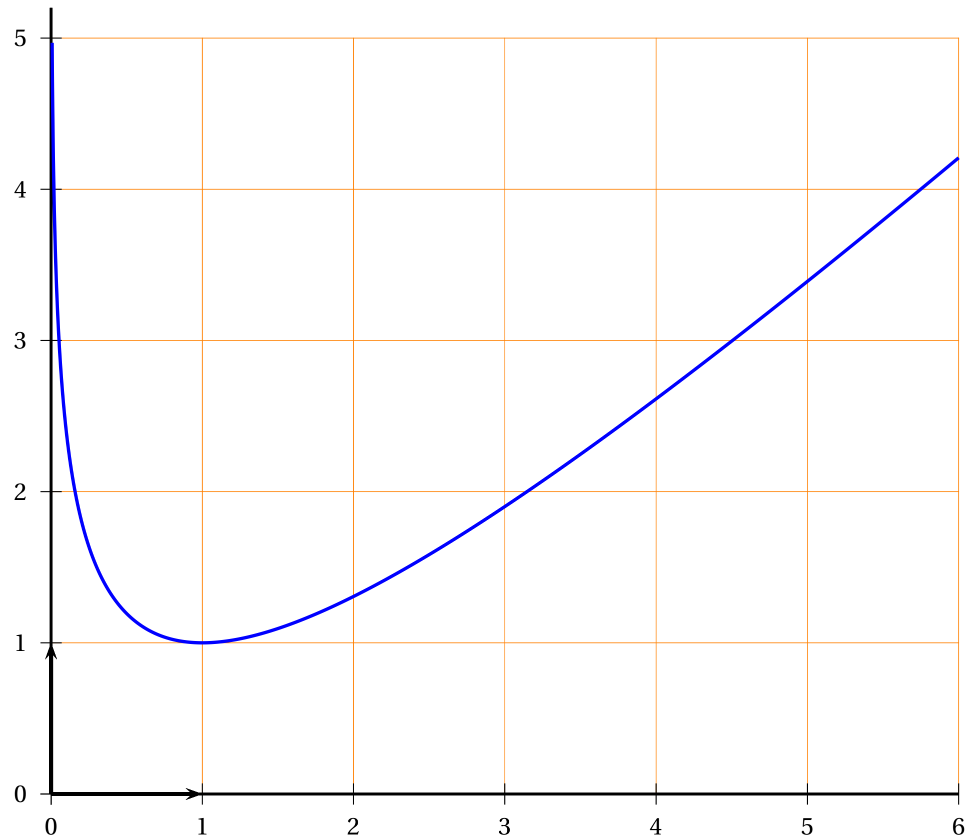
Face	1	2	3	4	5	6
Fréquence	a	0,15	0,10	0,10	0,15	b

Pour la suite, on assimile ces fréquences aux probabilités des évènements correspondants.

1. **a.** Montrer que : $a + b = 0,5$.
   b. On considère la variable aléatoire égale au numéro de la face obtenue ; sachant que son espérance mathématique est égale à $3,75$ quelle relation doivent vérifier a et b ?
   c. En déduire que : $a = 0,2$ et $b = 0,3$.
2. On lance le dé.
   Calculer la probabilité de l'évènement : « On obtient un nombre impair ».
3. Un joueur lance le dé 3 fois de suite. Les lancers sont indépendants les uns des autres.
   Chaque nombre impair apparu lui fait gagner 10 euros et chaque nombre pair lui fait perdre 10 euros.
   On note Y la variable aléatoire égale au gain obtenu (positif ou négatif).
   Tous les résultats seront arrondis au millième.

   a. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de lancers donnant un nombre impair. Établir la loi de probabilité de X.
   b. Quelles sont les valeurs possibles pour Y ?
   c. Établir la loi de probabilité de Y.
   d. Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$.
   Ce jeu est-il favorable au joueur ?

Graphique de f



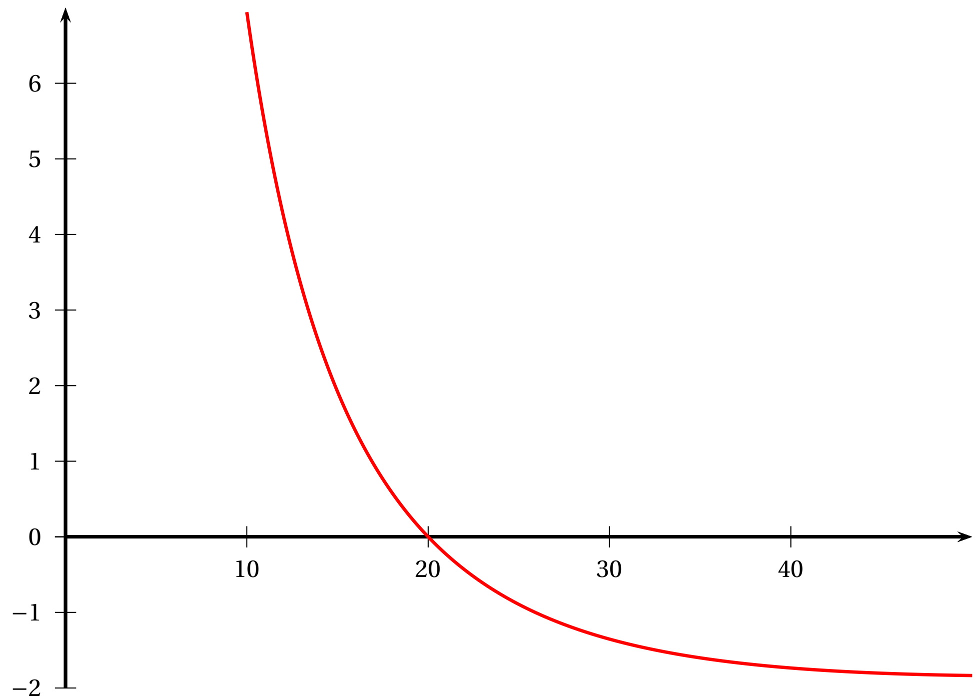
PROBLÈME **11 points**

Le but de ce problème est d'étudier des fonctions utiles pour modéliser des situations en économie : seuil de rentabilité, bénéfice maximum, etc.
On rappelle que l'euro est la nouvelle monnaie en usage en France.

Première partie

On considère la fonction g donnée sur I = [10 ; 50] par sa représentation graphique et le tableau de valeurs ci-dessous :

x	10	20	50
$g(x)$	7	0	$-1,8$



1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser le signe de $g(x)$ sur I.
2. Soit G une primitive de g sur I.
   a. Quelle est la particularité de la courbe représentative de G au point d'abscisse 20 ?
   b. L'une des trois courbes données en annexe est représentative de la fonction G. Déterminer laquelle en donnant toutes les justifications.

Deuxième partie

Soit f la fonction définie sur I = [1 ; 20] par

$$f(x) = \frac{100}{x} \times (3 - \ln x).$$

1. **a.** Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f sur I.
   b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{100}{x} \times (\ln x - 4)$.
2. Étudier le signe de f' sur I. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Calculer $f(\mathrm{e}^3)$. En déduire le signe de f sur I.
4. Soit la fonction F définie sur I par $F(x) = -50(\ln x - 3)^2 + 30$.
   a. Montrer que F est une primitive de f sur I
   b. En déduire le tableau de variation de la fonction F.
5. Donner des raisons qui permettent de considérer la fonction g de la première partie comme une bonne approximation de la fonction f.

Troisième partie

La société Dumoulin, qui fournit des hangars préfabriqués pour l'industrie peut en produire jusqu'à 50 par mois.
Son bénéfice, pour q unités produites (q entier entre 10 et 50) est donné par :

$$B(q) = -50(\ln q - 3)^2 + 30 \quad \text{en milliers d'euros.}$$

1. À partir des études précédentes, ou de la calculatrice, déterminer l'ensemble des valeurs de q qui permettent d'obtenir un résultat positif.
2. Déterminer la valeur de q qui permet d'obtenir un bénéfice maximum. Préciser ce bénéfice maximum.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité origine inconnue

On rappelle que l'euro est la nouvelle monnaie en usage en France.

Un dé à 6 faces a été testé sur un grand nombre de lancers. On a obtenu les résultats partiels suivants pour chaque face :

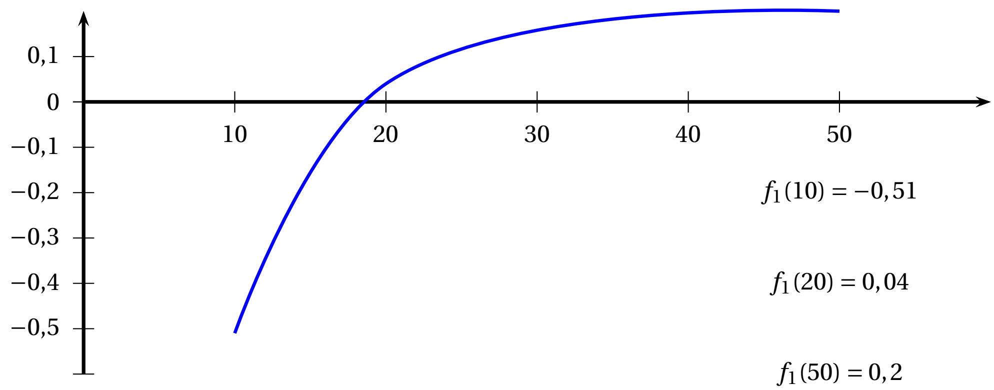
Face	1	2	3	4	5	6
Fréquence	a	0,15	0,10	0,10	0,15	b

Par la suite, on assimile ces fréquences aux probabilités des évènements correspondants.

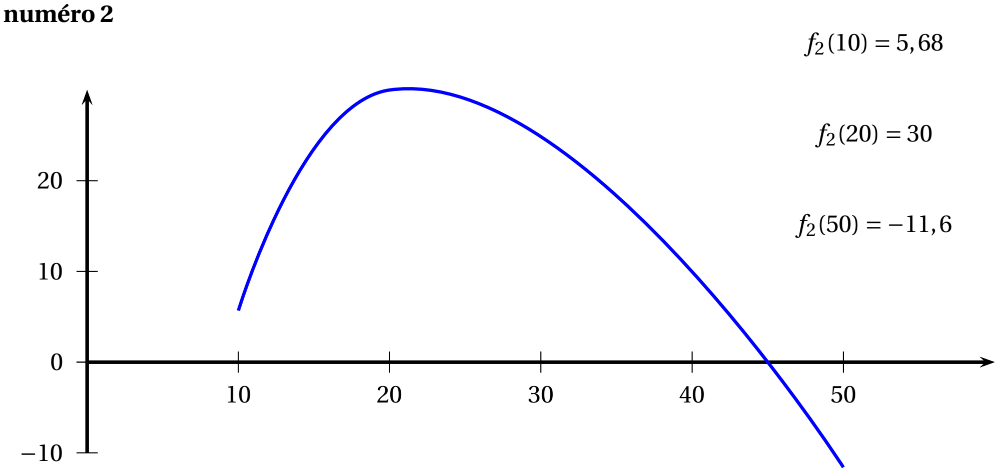
1. **a.** Montrer que $a + b = 0,5$.
   b. On considère la variable aléatoire égale au numéro de la face obtenue ; sachant que son espérance mathématique est égale à 3,75 quelle relation doivent vérifier a et b ?
   c. En déduire que $a = 0,2$ et $b = 0,3$.
2. On lance le dé. Calculer la probabilité de l'évènement : « on obtient un numéro impair ».
3. Un joueur lance le dé trois fois de suite. Les lancers sont indépendants les uns des autres. Chaque nombre impair apparu lui fait gagner 10 euros et chaque nombre pair lui fait perdre 10 euros. On note Y la variable aléatoire égale au gain obtenu (positif ou négatif).
   Tous les résultats seront arrondis au millième.
   a. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de lancers donnant un nombre impair. Établir la loi de probabilité de X.
   b. Quelles sont les valeurs possibles pour Y ?
   c. Établir la loi de probabilité de Y.
   d. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(Y)$. Ce jeu est-il favorable au joueur ?

Annexe

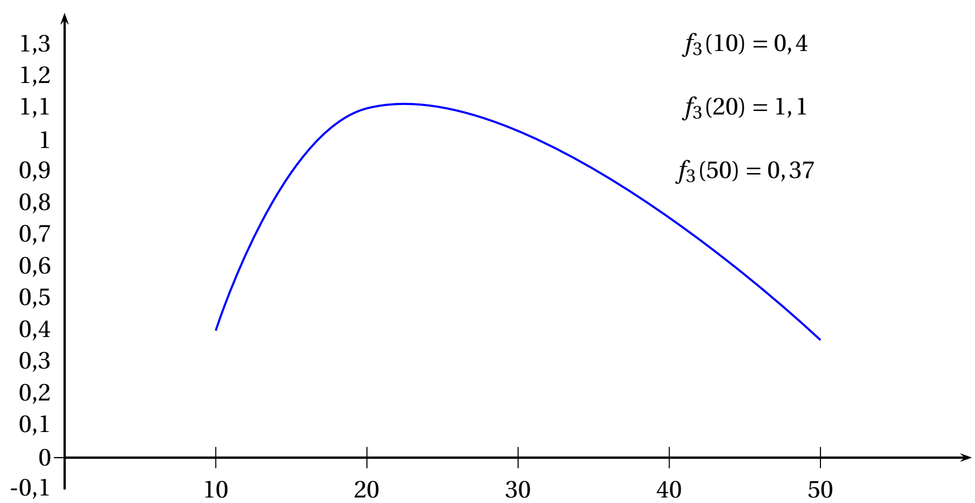
Courbe numéro 1



Courbe numéro 2



Courbe numéro 3



Baccalauréat ES Asie juin 2002

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une statistique publiée en l'an 1998 donne le nombre d'abonnés à internet dans le monde, à la fin de l'année indiquée :

Année	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3
Nombre d'abonnés en millions : y_i	26	55	101	150

Pour tout l'exercice, les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés.

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.
   (Prévoir sur l'axe des y des graduations jusqu'à 500).
2. Des prévisions ont été réalisées pour les années 1999, 2000 et 2001 à l'aide d'un ajustement affine par la méthode des moindres carrés.
   a. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x, les coefficients étant arrondis au dixième. Tracer cette droite sur le graphique.
   b. Calculer avec cet ajustement les prévisions p, q et r du nombre d'abonnés à internet pour les années 1999, 2000 et 2001.
3. Le nombre d'abonnés à internet pour les années 1999 et 2000 est maintenant connu, on obtient le nouveau tableau :

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre d'abonnés en millions : y_i	26	55	101	150	248	407

   a. Placer les nouveaux points sur le graphique. L'ajustement choisi à la question **2** ne paraît plus pertinent ; on essaie donc un autre ajustement.
   b. Pour cela, on pose $z_i = \ln(y_i)$.
   Calculer, arrondies au centième, les valeurs $z_i = \ln\left(y_i\right)$ pour i entier variant de 0 à 5, et les présenter dans un tableau. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de z en x, les coefficients étant arrondis au centième.
   c. En déduire l'ajustement : $y = 30\mathrm{e}^{0,53x}$.
   d. Calculer avec cet ajustement la nouvelle prévision r' pour l'année 2001.
   Quelle serait, avec ce deuxième ajustement, la prévision pour 2002 en millions d'abonnés ?

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Une entreprise vend des calculatrices d'une certaine marque. Le service après-vente s'est aperçu qu'elles pouvaient présenter deux types de défaut, l'un lié au clavier et l'autre lié à l'affichage.
Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante :
La probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à $0,04$.
En présence du défaut de clavier, la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est de $0,03$.
Alors qu'en l'absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter de défaut d'affichage est de $0,94$.
On note C l'évènement : « la calculatrice présente un défaut de clavier », A l'évènement « la calculatrice présente un défaut d'affichage ».

On notera $p(E)$ la probabilité de l'évènement E. L'évènement contraire de E sera noté $\overline{E}$.
$p_F(E)$ désignera la probabilité conditionnelle de l'évènement E par rapport à l'évènement F.
Dans cet exercice, les probabilités seront écrites sous forme de nombres décimaux arrondis au millième.

1. **a.** Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes :

$$p_{\overline{C}}(A), \quad p_C(A) \quad \text{et} \quad p(C).$$

   b. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.
2. On choisit une calculatrice de cette marque au hasard.
   a. Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente les deux défauts.
   b. Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.
   c. En déduire p(A).
   d. Montrer que la probabilité de l'évènement « la calculatrice ne présente aucun défaut » arrondie au millième est égale à 0,902.
3. Un client choisit au hasard trois calculatrices de cette marque.
   a. Calculer la probabilité pour que les trois calculatrices ne présentent aucun défaut.
   b. Calculer la probabilité pour qu'au moins une calculatrice ait un défaut.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On rappelle que l'euro, est la nouvelle monnaie en usage en France.
Les résultats numériques seront donnés arrondis à l'unité.
En janvier 2002, un artisan a réalisé une recette de 2 300 euros alors que ses coûts se sont élevés à 800 euros. Son bénéfice est donc de 1 500 euros. Grâce à une clientèle en augmentation, la recette, c'est-à-dire le chiffre d'affaires de cet artisan, augmente de 1 % tous les mois.
Cependant les coûts, c'est-à-dire les frais, augmentent pendant le même temps de 2,5 %.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	janvier 2002	février 2002	mars 2002
Rang du mois	0	1	2
Recette	2 300		
Coûts	800		
Bénéfice	1 500		

2. Pour le mois de rang n, avec n entier naturel, on note R_n le montant de la recette, C_n le montant des coûts et B_n le montant du bénéfice.
   a. Exprimer R_n et C_n en fonction de n ; justifier votre réponse.
   b. Montrer que $B_n = 2300 \times (1,01)^n - 800 \times (1,025)^n$.
3. Pour étudier le sens de variations de la suite (B_n), on étudie le signe de $B_{n+1} - B_n$.
   a. Établir que, pour tout entier positif n,

$$B_{n+1} - B_n = 23 \times (1,01)^n - 20 \times (1,025)^n.$$

b. Établir que :

$$23 \times (1,01)^n - 20 \times (1,025)^n > 0 \quad \text{équivaut à} \quad \left(\frac{1,025}{1,01}\right)^n < \frac{23}{20}.$$

En déduire les valeurs de n telles que l'inégalité $B_{n+1} - B_n > 0$ soit vérifiée.
Que peut-on dire de la suite (B_n) dans ce cas ?

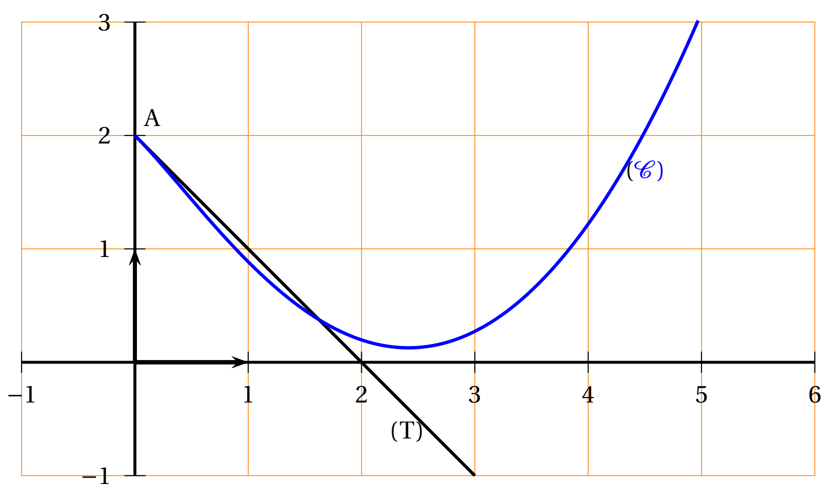
4. Le bénéfice de cet artisan peut-il diminuer ? Si oui, à partir de quel mois obtiendra-t-il une baisse par rapport au mois précédent ?

PROBLÈME **10 points**

On rappelle que l'euro est la nouvelle monnaie en usage en France.
Le but du problème est d'étudier le coût marginal et le coût total de production d'un produit dans une entreprise.
L'objet de la **partie A** est de déterminer une fonction h satisfaisant à des conditions données.
L'objet de la **partie B** est l'étude de propriétés d'une fonction f.
L'objet de la partie **C** est d'utiliser certains résultats de la **partie A** pour répondre à des questions d'ordre économique.

Partie A

La courbe $(\mathscr{C})$, donnée ci-dessous, est la courbe représentative d'une fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$.
Le point A a pour coordonnées $(0 ; 2)$. La droite (T) est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.



1. Préciser $h(0)$.
Déterminer à l'aide d'une lecture graphique le nombre dérivé $h'(0)$. (Justifier la réponse).

2. La fonction h, définie sur $[0 ; +\infty[$ est de la forme :

$$h(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(x+1) \quad \text{où} \quad a,\ b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

On note h' la dérivée de la fonction h. Exprimer $h'(x)$ en fonction de a et b.

3. On donne $h'(3) = \dfrac{1}{2}$.
En utilisant ce résultat et les résultats de la question **1** déterminer chacune des valeurs a, b et c.

Partie B

Soit f la fonction définie sur I = [0 ; 5] par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 + 2\ln(x+1).$$

1. **a.** Calculer la dérivée f' de la fonction f.

   b. Montrer que pour tout x de l'intervalle I :

   $$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x+1}.$$

   c. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle I.

   d. En déduire les variations de f sur $[0 ; 5]$.

2. Soit g la fonction définie sur I par :

   $$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x.$$

   a. Calculer la dérivée de la fonction g.

   b. En déduire une primitive de la fonction f sur I

   c. Calculer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-3} près, de l'intégrale $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C

Sur l'intervalle $[0 ; 5]$, la fonction f de la partie précédente représente le coût marginal de production un liquide conditionné en flacons d'un litre, en fonction de la quantité produite.
On rappelle que le coût marginal de production est assimilé à la dérivée du coût total.
x représente le volume en milliers de litres, x variant sur l'intervalle $[0 ; 5]$;
$f(x)$ représente le coût marginal en milliers d'euros.

1. Quel est le coût marginal en euros, du 3 000e litre produit ?
2. Pour quelle quantité produite le coût marginal est-il minimum ? (donner la valeur au litre près).
3. Les coûts fixes sont de 1 000 euros.

   a. Montrer, en utilisant le résultat de la **partie B**, question **2. b**, que le coût total est donné par l'expression définie sur $[0 ; 5]$ par :

   $$C(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2(x+1)\ln(x+1) + 1.$$

   b. Calculer $C(5) - C(0)$ à un euro près et interpréter en termes de coût cette différence.
   Comparer ce résultat à celui à la **partie B** question **2. c** et expliquer cette réponse.

Baccalauréat ES Centres étrangers I juin 2002

Calculatrice autorisée

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les détails des calculs effectués à la calculatrice ne sont pas demandés.
Sauf indication contraire, les valeurs obtenues seront données sous forme décimale arrondie à 10^{-2} *près.*

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'une petite ville proche d'une métropole en pleine expansion.

Année	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang de l'année (x_i)	0	5	10	15	20	25	30	35
Population (y_i)	5 400	5 600	7 000	8 000	8 750	11 200	13 900	15 000

1. Le plan est rapporté à un repère orthogonal :

- Sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour 5 années ;
- Sur l'axe des ordonnées, on placera 5 000 à l'origine et on choisira 1 cm pour 1 000 habitants.

a. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.

b. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série statistique $\left(xi\ ;\ y_i\right)$ et placer ce point sur le graphique.

c. Déterminer l'équation de la droite $\mathcal{D}$ d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer $\mathcal{D}$ sur le graphique précédent.

d. En supposant que ce modèle reste pertinent jusqu'en 2020, quelle serait la population de cette ville, à une unité près, en 2020 ?

2. a. Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant :

Rang de l'année (x_i)	0	5	10	15	20	25	30	35
$z_i = \ln(y_i)$								

b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$.

c. Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés.

d. En supposant que ce second modèle reste pertinent jusqu'en 2020, donner une nouvelle prévision, à une unité près, de la population de cette ville en 2020.

3. Les crédits alloués par l'État aux municipalités étant proportionnels au nombre d'habitants, quel modèle permet la prévision la plus favorable aux finances de la ville en 2020 ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un jeu consiste à lancer de la main gauche, une balle dans un seau. Parmi l'ensemble des joueurs, $\frac{5}{6}$ sont droitiers et $\frac{1}{6}$ sont gauchers.

Pour un joueur droitier, la probabilité de mettre la balle dans le seau est $\frac{1}{4}$.

Pour un joueur gaucher, cette probabilité est $\frac{1}{2}$.

1. On choisit au hasard un individu dans cette population. On note :
   G l'évènement « l'individu choisi est gaucher »,
   S l'évènement « l'individu met la balle dans le seau ».
   a. Déterminer la probabilité de l'évènement G $\cap$ S.
   b. Calculer la probabilité de l'évènement S.
   c. Calculer la probabilité que la personne choisie soit droitière, sachant qu'elle a mis la balle dans le seau.
2. Dans cette question on a sélectionné Paul qui est un joueur droitier. Il lance deux balles l'une après l'autre ; on suppose les deux lancers indépendants.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de balles dans le seau après les deux lancers.
   a. Déterminer les valeurs prises par X
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 6 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{array}\right.$$

On pose $v_n = u_n - 3$.

1. **a.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme v_0 et la raison.
   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c. Déduire, en utilisant la question précédente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
2. On constate que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, v_n est strictement positif et on pose $w_n = \ln v_n$.
   Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
3. **a.** Exprimer w_n en fonction de n.
   b. Pour quelle valeur de n a-t-on : $w_n = -\ln\left(27^3\right) - \ln 9$?

PROBLÈME **10 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (ax+b)\text{e}^{cx}, \text{ où } a,\ b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer a, b et c pour que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\ 0\right)$, par le point B$(0\,;\ 1)$ et qu'elle admette en B une tangente ayant un coefficient directeur égal au nombre 1.
2. On supposera désormais que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)\text{e}^{-x}$.

a. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote pour $\mathscr{C}$.

b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ et en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 2\right]$, l'équation $f(x) = 1$ a une solution unique α.

Donner la valeur décimale arrondie à 10^{-1} de α.

5. Écrire une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point B.

6. Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$ dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

Partie B

On donne la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = (-2x-3)\text{e}^{-x} + 3.$$

1. Montrer que F est la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule pour $x = 0$.

2. Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 1$.

Donner une valeur approchée de cette aire à 10^{-2} près.

∽ Baccalauréat ES Métropole juin 2002 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les résultats numériques seront obtenus à l'aide de la calculatrice; aucun détail des calculs statistiques n'est demandé.

Le tableau suivant donne la dépense, en millions d'euros, des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 1990 à 1998.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Dépense y_i	398	451	423	501	673	956	1 077	1 255	1 427

Source INSEE

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ et le point moyen dans un repère orthogonal tel que 2 cm représentent une année en abscisse et 1 cm représente 100 millions d'euros en ordonnée (ainsi 398 sera représenté par 3,98 cm).
2. **a.** Donner la valeur arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ y_i)$. Un ajustement affine vous paraît-il justifié?
   b. Écrire une équation de la droite d'ajustement affine D de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}). Représenter D dans le repère précédent.
   c. En utilisant cet ajustement affine, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.
3. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose $z_i = \ln y_i$.
   a. Recopier et compléter le tableau suivant où z_i est arrondi à 10^{-3} :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
z_i	5,986	6,111	6,047	6,217					

   b. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ,\ z_i)$. Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}).
   c. En utilisant cet ajustement, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.
4. En 2000 les ménages ont dépensé 68,9 milliards d'euros pour la culture, les loisirs et les sports et 3,1 % de ces dépenses concernent les produits informatiques.
   Avec lequel des deux ajustements l'estimation faite est-elle la meilleure?
   Quel est le salaire brut annuel moyen?

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une école de commerce a effectué une enquête, en janvier 2000, auprès de ses jeunes diplômés des trois dernières promotions afin de connaître leur insertion professionnelle. À la première question, trois réponses et trois seulement sont proposées :
A « La personne a une activité professionnelle »;
B « La personne poursuit ses études »;
C « La personne recherche un emploi ou effectue son service national ».

On a constaté que 60 % des réponses ont été envoyées par des filles. Dans l'ensemble des réponses reçues, en a relevé les résultats suivants :
- 65 % des filles et 55 % des garçons ont une activité professionnelle ;
- 20 % des filles et 15 % des garçons poursuivent leurs études.

1. On prend au hasard la réponse d'un jeune diplômé.

a. Montrer que la probabilité qu'il poursuive ses études est égale à $0,18$.

b. Calculer la probabilité qu'il exerce une activité professionnelle.

2. On prend au hasard la réponse d'une personne qui poursuit ses études ; quelle est la probabilité que ce soit la réponse d'une fille (on donnera le résultat sous forme fractionnaire) ?

3. On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante trois réponses (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise).

À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité que l'une au moins des réponses soit celle d'un jeune diplômé poursuivant ses études.

4. Dans l'ensemble des réponses des jeunes diplômés exerçant une activité professionnelle, la répartition des salaires bruts annuels en milliers d'euros est la suivante :

Salaire brut annuel S	$20 \leqslant S < 22$	$22 \leqslant S < 26$	$26 \leqslant S < 30$	$30 \leqslant S < 34$	$34 \leqslant S < 38$	$38 \leqslant S < 40$
Pourcentage	5	15	28	22	20	10

Quel est le salaire brut annuel moyen ?

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Julie possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel elle a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieuse de bien gérer ses dépenses, elle étudie l'évolution de ses consommations.

Elle a constaté que :

- Si pendant le mois noté n elle a dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant noté $(n+1)$ est $\dfrac{1}{5}$.
- Si pendant le mois noté n elle n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant est $\dfrac{2}{5}$.

Pour n entier naturel strictement positif, on désigne par A_n l'évènement « Julie a dépassé son forfait le mois n » et par B_n l'évènement contraire. On pose $p_n = p(\mathrm{A}_n)$ et $q_n = p(B_n)$; on a $p_1 = \dfrac{1}{2}$.

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. a. Donner les probabilités de A_{n+1} sachant que A_n est réalisé et de A_{n+1} sachant que B_n est réalisé.

b. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, les égalités suivantes sont vraies :

$$p\left(A_{n+1} \cap A_n\right) = \frac{1}{5} p_n \qquad \text{et} \qquad p\left(A_{n+1} \cap B_n\right) = \frac{2}{5} q_n.$$

En déduire que l'égalité suivante est vraie : $p_{n+1} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5} p_n$.

2. Pour tout entier naturel $n > 1$ on pose : $u_n = p_n - \dfrac{1}{3}$.

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_1.

3. Écrire u_n puis p_n en fonction de n. Déterminer la limite de $\left(p_n\right)$.

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 3x + 3\right)\text{e}^x - 4.$$

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Étudier les variations de f sur $[0~;~+\infty[$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 appartenant à $]1~;~2[$.
   Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de x_0.

3. Déduire des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur $[0~;~+\infty[$.

Partie B

Une entreprise fabrique un produit, en quantité x exprimée en tonnes, sa capacité de production ne pouvant dépasser 3 tonnes. Le coût total de fabrication de ce produit, en centaines de milliers d'euros, est donné par :

$$C_T(x) = (x-3)\text{e}^x + 3x + 4.$$

Le coût moyen est défini sur $]0~;~3]$ par la formule suivante :

$$C_m(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}.$$

1. Pour tout x de $]0~;~3]$ calculer $C'_m(x)$ et vérifier que l'égalité suivante est vraie : $C'_m(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
   En déduire le sens de variation de C_m sur $]0~;~3]$.

2. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum ?
   Quel est le coût moyen minimum (arrondi au millier d'euros) d'une tonne de ce produit ?

Partie C

Une tonne du produit fabriqué est vendue 300 000 euros ; toute la production est vendue.

1. **a.** Le bénéfice algébrique, en centaines de milliers d'euros, réalisé après la fabrication et la vente de x tonnes du produit est noté $B(x)$. Montrer l'égalité suivante : $B(x) = (3-x)\text{e}^x - 4$.

   b. Étudier le sens de variation de B sur $[0~;~3]$.
   Quelle est la production pour laquelle le bénéfice est maximum ?

2. **a.** Tracer la courbe représentative de B dans un plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 5 cm pour une tonne en abscisse et 2 cm pour 100 000 euros en ordonnée).

   b. À l'aide du graphique, déterminer à 0,1 près les quantités à produire pour que l'entreprise réalise un gain.

Baccalauréat ES La Réunion juin 2002

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Jean-Paul, marathonien émérite, note ses temps de passage lors d'un entraînement :

Distances parcourues x_i en mètres	200	300	400	500
Temps de passage y_i en secondes	40	60	82	104

Pour les questions 1. et 2., les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés.

1. **a.** Représenter sur papier millimétré, le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ associé à la série double, dans un repère orthogonal.

   On prendra pour unités : 1 cm pour 50 mètres sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 10 secondes sur l'axe des ordonnées.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série statistique et placer ce point sur le graphique.

2. Déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire de la série double $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ (à 10^{-4} près).

   Peut-on envisager un ajustement affine ? Pourquoi ?

3. Pour effectuer des prévisions, Jean-Paul utilise la droite $\mathscr{D}$ de coefficient directeur $0,21$ passant par le point G.

   a. Déterminer alors une équation de $\mathscr{D}$.

   b. Tracer $\mathscr{D}$ sur le graphique.

   c. Calculer le temps de passage prévisible aux 1 000 m.

   d. En fait, aux 1 000 m, Jean-Paul a un temps de passage de 220 secondes.

   Par rapport à la valeur réelle, calculer (à $0,01$ près) le pourcentage d'erreur commise dans sa prévision de temps de passage aux 1 000 m.

4. Peu satisfait de ses prévisions sur des distances plus longues, Jean-Paul recherche pour la série ci-dessous un ajustement par une fonction trinôme du second degré :

Distances parcourues x_i en km	0	0,2	1
Temps de passage y_i en secondes	0	40	220

   a. Déterminer a, b, c pour que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les trois points de ce nuage.

   b. Aux 2 000 m, Jean-Paul a un temps de passage de 8 minutes.

   Laquelle des deux méthodes d'ajustement permet la meilleure prévision ?

EXERCICE 2 **6 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

En annexe 1 est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f.
En annexe 2 est donnée la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative d'une fonction g.
L'unité est Ie cm.
La droite (T) est la tangente en A à $\mathscr{C}_f$.
La droite (T′) est la tangente en B $\mathscr{C}_g$.

1. **a.** Lire $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$.

   b. La fonction f' étant la dérivée de la fonction f, donner, en justifiant, $f'(1)$ et $f'(5)$.

   c. Déterminer alors une équation de la droite (T).

d. La fonction f étant définie par $f(x) = 3x - 8 + \dfrac{12}{x+1}$ calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par les droites d'équations $x = 0$, $x = 5$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

2. **a.** Lire $g(1)$, $g(4)$, $g(9)$.

b. Donner en justifiant, $g'(9)$.

3. Soit u la fonction définie sur $[0\,;\,5]$ par $u(x) = (g \circ f)(x)$.

a. Déterminer $u(0)$, $u(1)$ et $u(5)$.

b. Calculer $u'(5)$.

c. En utilisant le sens de variation de chacune des fonctions f et g donner le tableau de variations de la fonction u sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

Exercice 2 **6 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit (r_n) la suite définie, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par :

$$\left\{\begin{array}{lcr} r_1 & = & 0,6 \\ r_{n+1} & = & 0,5r_n + 0,4 \end{array}\right.$$

Soit (u_n) la suite définie, pour $n \geqslant 1$, par $u_n = r_n - 0,3$.

a. Prouver que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5. Déterminer u_1.

b. En déduire l'expression du terme général de (u_n) et de celui de (r_n) fonction de n.

c. Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, la suite (r_n) a une limite que l'on calculera.

2. Amateur de jeux vidéo, Albert fait l'acquisition d'un jeu de voitures de course.
Lors de son premier essai, il a seulement 6 chances sur 10 de terminer le circuit indemne.
S'il réussit le n-ième esai, sa probabilité de réussir l'essai suivant est 0,9.
S'il manque le n-ième essai, sa probabilité de réussir l'essai suivant est de 0,4.
Pour $n \geqslant 1$, on note p_n la probabilité de l'évènement R_n « Albert réussit le n-ième essai ».

a. À partir des données du texte, évaluer p_1, et les probabilités conditionnelles, suivantes : $p\left(R_{n+1}/R_n\right)$ et $p\left(R_{n+1}/\overline{R_n}\right)$.

b. Déterminer en fonction de p_n , les probabilités suivantes : $p\left(\overline{R_n}\right)$,
$p\left(R_{n+1} \cap R_n\right)$ et $p\left(R_{n+1} \cap \overline{R_n}\right)$.

c. En déduire que $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

d. Que nous apprend sur le jeu la réponse à la question **1. c.**?

PROBLÈME **8 points**

L'objet de ce problème est de rechercher un coût moyen de production minimal, connaissant le coût marginal.

I - Des résultats préliminaires susceptibles d'être utilisés ensuite

1. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 2x - 2 + \mathrm{e}^{-x}.$$

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer f' dérivée de f, ainsi que le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

c. Établir le tableau de variations de la fonction f.

d. Prouver que, dans $[0\,;\,1]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution α.
Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

e. En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

2. Montrer que la dérivée de la fonction $g\ :\ x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est la fonction
$g'\ :\ x \longmapsto (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

II - Recherche du coût total

Une usine fabrique un produit dont le coût marginal C **en milliers d'euros**, est donné par la formule :

$$C(x) = 3x^2 - 4x + 2 + (x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

x représentant la quantité de produit en centaines de grammes.
On rappelle que le coût marginal C peut être assimilé à la dérivée du coût total C_{T}.
Déterminer $C_{\mathrm{T}}(x)$ sachant que $C_{\mathrm{T}}(0) = 0$.

III

Pour une production de x **centaines de grammes** on appelle $C_m(x)$ le coût moyen d'un **gramme**, en milliers d'euros. La fonction C_m est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1. Prouver que $C_m(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2 - \mathrm{e}^{-x}}{100}$.

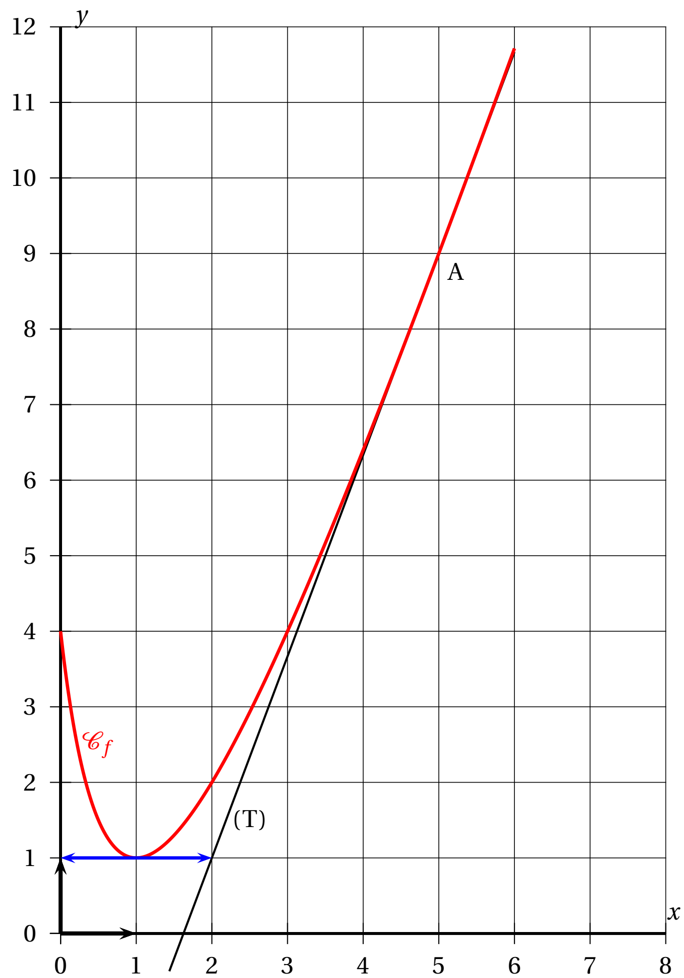
2. **a.** Calculer $C'_m(x)$ et prouver que $C'_m(x)$ et $f(x)$ ont le même signe.

b. En déduire les variations de C_m. On ne demande pas les calculs de limites.

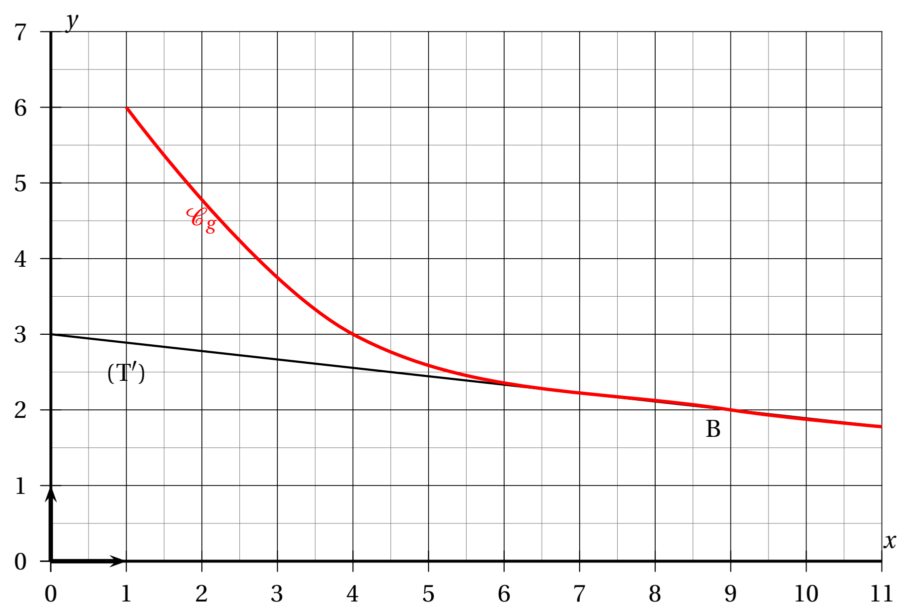
c. Donner une valeur approchée de la production donnant un coût moyen minimal.

d. Calculer, au centième près, le coût moyen en euros pour une production de 76 grammes.

ANNEXE 1



ANNEXE 2



∽ Baccalauréat ES Liban juin 2002 ∽

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 4 cm), la courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. La courbe $\mathcal{C}$ admet pour asymptotes les axes de coordonnées, passe par le point A(1 ; 0), par le point $\text{B}\left(\sqrt{\text{e}}\ ;\ \dfrac{1}{2\text{e}}\right)$ et elle admet au point B une tangente horizontale.

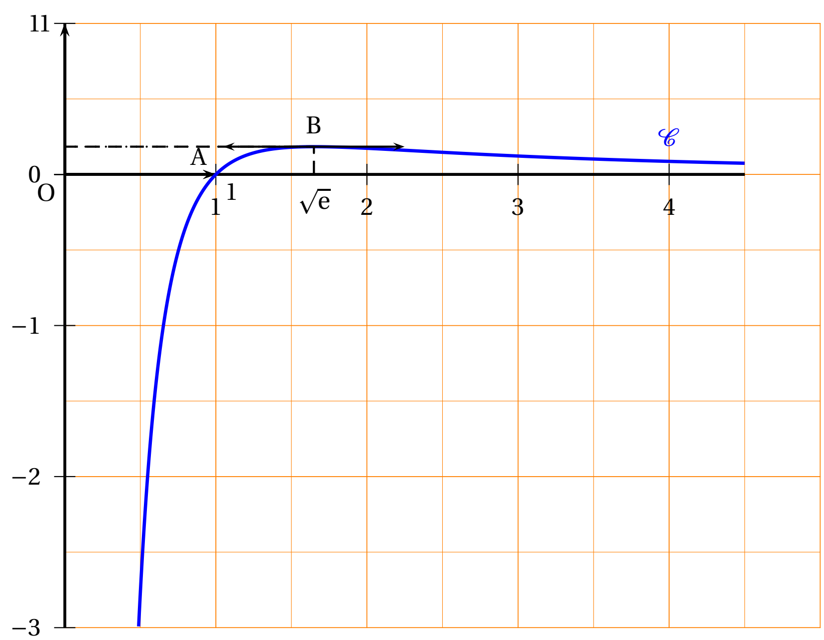
1. En utilisant ces renseignements et une lecture graphique :
   a. Donner le tableau de variations de f avec le signe de la dérivée et les limites aux bornes de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
2. On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

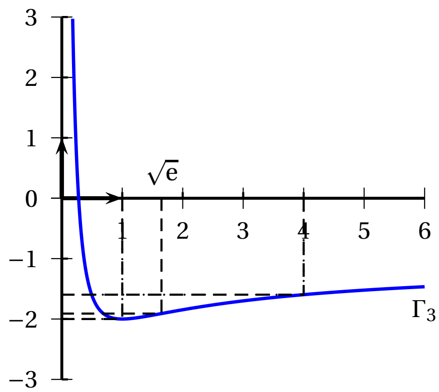
   a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

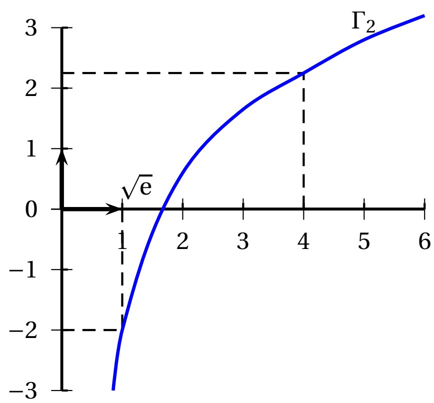
   où f' désigne la fonction dérivée de f.
   b. Étudier les variations de f.

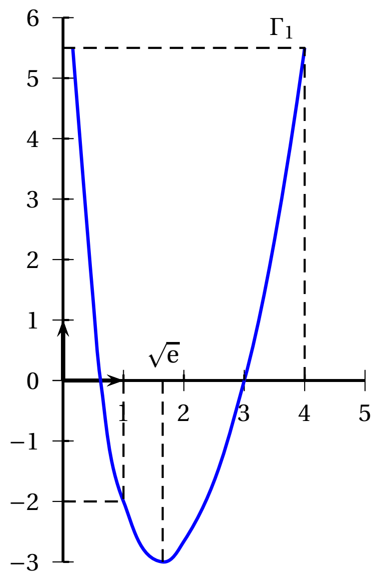


3. Soit F la primitive de f qui prend la valeur −2 en 1. La représentation graphique de F est l'une des trois courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3 données ci-après, dans un repère orthonormal (unités graphique : 1 cm.)
   Déterminer celle des courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3 qui représente F, en justifiant la réponse.



-





4. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire du domaine plan limite par :

— la courbe $\mathscr{C}$,
— l'axe des abscisses,
— les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

a. Exprimer $\mathscr{A}$, en unités d'aire, à l'aide de la fonction F.

b. Utiliser la représentation graphique de F pour donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$, à 10^{-1} près, en cm^2.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Dans une entreprise, les salariés sont classés en deux catégories : cadres et employés. Une entreprise emploie 30 cadres et 240 employés. Au cours de négociations sur la réduction du temps de travail, dite RTT, on propose aux salariés trois formules :
— Formule n° 1 : une RTT de 30 minutes par jour de travail,
— Formule n° 2 : une RTT d'un vendredi après-midi sur deux,
— Formule n° 3 : une RTT de 12 jours de travail par an.
Une enquête a été réalisée auprès de tous les salariés de l'entreprise, chacun remplissant une fiche mentionnant son statut (cadre ou employé) et son choix de RTT. On a obtenu les résultats suivants :
— Aucun cadre n'a choisi la formule n° 1,
— Parmi les employés :
 — 36 ont choisi la formule n° 1,
 — 99 ont choisi la formule n° 2.
— 40 % des salariés ont choisi la formule n° 2.
On extrait, au hasard, la fiche d'un salarié. On notera :
C l'évènement « le salarié est un cadre »,
E l'évènement « le salarié est un employé »,
R_1 l'évènement « le salarié a choisi la formule n° 1 »,
R_2 l'évènement « le salarié a choisi la formule n° 2 »,
R_3 l'évènement « le salarié a choisi la formule n° 3 ».
$p(A)$ désigne la probabilité d'un évènement A et $p_B(A)$ celle de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé. Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

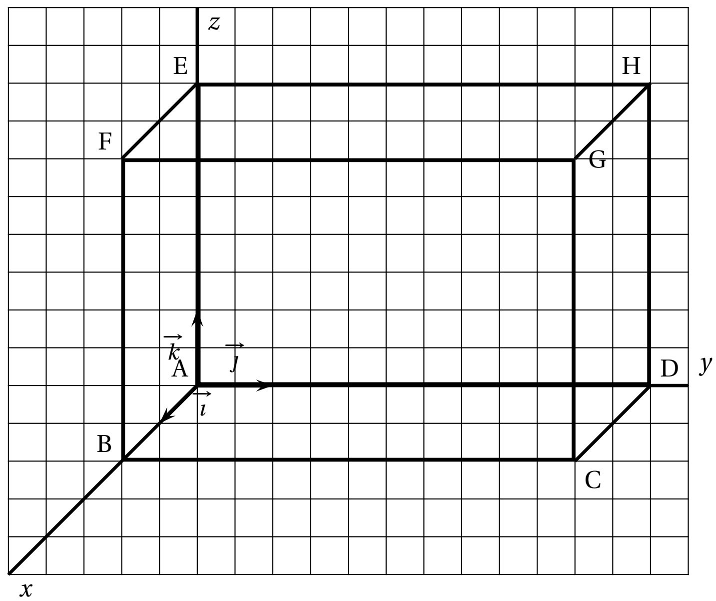
1. Déterminer les probabilités $p(C)$ et $p(E)$.
2. Parmi les probabilités $p(R_1 \cap C)$, $p(R_1 \cap E)$, $p(R_2 \cap E)$, $p_E(R_1)$, $p_E(R_2)$, $p(R_2)$ indiquer celles qui correspondent aux quatre résultats du sondage et donner leur valeur numérique.
3. **a.** Calculer la probabilité que le salarié soit un cadre ayant choisi la formule n° 2.
   b. Démontrer que la probabilité que le salarié ait choisi la formule n° 2, sachant qu'il s'agit d'un cadre, est $\dfrac{3}{10}$.
4. Calculer la probabilité $p(R_1)$, puis la probabilité $p(R_3)$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

L'espace est rapporte à un repère orthonormal $\left(\text{A}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
ABCDEFGH est un pavé défini par $\overrightarrow{\text{AB}} = 2\vec{\imath}$; $\overrightarrow{\text{AD}} = 6\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{\text{AE}} = 4\vec{k}$.
I, J et K sont les milieux respectifs de [EF], [FB] et [AD]

1. Placer les points I, J et K sur la figure donnée ci-dessous.
   Donner les coordonnées des points B, D et E. Puis vérifier par le calcul que I, J et K ont pour coordonnées respectives (1 ; 0 ; 4), (2 ; 0 ; 2) et (0 ; 3 ; 0).
2. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $y = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $2x + z = 6$.
   a. Donner un vecteur $\vec{n}_1$ normal au plan $\mathscr{P}_1$ et un vecteur $\vec{n}_2$ normal au plan $\mathscr{P}_2$.
   b. En déduire que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
   c. Soit Δ l'intersection des deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
   Montrer que Δ est la droite (IJ).

3. Soit $\overrightarrow{n}(2\,;2\,;1)$.
   a. Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{IK}}$
   b. En déduire que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK).
   c. Montrer alors que le plan (IJK) a pour équation $2x+2y+z=6$.
4. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $5x+y=5$.
   a. Déterminer les coordonnées des points R et T, intersections du plan $\mathscr{P}$ avec les axes (Ax) et (Ay) respectivement.
   b. Vérifier que le point I appartient au plan $\mathscr{P}$.
   c. Sur la figure, placer les points R et T, puis dessiner la trace du plan $\mathscr{P}$ sur le plan (xAy).



PROBLÈME **10 points**

Le taux de pénétration au radiotéléphone pour la France est donné par le tableau suivant :

Semestre/Année	1/95	2/95	1/96	2/96	1/97	2/97	1/98
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6
Taux y_i	1,4	2,0	2,7	4,0	6,0	9,9	12,9

Semestre/Année	2/98	1/99	2/99	1/00	2/00	1/01
Rang x_i	7	8	9	10	11	12
Taux y_i	18,7	24,4	33,9	39,9	48,7	54,2

(Source : Autorité de régulation des télécommunications)

Dans la première ligne du tableau, 1/95 désigne le 1^er^ semestre 1995 et 2/95 le 2^e^ semestre 1995. Dans la troisième ligne du tableau, un taux de 2,0, par exemple, indique que 2 personnes sur 100 sont équipées d'un radiotétéléphone. On propose d'étudier deux modèles d'ajustement dans les **parties A et B** et de comparer les prévisions pour les années à venir dans la **partie C**.

Partie A - Ajustement affine (modèle A)

Dans cette partie, aucun détail des calculs statistiques n'est demandé.

1. Représenter graphiquement le nuage de points associés à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_j\right)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour un semestre sur l'axe des abscisses et 1 cm pour un taux de 5 % sur l'axe des ordonnées) (on prendra la feuille de papier millimétré dans le sens de la largeur). Le nuage de points montre qu'un ajustement affine est justifié.

2. Écrire une équation de la droite d'ajustement affine $\mathscr{D}$ de y en x par la méthode des moindres carrés ; les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près.
3. Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique.

Partie B - Ajustement à l'aide d'une fonction (modèle B)

On obtient un autre ajustement du nuage à l'aide de la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{80}{1+56\text{e}^{-0,4x}}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g.

1. Étudier le sens de variations de g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Calculer la limite de g en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Construire, dans le repère précédent, la partie de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue sur l'intervalle $[0\,;\,25]$.

Partie C

Avec le modèle A, on note f la fonction affine représentée par la droite D.
Avec le modèle B, si x est l'entier désignant la durée écoulée en nombre de semestres depuis le 1er semestre 1995, alors $g(x)$ représente le taux de pénétration au radiotéléphone correspondant à ce nombre de semestres.

1. Prévoir le taux de pénétration au radiotéléphone, à 10^{-1} près, pour chacun des deux modèles précédents :
   a. pour le deuxième semestre 2002.
   b. pour le deuxième semestre 2004.
2. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes :

   $$f(x) \geqslant 65 \qquad \text{et} \qquad g(x) \geqslant 65.$$

   b. En déduire le plus petit entier n tel que $f(n) \geqslant 65$ et le plus petit entier p tel que $g(p) \geqslant 65$.
   c. Interpréter les résultats obtenus.
3. Calculer $f(24)$. Commenter le résultat obtenu.
4. En supposant que le modèle B soit valide à long terme, et en utilisant les questions **B 1** et **B 2**, que peut-on déduire pour le taux de pénétration au radiotéléphone pour les années à venir ?

Baccalauréat ES Polynésie juin 2002

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne l'évolution du prix d'un paquet de café en francs au 31 décembre de l'année $1900 + n$.

Rang n_i de l'année	70	80	88	94	96	98	99	100
Prix y_i en francs	3	5,5	10	15,50	19,30	19,40	20	21

Sauf autre précision, tous les résultats et coefficients demandés seront arrondis à 10^{-3}.

A – Ajustement affine

Le détail des calculs n'est pas demandé.

1. **a.** Représenter graphiquement le nuage. Que peut-on en déduire ?
   b. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement affine de y en n.
2. En supposant que ce modèle mathématique reste valable jusqu'à l'an 2002, donner une estimation du prix, en euros, arrondi au centime, d'un paquet de café au 31/12/2002. On rappelle qu'un euro vaut 6,559 57 francs.

B – Ajustement exponentiel

1. Le détail des calculs n'est pas demandé.
   a. Recopier et compléter le tableau suivant où $z_i = \ln y_i$ (valeurs arrondies à 10^{-3}).

n_i	70	80	88	94	96	98	99	100
z_i	1,099	1,705	2,303		2,960			

   b. Représenter graphiquement le nuage. Que peut-on en déduire ?
   c. Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement affine de z en n.
2. Déduire du **B 1 c** une expression de y en fonction de n de la forme $y = \alpha \cdot \beta^n$.
   Cet ajustement est dit exponentiel.
3. En supposant que ce modèle exponentiel reste valable jusqu'en 2002, donner une estimation du prix en euros, arrondi au centime, d'un paquet de café au 31/12/2002.
4. Quelle est la meilleure estimation du prix au 31/12/2002 d'un paquet de café ? Justifier.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Un jeu consiste à lancer une première fois un dé à six faces :
- si le joueur obtient un « six », il gagne 10 euros ;
- s'il obtient un « un », un « deux » ou un « trois », il ne gagne rien et le jeu s'arrête ;
- s'il obtient un « quatre » ou un « cinq », le joueur lance le dé une deuxième fois ;
- s'il obtient un « six », il gagne alors 5 euros, sinon il ne gagne rien et le jeu s'arrête.

Pour participer à ce jeu, chaque joueur mise 2 euros.
Le « gain » d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue de la partie et sa mise ; un gain peut donc être négatif. Soit G le gain d'un joueur donné à chaque partie.

1. Quelles sont les valeurs prises par G ?
2. Premier cas : le joueur joue avec un dé bien équilibré.
   a. Montrer que $p(G=3) = \dfrac{1}{18}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
   b. Déterminer la loi de probabilité de G, puis l'espérance mathématique de G. Ce jeu est-il à l'avantage du joueur ?
3. Deuxième cas : le joueur joue avec un dé pipé.
   On note p_i la probabilité d'obtenir la face marquée « i » pour $1 \leqslant i \leqslant 6$.
   On sait que p_6 est le double de p_1 et que $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$.
   a. Déterminer les valeurs de p_i pour $1 \leqslant i \leqslant 6$.
   b. Montrer alors que $p(G=3) = \dfrac{4}{49}$
   c. Déterminer la loi de probabilité de G.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Le conseil municipal d'une station touristique de montagne a décidé de faire équiper une falaise afin de créer un site d'escalade.
L'équipement doit se faire depuis le pied de la falaise. Deux entreprises spécialisées dans ce genre de chantier ont été contactées et ont envoyé des devis.
On se propose d'étudier ceux-ci.

Devis de l'entreprise A :

Le premier mètre équipé coûte 20 €, puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 4 € de plus que le mètre précédent (20 € pour équiper une falaise de un mètre, 20 € + 24 € = 44 € pour équiper une falaise de deux mètres, 20 € + 24 € + 28 € = 72 € pour une falaise de trois mètres, etc.)

Devis de l'entreprise B :

Le premier mètre équipé coûte 10 €, puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 5 % de plus que le mètre précédent (10 € pour équiper une falaise de un mètre, 10 € + 10,50 € = 20,50 € pour équiper une falaise de deux mètres, 10 € + 10,5 € + 11,025 € = 31,525 € pour une falaise de trois mètres, etc.).

On appelle u_n le prix du n-ième mètre équipé et S_n le prix de l'équipement d'une falaise de n mètres de hauteur indiqués par l'entreprise A.
On appelle v_n le prix du n-ième mètre équipé et R_n le prix de l'équipement d'une falaise de n mètres de hauteur indiqués par l'entreprise B.

1. Exprimer u_n puis S_n en fonction de n.
2. Exprimer v_n puis R_n en fonction de n.
3. Calculer le prix à payer pour équiper une falaise de 50 mètres de hauteur avec chacune des deux entreprises. Préciser l'entreprise la moins chère. On arrondira les prix à l'euro près.
4. Le conseil municipal a décidé d'accorder un budget de 24 000 € pour équiper ce site. Calculer la hauteur de la falaise qui peut être équipée avec cette somme par chacune des deux entreprises A et B (arrondir au mètre près).

PROBLÈME **10 points**

Partie A – Étude d'une fonction

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 0,4x + \mathrm{e}^{-0,4x+1}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O} ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm en abscisse, 4 cm en ordonnée).

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 0,4x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
   c. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D).
2. **a.** Résoudre sur l'intervalle I l'inéquation suivante :

$$1 - \mathrm{e}^{-0,4x+1} > 0.$$

   b. À l'aide de la question précédente, étudier les variations de la fonction f sur I.
   c. Dresser le tableau de variations de f. En déduire le signe de f sur $[0 ;\ +\infty[$.
3. **a.** Montrer que la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 passe par le point B(2,5 ; 1).
   b. Construire $(\mathscr{C})$, (D) et (T).

Partie B - Application économique

Soit x le nombre d'objets, exprimé en centaines, fabriqués par une usine, $f(x)$ est leur coût total, exprimé en milliers d'euros, On suppose que x appartient à l'intervalle J = $[2,5 ;\ +\infty[$.
Chaque objet est vendu 5 euros pièce.
On suppose que la fabrication est vendue dans sa totalité.

1. **a.** Exprimer la recette $R(x)$, en milliers d'euros, en fonction du nombre x de centaines d'objets fabriqués.
   b. Construire, sur le graphique précédent, la courbe représentative (Δ) de la fonction R traduisant cette recette.
   c. Vérifier graphiquement que (Δ) et $(\mathscr{C})$ se coupent en un seul point, On désigne par α l'abscisse de ce point ; en donner une valeur approchée à 10^{-1}.
2. **a.** Montrer que le bénéfice, noté $B(x)$, s'exprime en milliers d'euros par :

$$B(x) = 0,1x - \mathrm{e}^{-0,4x+1}.$$

   b. Quel est, en euros, le bénéfice obtenu en fabriquant 1 000 objets ? On donnera une valeur arrondie à l'euro.
   c. Calculer $B(x)$ et étudier le sens de variation de B sur $[2,5 ;\ +\infty[$.
   d. Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ admet une solution unique sur J appartenant à $[2,5 ; 10]$.
   Montrer que cette solution est le nombre α défini dans la question **1 c**.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   e. En déduire le nombre entier minimum d'objets à produire pour réaliser un bénéfice.

Baccalauréat ES Antilles–Guyane septembre 2002

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Une étude réalisée sur tous les étudiants d'une université a permis d'établir que 30 % des étudiants possèdent un ordinateur personnel. Parmi les étudiants possédant un ordinateur, 18 % possèdent une automobile.
On sait aussi que 25 % des étudiants de l'université ne possèdent pas d'automobile.
On choisit au hasard un étudiant de cette université.
On note :

- O l'évènement : « L'étudiant possède un ordinateur » ;
- A l'évènement : « L'étudiant possède une automobile » ;
- $p(E)$ la probabilité de l'évènement E, ainsi $p(O) = 0,3$;
- $\overline{E}$ l'évènement contraire de l'évènement E ;
- $p_F(E)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement E par rapport à l'évènement F.

Pour résoudre cet exercice, on pourra s'aider de la notion d'arbre pondéré. Les résultats seront donnés en écriture décimale et arrondis au millième.

1. À l'aide de l'énoncé, préciser : $p_O(\text{A})$ et $p(\overline{A})$.
2. On choisit au hasard un étudiant de cette université.
   a. Calculer la probabilité de l'évènement « L'étudiant possède un ordinateur et une automobile ».
   b. Montrer que la probabilité de l'évènement « L'étudiant possède un ordinateur mais pas d'automobile » est égale à 0,246.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement « L'étudiant ne possède ni ordinateur ni automobile ».
   d. Calculer la probabilité que l'étudiant possède un ordinateur, sachant qu'il n'a pas d'automobile.
3. On choisit trois étudiants au hasard, indépendamment les uns des autres.
   a. Calculer la probabilité pour que les trois étudiants choisis possèdent tous un ordinateur.
   b. Calculer la probabilité pour qu'au moins un des étudiants chosis possèdent un ordinateur.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Dans une situation de monopole sur la production d'un objet, une entreprise le conditionne et en fait la promotion.
Une statistique a été établie pour étudier la liaison entre production et coût de publicité.
Soit q la quantité produite exprimée en centaines, y la part du coût de publicité en pourcentage.

Quantité q_i (centaines)	1	10	20	50	100	150	200
Pourcentage y_i	4,20	3,70	3,30	2,30	1,20	0,65	0,35

Par exemple : Pour une production de 100 objets le coût de publicité est de 4,2 % du coût total.

1. Ci-joint en annexe le nuage de points $\left(q_i\ ;\ y_i\right)$ qui sera rendu avec la copie.
   a. L'équation de la droite de régression de y en q est : $y = -0,02q + 3,71$ (admis).
   Tracer cette droite de régression sur la feuille donnée en annexe représentant le nuage de points.
   b. Quelle serait la part du coût de la publicité à prévoir pour une production de 25 000 objets ?
   Que pensez-vous de l'ajustement effectué à la question précédente ?

2. On considère un nouveau modèle en posant $z = \ln(100y)$.

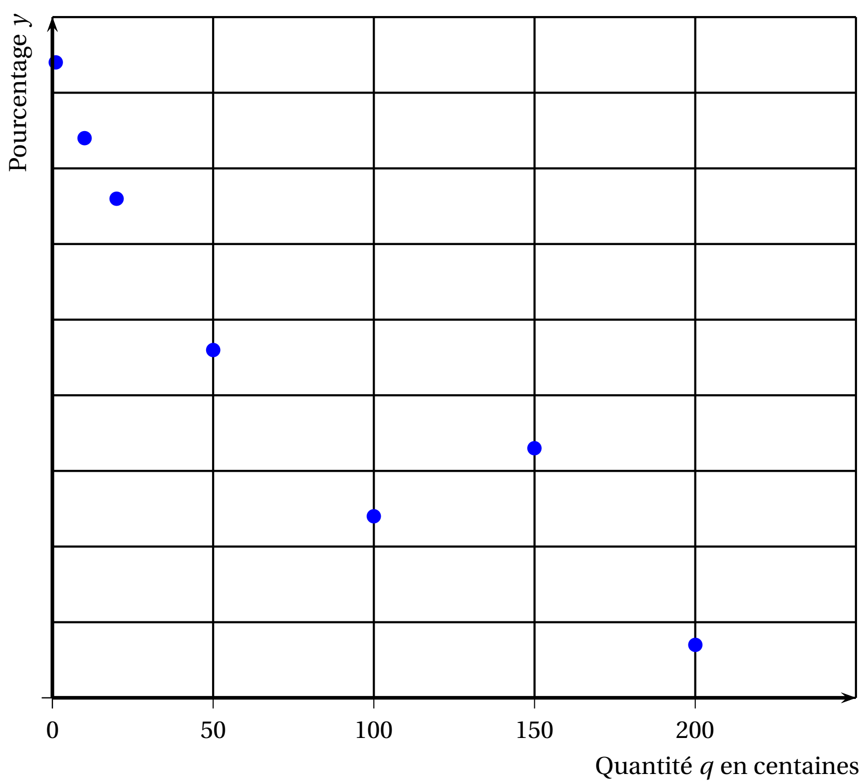
a. Dresser le tableau des valeurs z_i correspondant aux valeurs q_i.
Les valeurs de z_i seront données sous forme décimale arrondie au centième le plus proche.

b. Représenter le nuage de points $(q_i\ ;\ z_i)$ dans un repère (unités graphiques : 1 cm pour 10 centaines en abscisses, 2 cm pour une unité en ordonnées) sur une feuille de papier millimétré.

c. Ce nuage de points montre qu'un ajustement affine est justifié.
Déterminer une équation de la droite de régression de z en q de la forme $z = aq + b$ par la méthode des moindres carrés.
Les calculs faits à l'aide d'une calculatrice ne seront pas justifiés. Les valeurs de a et de b seront données sous forme décimale arrondie au centième le plus proche.

d. Quelle serait la part du coût de la publicité à prévoir pour une production de 25 000 objets ?

Annexe à rendre avec la copie



EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

1. Un capital initial c_0 de 600 euros est placé sur un compte rapportant 5 % d'intérêts annuels. On note c_n le capital acquis au bout de n années (n entier naturel).
   a. Calculer le capital c_{n+1} en fonction de c_n.
   b. En déduire l'expression de c_n en fonction de n.
   c. Trouver le nombre minimal d'années nécessaires pour que le capital ainsi placé ait au moins triplé.
2. Un autre épargnant place également un capital initial de 600 euros au taux annuel de 5 % d'intérêts, et fait un versement supplémentaire de 150 euros à la fin de chaque année. On appelle d_0 le capital initial et d_n le capital ainsi acquis à la fin de la n-ième année.
   a. Calculer d_1, d_2, d_3.
   b. Vérifier que pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = 1,05d_n + 150$.
   c. Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = d_n + 3000$.
   Calculer v_0 et v_1.
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,05$.
   Écrire v_n en fonction de v_0 et de n.
   d. En déduire d_n en fonction de n.
   e. À partir de combien d'années le capital d_n aura-t-il au moins triplé ?

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Soit f la fonction numérique définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par :

$$f(x) = 4 - 3\text{e}^{-2x} + 7x^2.$$

1. Démontrer que f est croissante sur $[0 ; 20]$.
2. Dresser le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0 ; 20]$.

Partie B

Soit h la fonction définie et dérivable sur $[0 ; 20]$ par :

$$h(x) = 85 - 6\text{e}^{-2x} - 14x.$$

1. **a.** Démontrer que pour $x \geqslant 0$ on a $12\text{e}^{-2x} < 14$.
   b. En déduire le sens de variations de h sur $[0 ; 20]$ et dresser son tableau de variations.
2. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet sur $[0 ; 20]$ une solution unique α et que α appartient à l'intervalle $[6 ; 7]$.
3. Montrer qu'une valeur approchée de α à 10^{-2} près est 6,07.
   Dans toute la suite du problème on prendra cette valeur pour α.
4. Déterminer le signe de $h(x)$ sur $[0 ; 20]$.

Partie C

$\star$ **Application économique**
Dans une entreprise, le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euro, de x centaines d'appareils est donné par :

$$C(x) = 4 - 3\text{e}^{-2x} + 7x2 \quad \text{pour} \quad x \in [0 ; 20].$$

1. Sachant qu'un appareil est vendu au prix unitaire de 850 euros, montrer que le bénéfice réalisé par l'entreprise pour x centaines d'appareils produits et vendus, exprimé en milliers d'euros, est donné par l'expression :

$$B(x) = 3\text{e}^{-2x} - 7x^2 + 85x - 4.$$

2. **a.** Étudier le sens de variations de la fonction B sur $[0\,;\,20]$.

b. Déterminez la quantité à produire et à vendre pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal ; préciser cette quantité à l'unité près.

c. Déterminez, à l'aide de la calculatrice, les quantités de pièces à produire et à vendre à l'unité près pour que l'entreprise ne travaille pas à perte (aucune autre justification n'est demandée).

∽ Baccalauréat ES France septembre 2002 ∾

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les résultats des calculs numériques seront arrondis avec deux décimales.

Une entreprise recherche trois personnes expérimentées pour occuper trois postes techniques importants. On a constaté, lors d'embauches précédentes, que parmi les candidats qui peuvent se présenter, 80 % ont les compétences requises pour occuper ces postes. Pour sélectionner les candidats, les recruteurs de l'entreprise élaborent un test. On estime que :

- si une personne est compétente, elle a 85 chances sur 100 de réussir le test ;
- si une personne est incompétente, elle a 20 chances sur 100 de réussir le test.

1. Une personne se présente pour le premier poste. On note

- C l'évènement « la personne est compétente »
- R l'évènement « la personne réussit le test ».
- $\overline{C}$ et $\overline{R}$ désignent les évènements contraires respectifs de C et R.
- Si A et B sont des évènements,

* $p(A)$ est la probabilité de réalisation de A

* $p_B(A)$ est la probabilité de réalisation de A sachant que B est réalisé, notée aussi $p(A/B)$.

a. À l'aide des informations indiquées dans l'énoncé :

Donner les valeurs de $p(C)$ et $p_C(R)$. Donner la probabilité qu'une personne réussisse le test, sachant qu'elle n'est pas compétente.

b. Calculer $p\left(\overline{C}\right)$.

c. Calculer la probabilité qu'une personne réussisse le test et soit compétente.

d. Montrer que $p(R) = 0,72$.

e. Une personne réussit le test. Quelle est la probabilité qu'elle soit compétente ?

2. Trois candidats se présentent pour pourvoir les trois postes.

Ils subi successivement le test de façon indépendante.

On admet que la probabilité de réussite au test est de $0,72$ pour chacun.

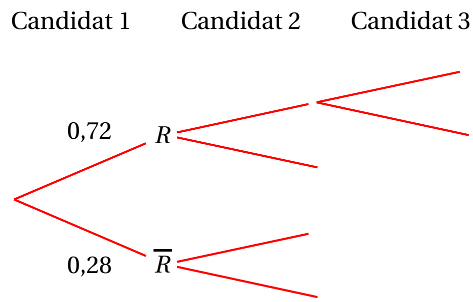
X désigne la variable aléatoire donnant le nombre de candidats, parmi les trois, réussissant le test.

a. On a esquissé ci-dessous un arbre pondéré traduisant la situation.

Recopier cette esquisse sur la copie et la compléter par les branches et les légendes manquantes.

b. Calculer $p(X = 3)$.

c. Calculer la probabilité qu'exactement deux candidats sur les trois réussissent le test.



EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

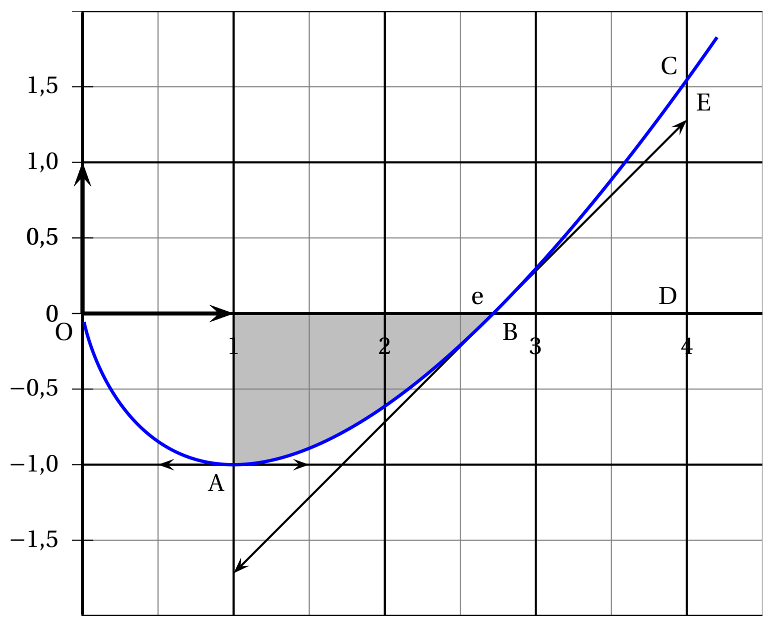
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé :

- la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~-\infty[$;
- deux tangentes à cette courbe : celle au point A d'abscisse 1 et celle au point B d'abscisse e.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A$(1~;~-1)$, B$(\text{e}\,;\,0)$ et C$(4\,;\,f(4))$.

La tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses.

La tangente en B passe par le point E tel que BD = DE, où D est le point de coordonnées $(4\,;\,0)$ et E a pour abscisse 4.



Le nombre e est la base des logarithmes népériens.

1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
   - **a.** Sans justifier, donner $f'(1)$ et $f'(\text{e})$.
   - **b.** Sans justifier, donner les solutions dans $]0\,;\,4[$ de l'inéquation $f(x) < 0$, puis celles de : $f'(x) < 0$.
   - **c.** Soit $\mathscr{A}$, en unités d'aire, une estimation de l'aire de la région colorée, région comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$.

     Parmi les trois nombres suivants : 2,9 ; 1,1 ; 0,6 lequel est la meilleure valeur approchée de $\mathscr{A}$? Justifier la réponse.
2. On suppose que la fonction f précédente est définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x.$$

a. Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f et les valeurs de $f'(1)$ et de $f'(\mathrm{e})$; on ne déterminera pas la limite en $+\infty$.

b. Montrer que la fonction F définie sur $]0\,;4]$ par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right)$$

est une primitive de f sur $]0\,;4]$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Dans un repère orthonormal de l'espace $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ on considère les points A(1 ; 0 ; 2) B(2 ; 1 ; 0) et C(0 ; 1 ; 2)

a. Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

b. Vérifier que le vecteur $\vec{u}\,(1\,;1\,;1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. En déduire une équation cartésienne de ce plan.

d. Quelles sont les coordonnées des points E, F et G intersections du plan (ABC) avec les droites $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\right)$, $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\jmath}\right)$ et $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{k}\right)$?

Représenter les points A, B, C et le triangle EFG dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

e. Soit D le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3\vec{u}$.
Déterminer ses coordonnées, puis le placer sur le graphique.

f. Pourquoi les triangles ABD et ACD sont-ils rectangles en A ?
Démontrer que BCD n'est pas rectangle.

2. Les points A, B, C et D déterminent un solide S à quatre faces triangulaires (tétraèdre) dont trois sont des triangles rectangles.
On considère un jeu où on lance le solide S . Il retombe sur une de ses faces.
On a perdu si cette face est un triangle rectangle et on a gagné dans le cas contraire.
Une étude statistique a montré que l'on avait deux fois plus de chances de perdre que de gagner.

a. On lance le solide S une fois.
Quelle est alors la probabilité que S retombe sur la face (BCD) ?

b. On lance le solide S quatre fois, les lancers étant indépendants.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois la face (BCD) ?
(On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.)

PROBLÈME **9 points**

Commun à tous les candidats

La partie C est indépendante des parties A et B.

Partie A

Soit h la fonction polynôme du second degré définie sur $[0\,;1]$ par

$$h(x) = (\mathrm{e}-1)x^2 - 2(\mathrm{e}-1)x + 1,$$

la constante e désignant la base des logarithmes népériens ($\mathrm{e} \approx 2,718$).

1. Montrer que h est strictement décroissante sur $[0\,;1]$.

2. Justifier le fait que h s'annule une fois et une seule entre 0 et 1. On note α le nombre réel qui vérifie $h(\alpha) = 0$.
3. En utilisant les résultats des questions précédentes, préciser le signe de $h(x)$ sur $[0;1]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0;\,1]$ par

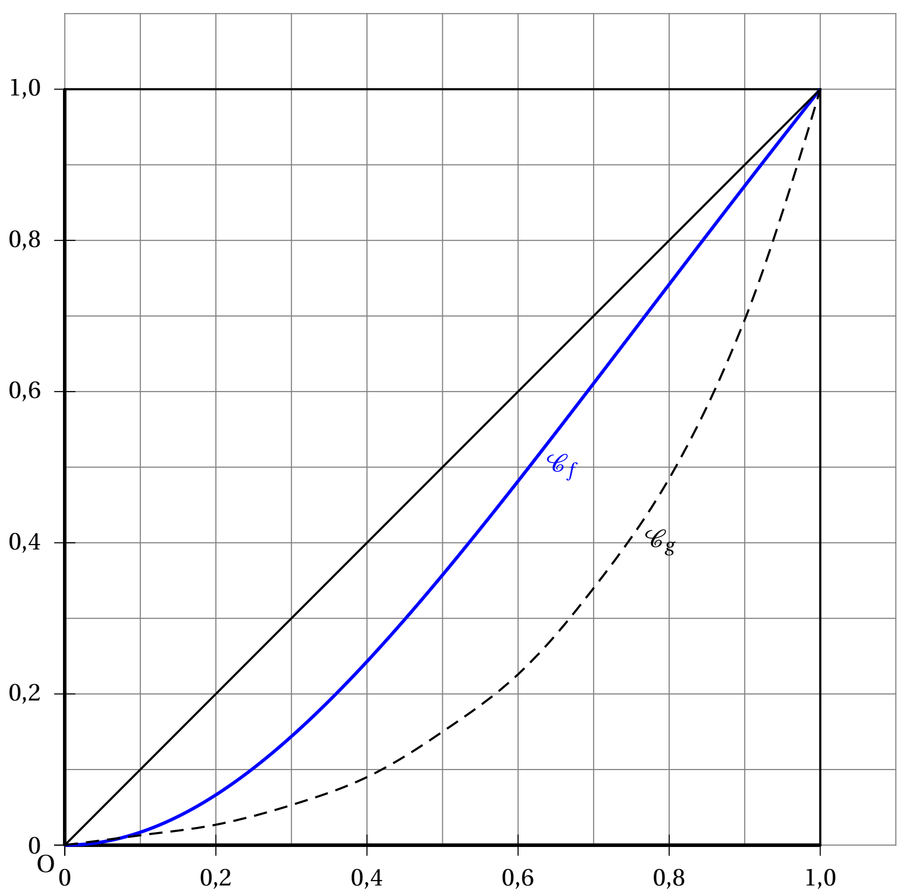
$$f(x) = \ln\left[(\mathrm{e}-1)x^2 + 1\right]$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique 10 cm).

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Étudier les variations de f sur $[0;\,1]$.
3. On veut préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$.
   Pour cela, on étudie les variations de la fonction définie sur $[0;\,1]$ par $d(x) = x - f(x)$.
   a. Montrer que $d'(x) = \dfrac{h(x)}{(\mathrm{e}-1)x^2+1}$ où h est la fonction étudiée dans la **partie A**.
   b. Étudier le sens de variation de d sur $[0;\,1]$.
   c. Calculer $d(0)$ et $d(1)$.
   d. Déduire de ce qui précède le signe de $d(x)$ sur $[0;\,1]$.
   Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite D.

Partie C

Sur le graphique ci-dessous sont représentées la droite d'équation $y = x$, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f étudiée dans la **partie B** et la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative d'une nouvelle fonction g.



Les courbes représentant f et g illustrent ici respectivement la répartition des salaires dans deux entreprises A et B.
En abscisses, x représente le pourcentage cumulé (sous forme décimale) des personnes ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de chaque entreprise ; par exemple si l'on veut considérer les 60 % les moins bien payés de l'ensemble des salariés d'une entreprise, on choisira $x = 0,6$.
En ordonnées, $f(x)$ (ou $g(x)$) représente le pourcentage (sous forme décimale) de la masse salariale totale affectée aux t % les moins bien payés des salariés de chaque entreprise, avec $\dfrac{t}{100} = x$.
Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont des courbes de Lorenz.

1. Déterminer graphiquement (avec la précision permise par le dessin), pour chaque entreprise, une valeur approchée du pourcentage de la masse salariale affectée aux 60 % des salariés les moins bien payés.
2. Déterminer graphiquement (avec la précision permise par le dessin), pour chaque entreprise, une valeur approchée du pourcentage des salariés les moins bien payés dont la masse des salaires représente 60 % de la masse salariale totale.
3. Dans quelle entreprise la distribution des salaires est-elle la plus irrégulièrement répartie ?

∽ Baccalauréat ES Polynésie septembre 2002 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

On peut traiter la question 4 *sans avoir traité les questions précédentes.*

Pour un achat immobilier, lorsqu'une personne emprunte une somme de 50 000 euros, remboursable par n mensualités chacune égale à A euros, pour un intérêt mensuel de 0,4 %, le montant de cette mensualité A est donné par :

$$A = \frac{200}{1-(1,004)^{-n}}$$

(*on ne demande pas d'établir cette relation*).

1. Calculer la mensualité A lorsque cette personne emprunte 50 000 euros remboursables par 120 mensualités pour un intérêt mensuel de 0,4 %. On donnera une valeur arrondie au centime d'euro.

Calculer alors le montant total des intérêts pour ce prêt.

2. Mêmes questions avec un emprunt de 50 000 euros sur 8 ans à 0,4 % mensuel.

3. Afin de payer le moins d'intérêts possible, l'emprunteur doit augmenter le montant de la mensualité et diminuer la période de remboursement. Mais il ne peut supporter au maximum que des remboursements de 950 euros par mois.

a. Résoudre dans $[0 ;\ +\infty[$ l'inéquation

$$\frac{200}{1-(1,004)^{-x}} \leqslant 950.$$

b. En déduire le nombre entier n minimum de mensualités pour lequel le montant de la mensualité A est inférieur ou égal à 950 euros.

Que vaut alors A arrondi au centime d'euro ? Calculer alors le montant total des intérêts.

4. Voici des extraits du tableau d'amortissement d'un prêt de 50 000 euros remboursable par 60 mensualités pour un intérêt de 0,4 %.

Calculer, en détaillant, les nombres a, b, c, d et e qui figurent dans le tableau.

On donnera des valeurs arrondies au centime d'euro.

Nº de la mensualité	Montant de la mensualité en euros	Part des intérêts en euros pour cette mensualité	Capital amorti en euros	Capital restant à rembourser en euros
1	938,99	200,00	738,99	49 261,01
2	938,99	197,04	a	b
3	938,99	c	d	e
4	938,99	191,10	747,89	47 026,26
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
59	938,99	7,47	931,52	935,25
60	938,99	3,74	935,25	0

EXERCICE 2 **5 points**

Un stock de champignons est constitué de trois variétés de champignons conditionnés en barquettes.
Ces barquettes proviennent exclusivement de France ou d'Italie.
Ce stock est composé à 50 % de barquettes de cèpes, à 30 % de barquettes de girolles et à 20 % de barquettes de morilles.

15 % des barquettes de cèpes proviennent d'Italie.
20 % des barquettes de girolles proviennent d'Italie.
40 % des barquettes de morilles proviennent d'Italie.
On choisit une barquette de ce stock au hasard.
On notera les évènements suivants :

— C : « La barquette choisie contient des cèpes » ;
— G : « La barquette choisie contient des girolles » ;
— M : « La barquette choisie contient des morilles » ;
— I : « La barquette choisie provient d'Italie » ;
— F : « La barquette choisie provient de France ».

1. Quelle est la probabilité que la barquette choisie contienne des cèpes et provienne de France ?
2. Montrer que la probabilité que la barquette choisie provienne d'Italie est $0,215$.
3. Quelle est la probabilité que la barquette choisie contienne des cèpes sachant que cette barquette provient d'Italie ? On donnera une valeur arrondie à 10^{-3}.
4. La barquette choisie provient de France. Quelle est la probabilité que ce soit une barquette de girolles ? On donnera une valeur arrondie à 10^{-3}.

PROBLÈME **11 points**

Le tableau ci-dessous donne le taux d'équipement en magnétoscope des couples avec enfant(s) d'une certaine région française de 1980 à 2000 tous les quatre ans.
Dans ce tableau, x_i représente l'expression : $\dfrac{a_i - 1980}{4}$.

Année a_i	1980	1984	1988	1992	1996	2000
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5
Taux y_i en %	5	8	24	50	77	88

Par exemple, 5 % des couples avec enfant(s) de cette région possède un magnétoscope en 1980.

Partie A
Ajustement affine

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm par rang d'année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 % sur l'axe des ordonnées).

1. Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique et placer celui-ci sur le graphique précédent.
3. Dans toute cette question, aucun détail des calculs n'est demandé Les résultats pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice ; ils seront arrondis à 10^{-2}.
   Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   Représenter cette droite sur le graphique précédent.
   On suppose que le modèle obtenu à la **question 3** reste valable pour les années suivantes.
   Déterminer, par le calcul, en quelle année ce taux dépassera 95 %.

Partie B
Ajustement logistique

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{100}{1 + k\mathrm{e}^{bx}}.$$

où k et b sont des constantes à déterminer.

1. Déterminer par le calcul les valeurs exactes de k et b pour que la courbe représentative de f passe par les points $\text{M}(0\,;5)$ et $\text{N}(3\,;50)$.

Donner une valeur de b arrondie à l'unité.

2. Dans toute cette question, on pose :

$$f(x) = \frac{100}{1+19\text{e}^{-x}}$$

et on admettra que $f(x)$ représente le taux d'équipement en magnétoscope des couples avec enfant(s) de cette région pour l'année de rang x.

a. Montrer que la droite d'équation $y = 100$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$. Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote.

b. Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x)$ est du signe de e^{-x}.

En déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de f.

c. Tracer la courbe représentative de f sur le graphique de la **partie A**.

d. Résoudre l'inéquation : $f(x) \geqslant 95$. Interpréter ce résultat en terme de taux d'équipement.

e. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, on a $f(x) = \dfrac{100\text{e}^{x}}{19+\text{e}^{x}}$.

f. En déduire une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

g. On assimile le taux moyen d'équipement prévisible avec ce modèle logistique entre les années 2000 et 2008 à la valeur moyenne de la fonction f sur $[5\,;7]$.

Calculer ce taux moyen d'équipement prévisible entre les années 2000 et 2008. On en donnera une valeur arrondie à 10^{-2}.

Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2002

EXERCICE 1 **5 points**

1. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x+1) - \ln(x).$$

Montrer que, pour tout $x > 0$: $g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Étudier le signe de $g(x)$.

Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

Démontrer que la fonction G, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$G(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x),$$

est une primitive de g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + 2 + \ln(x+1) - \ln(x),$$

et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan (unité graphique : 1 cm). On ne demande pas de tracer $(\mathscr{C})$.

En utilisant les résultats du **1.**, justifier les affirmations suivantes :

a. l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$;

b. la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$;

c. la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de la droite (D).

3. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \left[f(x) - (x+2)\right]\,\mathrm{d}x$.

Quelle interprétation géométrique peut-on faire de cette intégrale ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Pour compléter le financement d'un voyage scolaire, une association de parents d'élèves décide d'organiser une loterie. Pour cela, il faut une roue partagée en quatre secteurs de même dimension (voir figure ci-dessous) et deux urnes A et B.

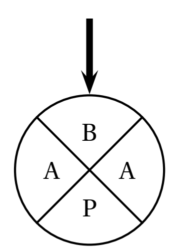
L'urne A contient une boule jaune et trois boules noires et l'urne B contient trois boules jaunes et une boule noire.

Le jeu se déroule de la manière suivante : le candidat fait tourner la roue qui, étant lancée, s'arrête de façon aléatoire, la flèche ne pouvant indiquer qu'un seul secteur (tous les secteurs ont donc la même chance de « sortir »).

— si le candidat obtient la lettre P, il a perdu et le jeu est fini ;

— s'il obtient la lettre A, il tire une boule dans l'urne A ;

— s'il obtient la lettre B, il tire une boule dans l'urne B



On note P, A, B, J et N les évènements suivants :

P : « à l'issue du lancer de la roue, on a obtenu la lettre P » ;

A : « à l'issue du lancer de la roue, on a obtenu la lettre A » ;

B : « à l'issue du lancer de la roue, on a obtenu la lettre B » ;

J : « on a tiré une boule jaune » ;

N : « on a tiré une boule noire ».

Dans cet exercice les probabilités seront donnée sous forme de fractions irréductibles.

1. Donner la probabilité des évènements A, B et P.
2. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
3. **a.** Sachant que lors du lancer de la roue on a obtenu la lettre A, quelle est la probabilité de tirer une boule jaune ?

   b. En déduire la probabilité de l'évènement $A \cap J$.
4. Un joueur fait une partie.

   Quelle est la probabilité qu'à l'issue du lancer de la roue il obtienne la lettre B et qu'il tire une boule jaune ?

   Déduire des questions précédentes que la probabilité que le joueur tire une boule jaune est $\dfrac{5}{16}$.
5. Un joueur fait deux parties consécutivement, les deux parties étant indépendantes l'une de l'autre. Quelle est la probabilité que ce joueur tire exactement deux boules jaunes ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

On dispose d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et de deux urnes, l'une marquée de la lettre F et l'autre marquée de la lettre P.

1. Chacune des deux urnes contient 6 boules. L'urne marquée F contient 5 boules blanches et 1 boule noire alors que l'urne marquée P contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

   On lance la pièce de monnaie :

   — si on obtient « face », on tire une boule dans l'urne marquée F.

   — si on obtient « pile », on tire une boule dans l'urne marquée P.

   On note P, F, B et N les évènements suivants :

   P : « on a obtenu pile au lancer de la pièce » ;

   F : « on a obtenu face au lancer de la pièce » ;

   B : « on a tiré une boule blanche » ;

   N : « on a tiré une boule noire ».

   Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche sachant qu'on a obtenu « face » au lancer de la pièce.

   En déduire la probabilité d'obtenir « face » au lancer de la pièce et de tirer une boule blanche.

   Calculer la probabilité de l'évènement $B \cap P$.

   Déduire des questions précédentes que la probabilité de tirer une boule blanche est $\dfrac{7}{12}$.
2. On effectue la même expérience aléatoire, les deux urnes contenant à présent $2n$ boules, n étant un entier naturel non nul. L'urne marquée P contient $(2n-1)$ boules blanches et 1 boule noire alors que l'urne marquée P contient $(n-1)$ boules blanches et $(n+1)$ boules noires.

   Montrer que la probabilité de tirer une boule blanche est : $\dfrac{3n-2}{4n}$.
3. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \dfrac{3n-2}{4n}$ pour tout n entier naturel non nul.

   a. Déterminer la limite, quand n tend vers plus l'infini, de la suite (u_n).

   b. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{4n(n+1)}$.

   Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (u_n).

PROBLÈME **10 points**

Un négociant en vins a fait mener une étude visant à déterminer à quel prix maximal ses clients sont prêts à acheter une bouteille de vin. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Prix maximal x_i en euros de la bouteille	5	10	15	20	25	30
Pourcentage y_i d'acheteurs potentiels	84	58	30	19	7	4

On voit dans ce tableau, par exemple, que 58 % des clients de ce négociant sont prêts à payer 10 euros une bouteille de vin.

Partie A (Ajustement affine)

1. **a.** Représenter le nuage de points correspondant à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal du plan (unités : 1 cm pour 2 euros sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 5 % sur l'axe des ordonnées).

   b. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.

2. **a.** Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur arrondie à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$. Un ajustement affine est-il judicieux ?

   b. Donner une équation de la droite de régression de y en x, par la méthode des moindres carrés, les coefficients étant calculés à l'aide de la calculatrice et arrondis à 10^{-2} près.

   Représenter la droite sur la figure du **1.**, en précisant les coordonnées de deux points de cette droite.

3. Chez ce négociant, le prix moyen d'une bouteille est de 13 euros. En utilisant l'ajustement précédent, calculer le pourcentage des clients prêts à acheter une bouteille à ce prix. On arrondira le résultat à l'entier le plus proche.

Partie B (Autre ajustement)

On envisage un ajustement du nuage de points de la **partie A** par la courbe représentative d'une fonction. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \left(x^2 + 20x + 100\right)\mathrm{e}^{-0,2x}$$

et $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère de la **partie A**.

1. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 + 20x + 100\right)\mathrm{e}^{-0,2x} = 0$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

2. **a.** f' étant la dérivée de la fonction f, montrer que pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$:

   $$f'(x) = \left(-0,2x^2 - 2x\right)\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

   b. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x \in [0\ ;\ +\infty[$.

   c. En déduire les variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. **a.** Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera les valeurs arrondies à 10^{-1} près)

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$		82,8					

   b. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère de la **partie A**.

4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 50$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[10\,;\,15]$.

   b. Donner, en justifiant la réponse, un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

   c. Que représente α pour le négociant, si on admet que la fonction f représente un bon ajustement du nuage de points ?

∾ Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2002 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Pierre se rend à une salle de jeux pour s'adonner à son jeu électronique favori.
Chaque partie de ce jeu est un duel entre Pierre et un adversaire virtuel choisi aléatoirement par la machine.
La machine choisit comme adversaire soit ATAR soit BLUT, avec la même probabilité $\frac{1}{2}$.
La probabilité pour que Pierre soit vainqueur contre ATAR est égale à $\frac{1}{4}$.
La probabilité pour que Pierre soit vainqueur contre BLUT est égale à $\frac{2}{5}$.
On appelle :
A l'évènement : « Pierre combat ATAR »,
B l'évènement : « Pierre combat BLUF »,
V l'évènement : « Pierre est vainqueur ».

1. **Pierre joue une partie.**
   a. Calculer $p(A \cap V)$
   b. Calculer $p(B \cap V)$.
   c. En déduire que $p(V) = 0,325$.
2. **Étude de la dépense occasionnée si Pierre joue plusieurs parties.**
   Pierre paie un euro par partie, or il n'a que quatre euros en poche.
   Il joue une première fois. S'il est vainqueur, il arrête. Sinon il joue une deuxième fois. S'il est vainqueur, il arrête. Sinon il joue une troisième fois.
   S'il est vainqueur, il arrête. Sinon il joue une quatrième fois. Après cette éventuelle quatrième partie, il doit s'arrêter, quel qu'en soit le résultat.
   On suppose que les résultats de parties successives sont indépendants.

   a. À l'aide d'un arbre pondéré, décrire toutes les situations possibles.
   b. On appelle X la variable aléatoire égale à la dépense de Pierre, en euros.
   Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X. Écrire les résultats avec trois décimales.

Dépense x_i	1	2	3	4
p$(X = x_i)$				

   c. Calculer l'espérance mathématique de X que l'on donnera avec deux décimales.

EXERCICE 2 **4 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Le tableau suivant donne la population de l'an 2000 en millions d'habitants et le taux d'évolution annuel de cette population dans quelques pays européens.

Pays	France (sans les DOM-TOM)	Royaume-Uni	Russie
Taux d'évolution annuel en	0,4	0,2	$-0,5$
Population en 2000 (en millions)	56,6	59,8	147

Source : TEF

1. Soit U_n le nombre d'habitants prévu pour l'année $(2000 + n)$ dans un pays donné.
   On suppose que le taux d'évolution annuel est constant et on le note t %.
   a. Calculer U_{n+1} en fonction de U_n et de t.

b. Préciser la raison de cette suite géométrique (U_n).

c. En déduire l'expression de U_n en fonction de t, n et U_0.

2. Prévisions à partir des données du tableau :

On suppose que les taux d'évolution annuels de chaque pays restent constants après l'an 2000 et on note F_n, B_n et R_n les populations, en millions d'habitants prévues pour l'année $(2000+n)$ respectivement en France, au Royaume-Uni et en Russie.

a. Calculer F_n, B_n et R_n en fonction de n .

b. Quelle sera la population de la France en 2010 ?

c. À partir de quelle année la population de la Russie sera-t-elle inférieure à 140 millions ?

3. Comparaisons pays par pays.

a. Justifier que $F_n \geqslant B_n$ si et seulement si $n \geqslant \dfrac{\ln(59,8)-\ln(56,6)}{\ln(1,004)-ln(1,002)}$.

b. En déduire l'année à partir de laquelle la population de la France dépassera celle du Royaume-Uni.

EXERCICE 2 **4 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Une personne place, le 1er janvier 2001, sur un compte rémunéré à intérêts composés au taux annuel de 4 %, une somme de a euros.
De plus, chaque 1er janvier des années suivantes, c'est-à-dire au le 1er janvier 2002, 1er janvier 2003, ..., etc, elle place sur ce compte la somme de 1 000 euros.
On pose $U_0 = a$. Plus généralement, pour tout entier naturel n, on appelle U_n la somme disponible sur le compte, le 1er janvier de l'année $(2001 + n)$.

1. a. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} = 1,04U_n + 1\,000$.

b. Montrer que cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. Optimisation du placement sur une durée de quatre ans.

On pose $V_n = U_n + 25\,000$.

a. Vérifier que la suite V_n est géométrique, de raison 1,04. Préciser son premier terme en fonction de a.

b. Exprimer V_n en fonction de a et n.

c. En déduire que, pour tout entier n : $U_n = 1,04^n \times (a+25\,000)-25\,000$.

3. Optimisation du placement sur une durée de quatre ans

Calculer à 0,01 euro près le placement initial minimal a permettant de disposer sur ce compte, le 1er janvier 2005, d'une somme d'au moins 15 000 euros.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \frac{10\text{e}^x}{\text{e}^x+4}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   En écrivant $f(x) = 10 - \dfrac{40}{\text{e}^x + 4}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

   En déduire les équations des asymptotes à $(\mathscr{C})$.

   b. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de f.

   c. Étudier les variations de f.

   d. Dresser son tableau de variations.
2. Déterminer une équation de la tangente (D), à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $\ln 4$.
3. Tracer sur un même graphique, la courbe $(\mathscr{C})$, ses asymptotes et la droite (D).

Partie B

Une entreprise fabrique un certain produit P. On appelle x le nombre de tonnes de P fabriquées.
On note $C(x)$ leur coût total de fabrication, exprimé en milliers d'euro.
La fonction coût marginal, C', est la dérivée de la fonction C.
Pour tout $x \in [0~;~+\infty[$, on a : $C'(x) = f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la **partie A**. De plus, on suppose qu'il n'y a pas de charges fixes, donc que $C(0) = 0$.

1. **a.** Montrer que le coût total est donné par :

$$C(x) = \int_0^x f(t)\,\text{d}t.$$

   b. Exprimer $C(x)$ en fonction de x.

   c. Quel est le coût total de 5 tonnes de ce produit P ? On en donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la dizaine d'euro près.
2. On appelle $C_M(x)$ le coût moyen défini, pour tout x strictement positif, par : $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

   a. Exprimer $C_M(x)$ en fonction de x.

   b. Vérifier que, pour tout $x > 0$, $C_M(x) = 10 + \dfrac{10\ln\left(1 + 4\text{e}^{-x}\right)}{x} - \dfrac{10\ln 5}{x}$.

   c. En déduire la limite de $C_M(x)$ en $+\infty$.