# Baccalauréat ES 2003

# L'intégrale de mars 2003 à mars 2004

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

# Baccalauréat ES Pondichéry mars 2003

**EXERCICE 1** **5 points**

Un pisciculteur possède un bassin qui contient trois variétés de truites : communes, saumonées et arc-en-ciel. Il voudrait savoir s'il peut considérer que son bassin contient autant de truites de chaque variété. Pour cela il effectue, au hasard, 400 prélèvements d'une truite avec remise et obtient les résultats suivants :

| Variété | Commune | Saumonée | Arc-en-ciel |
|---|---|---|---|
| Effectifs | 146 | 118 | 136 |

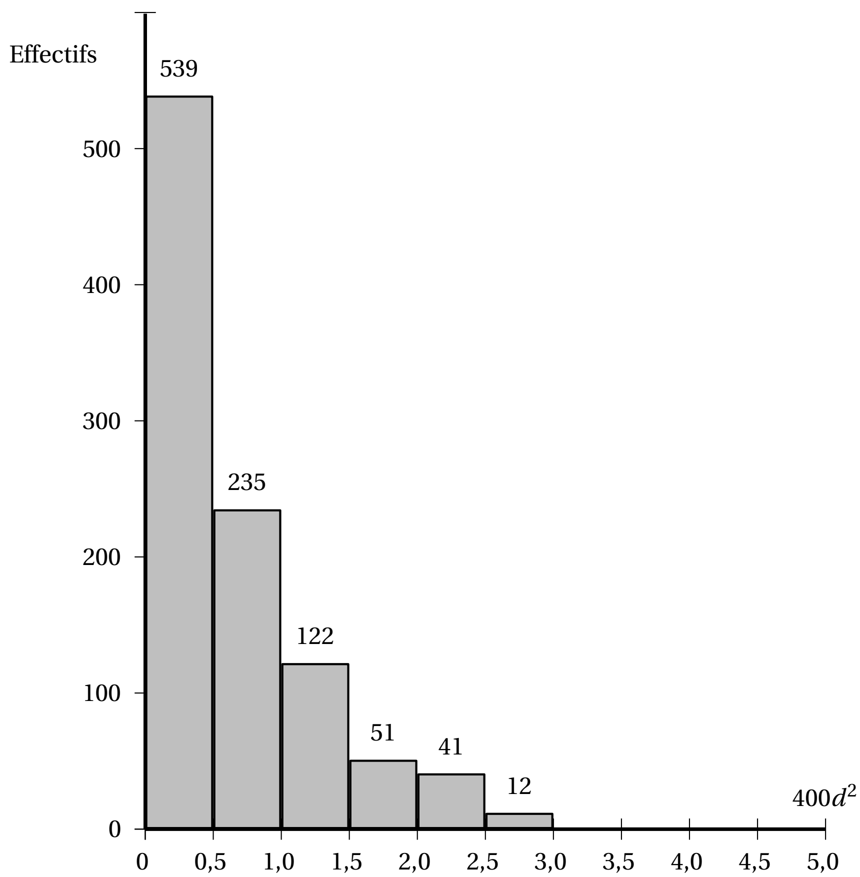
**1.** **a.** Calculer les fréquences de prélèvement $f_c$ d'une truite commune, $f_s$ d'une truite saumonée et $f_a$ d'une truite arc-en-ciel. On donnera les valeurs décimales exactes.

**b.** On pose $d^2 = \left(f_c - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(f_s - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(f_a - \dfrac{1}{3}\right)^2$.

Calculer $400d^2$ arrondi à $10^{-2}$ ; on note $400d^2_{\text{obs}}$ cette valeur.

À l'aide d'un ordinateur, le pisciculteur simule le prélèvement au hasard de 400 truites suivant la loi équirépartie. Il répète 1 000 fois cette opération et calcule à chaque fois la valeur de $400d^2$.

Le diagramme à bandes ci-dessous représente la série des 1 000 valeurs de $400d^2$, obtenues par simulation.




**2.** Déterminer une valeur approchée à 0,5 près par défaut, du neuvième décile D9 de cette série.

**3.** En argumentant soigneusement la réponse dire si on peut affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 10 % que « le bassin contient autant de truites de chaque variété ».

**4.** On considère désormais que le bassin contient autant de truites de chaque variété. Quand un client se présente, il prélève au hasard une truite du bassin.

Trois clients prélèvent chacun une truite. Le grand nombre de truites du bassin permet d'assimiler ces prélèvements à des tirages successifs avec remise.

Calculer la probabilité qu'un seul des trois clients prélève une truite commune.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

À l'issue d'une compétition, des sportifs sont contrôlés par un comité antidopage qui doit se prononcer sur leur positivité ou négativité au dopage. Or, d'une part certains produits dopants restent indétectables aux contrôles, d'autre part certains médicaments ont un effet de dopage inconnu du sportif; le comité prend donc sa décision avec un risque d'erreur. On note

$D$ l'évènement « le sportif est dopé »,
$O$ l'évènement « le sportif est déclaré positif ».
$E$ l'évènement « le comité a commis une erreur ».

**1.** Dans cette question, on suppose que parmi les sportifs 50 % ne sont pas dopés et que *la probabilité d'être déclaré positif est indépendante de l'état réel du sportif* (dopé ou non dopé).

Lors d'une étude sur des compétitions antérieures on a pu observer que ce comité déclarait positifs 20 % des sportifs. On choisit un sportif au hasard. Calculer

- la probabilité que le sportif soit non dopé et déclaré positif;
- la probabilité que le sportif soit dopé et déclaré négatif;
- la probabilité de l'évènement $E$.

**2.** Dans cette question, on note $p$ la fréquence des dopés parmi les sportifs contrôlés.

On suppose que la probabilité d'être déclaré positif n'est pas la même selon que le sportif est réellement dopé ou non,

- la probabilité qu'un sportif dopé soit déclaré positif est $0,9$;
- la probabilité qu'un sportif non dopé soit déclaré positif est $0,1$.

On choisit un sportif au hasard.

**a.** Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

**b.** Calculer la probabilité de $E$.

**c.** Calculer, en fonction de $p$, la probabilité que ce sportif soit déclaré positif.

**d.** On s'intéresse à la probabilité qu'un sportif ayant été déclaré positif soit réellement dopé.

Montrer que cette probabilité, notée $f(p)$, est définie par $f(p) = \dfrac{0,9p}{0,8p+0,1}$.

Résoudre l'inéquation $f(p) > 0,9$. Interpréter ce résultat.

**PROBLÈME** **11 points**

**Commun à tous les candidats**

Ce problème a pour objectif d'étudier le prix d'équilibre entre l'offre et la demande d'un objet donné, dans une situation de concurrence parfaite.

### Partie A : étude de la demande

On suppose que le prix unitaire qu'acceptent de payer les consommateurs en fonction de la quantité $x$ disponible sur le marché est modélisé par la fonction $g$ définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{50}{x^2+x+1}.$$

Le prix unitaire $g(x)$ est exprimé en euros et la quantité $x$ en millions d'objets.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. **a.** Calculer $g'(x)$.
   **b.** Étudier les variations de $g$ sur $[0\,;\,+\infty[$ et donner le tableau de variations.
3. Soit $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de $g$ dans un repère orthogonal du plan. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse nulle.
4. Tracer T et $\mathscr{C}_g$ (unités graphiques : 2 cm pour une unité en abscisses, 2 cm pour 10 unités en ordonnées).

**Partie B : étude de l'offre**

Les producteurs acceptent de fabriquer une quantité $x$ exprimée en millions d'objets si le prix unitaire de l'objet atteint une valeur minimale. On suppose que ce prix minimal (qui dépend de la quantité $x$) est modélisé par la fonction $f$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 3\mathrm{e}^{0,26x}.$$

Le prix unitaire $f(x)$ est exprimé en euros.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. étudier les variations de $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. Tracer $\mathscr{C}_f$ dans le même repère que $\mathscr{C}_g$.

**Partie C : Recherche du prix d'équilibre**

Dans un marché à concurrence parfaite, la « loi de l'offre et de la demande » tend à dégager un prix d'équilibre $p_0$ pour lequel l'offre des producteurs est égale à la demande des consommateurs. On appelle $q_0$ la quantité associée à $p_0$.

1. Déterminer graphiquement un encadrement entre deux entiers consécutifs d'une part du prix d'équilibre $p_0$ et d'autre part de la quantité associée $q_0$.
2. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$ pour tout $x$ de $[0\,;\,+\infty[$.
   **a.** Déduire des parties A et B le sens de variations de sur $[0\,;\,+\infty[$.
   **b.** Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $q_0$ sur $[2\,;\,3]$.
   **c.** Donner à l'aide de la calculatrice une valeur arrondie à $10^{-2}$ de $q_0$.
3. Calculer une valeur approchée du prix d'équilibre $p_0$. On donnera le résultat arrondi à $10^{-2}$ près.

**Partie D : Surplus des producteurs**

On appelle surplus des producteurs le gain supplémentaire que réalisent les producteurs en vendant au prix $p_0$. Il est obtenu à partir de l'expression :

$$S_p = p_0q_0 - \int_0^{q_0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il est exprimé en millions d'euros.

1. Donner une interprétation graphique de $S_p$, (on interprétera $p_0q_0$ comme l'aire d'un rectangle).
2. **a.** Calculer $S_p$ en fonction de $p_0$ et $q_0$.
   **b.** Déterminer une valeur arrondie à $10^{-1}$ de $S_p$ exprimée en millions d'euros.

# ∽ Baccalauréat série ES Amérique du Nord juin 2003 ∾

**EXERCICE 1** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

*Aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé dans cet exercice.*
Dans un magasin, le nombre annuel de ventes d'un appareil électroménager, relevé pendant 6 années, est donné par le tableau suivant :

| Année | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Nombre d'appareils $y_i$ | 623 | 712 | 785 | 860 | 964 | 1 073 |

1. **a.** Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points $M\left(x_i,\ y_i\right)$ en prenant comme unités graphiques : 2 cm pour 1 rang en abscisses et 1 cm pour 50 appareils en ordonnées, en commençant à la graduation 600.
   **b.** Calculer, en donnant les résultats arrondis à $10^{-2}$, les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point sur le graphique.
2. **a.** Calculer, en donnant les résultats arrondis à $10^{-2}$, les coordonnées du point moyen $G_1$ du nuage formé par les points $M_1$, $M_2$ et $M_3$, puis les coordonnées du point moyen $G_2$ du nuage formé par les points $M_4$, $M_5$ et $M_6$.
   **b.** Placer les points $G_1$ et $G_2$ sur le graphique et déterminer, avec des coefficients arrondis à $10^2$, une équation de la droite $(G_1G_2)$.
   **c.** En utilisant cette droite comme droite d'ajustement affine, déterminer le nombre d'appareils que l'on peut prévoir vendre en 2004.
3. On sait maintenant que le nombre d'appareils vendus en 2002 est de 1 125.
   **a.** Ajouter le point $M_7(7\,;\,1\,125)$ sur le graphique précédent.
   **b.** On considère alors le nouveau nuage formé des points $M_i$, $2 \leqslant i \leqslant 7$ (le nombre annuel de ventes de l'année 1996 n'est plus pris en compte).
   Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à $10^{-2}$).
   **c.** En utilisant cet ajustement, quel nombre d'appareils peut-on prévoir vendre en 2004 ?

**EXERCICE 2** **5 points**
**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Une petite entreprise de textile commercialise des nappes et des lots de serviettes assorties. Quand un client se présente, il achète au plus une nappe et un lot de serviettes.

1. La probabilité pour qu'un client achète la nappe est 0,2. La probabilité pour qu'un client achète le lot de serviettes quand il a acheté la nappe est 0,7 et la probabilité qu'il achète le lot de serviettes quand il n'a pas acheté la nappe est 0,1.
   **a.** On note N l'évènement « un client achète la nappe ». On note S l'évènement « un client achète le lot de serviettes ». Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
   **b.** Montrer que la probabilité de l'évènement $N \cap S$ est égale à 0,14.
   **c.** Calculer la probabilité de l'évènement S.
   **d.** Calculer la probabilité pour qu'un client achète au moins l'un des deux articles.
2. La nappe est vendue 125 euro et le lot de serviettes 45 €.

**a.** Établir en reproduisant sur la copie le tableau suivant, la loi de probabilité : « dépense d'un client ».

| Dépense (en euro) | 0 | 45 | 125 | 170 |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité | | | | |

**b.** Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Donner l'interprétation concrète de ce nombre.

**3.** On rappelle que la probabilité pour qu'un client achète l'ensemble nappe et serviettes est $0,14$. On choisit trois clients au hasard. On suppose que le nombre de clients est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à un tirage successif avec remise. Quelle est la probabilité qu'un seul client ait acheté un ensemble nappe et serviettes ?

## EXERCICE 2 — 5 points

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Soit le graphe G joint en annexe constitué des sommets A, B, C, D, E, F et G.

**1.** Quel est son ordre et le degré de chacun de ses sommets ?

**2.** Reproduire sur la copie et compléter le tableau des distances entre deux sommets de G :

| Distance | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | × | | | | | | |
| B | × | × | | | | | |
| C | × | × | × | | | | |
| D | × | × | × | × | | | |
| E | × | × | × | × | × | | |
| F | × | × | × | × | × | × | |
| G | × | × | × | × | × | × | × |

En déduire le diamètre de ce graphe.

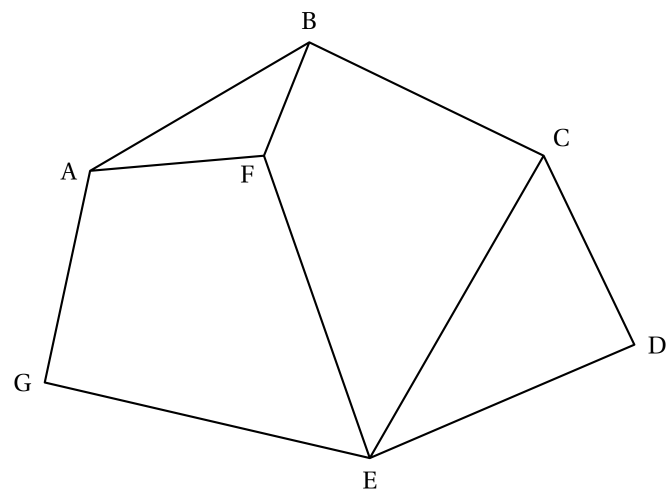
**3.** **a.** Donner un sous-graphe complet d'ordre 3 de G.
Qu'en déduire pour le nombre chromatique de G ?

**b.** Proposer une coloration du graphe G et en déduire son nombre chromatique.

**4.** Donner la matrice M associée à G (vous numéroterez les lignes et les colonnes dans l'ordre alphabétique).

**5.** En utilisant la matrice $M_2$ donnée en annexe 1, déduire le nombre de chaînes de longueur 2 partant de A sans y revenir.

**Annexe 1 : exercice 2**




$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**PROBLÈME** **10 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b + 3\ln(x+1)$$

où $a$ et $b$ désignent deux réels que l'on déterminera dans la question **2.**. On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. La figure de l' annexe représente une partie de cette courbe donnée par une calculatrice graphique.

$\mathscr{C}_f$ vérifie les conditions suivantes :

elle passe par le point A(0 ; 5) et elle admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

1. En utilisant les données de l'énoncé, que peut-on dire du sens de variation de $f$ ?
2. Déterminer $a$ et $b$.

**Partie B**

On suppose désormais que la fonction $f$ est définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1).$$

1. **a.** Calculer la limite de $f$ en $-1$. Interpréter graphiquement le résultat.

**b.** En admettant que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0$, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

**2.** Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de $f$ Dresser le tableau de variations. Préciser la valeur exacte du maximum de $f$.

**3.** Tracer $\mathcal{C}_f$ et les asymptotes éventuelles dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (unité graphique : 2 cm)

**4.** **a.** Montrer qu'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $\alpha < 0 < \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

**b.** Donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près par défaut de $\alpha$ et de $\beta$.

**c.** En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

**5.** Soit $g$ la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x.$$

**a.** Calculer $g'(x)$.

**b.** En déduire l'expression de la primitive de $f$ s'annulant pour $x = 0$.

**Partie C**

Une imprimerie a une capacité de production de 5 000 ouvrages par jour. Une étude a montré que le coût marginal peut être modélisé par $f(q)$ (en milliers d'euro) où $q$ désigne la quantité d'ouvrages imprimés (en milliers).
On rappelle que le coût marginal correspond à la dérivée du coût total.

**1.** **a.** Calculer $\displaystyle\int_0^5 f(q)\,\mathrm{d}q$.

**b.** En déduire le coût total en euro de fabrication de 5 000 ouvrages.

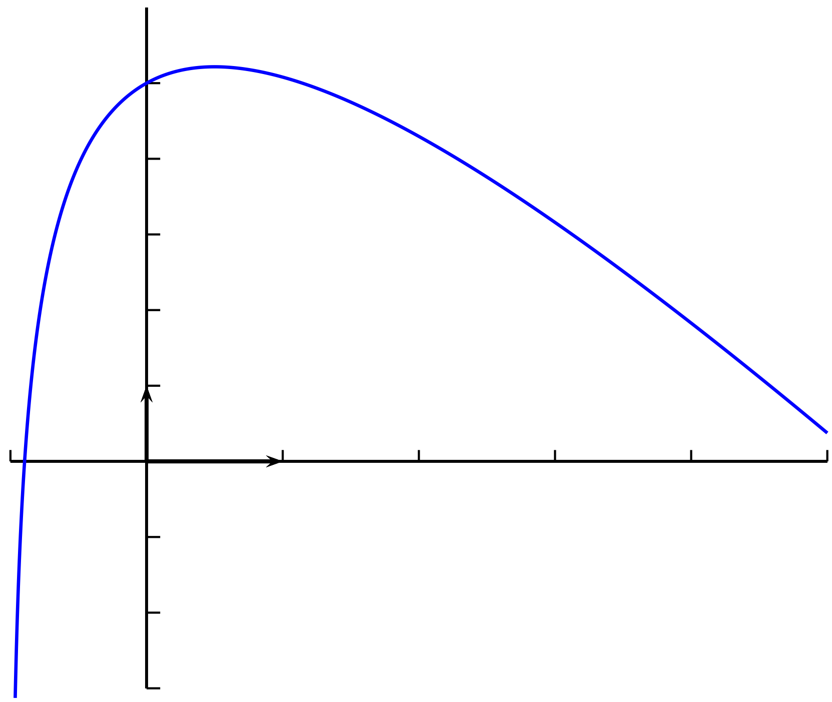
**2.** L'imprimeur compte réaliser en deux jours une commande de 8 000 ouvrages. Il hésite entre deux possibilités :

5 000 ouvrages le premier jour puis 3 000 le second,

4 000 ouvrages pendant deux jours.

Quelle est l'option la plus rentable ?

**Annexe 2**
**Courbe représentative de $f$**



# ∽ Baccalauréat ES Antilles juin 2003 ∾

**EXERCICE 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Dans cette partie, on étudie la répartition des étudiants dans les différentes filières universitaires en fonction de la Catégorie Socio-Professionnelle (CSP) de leurs parents. Les catégories socio-professionnelles retenues sont :

CSP A : cadre supérieur, cadre moyen, profession libérale, patron de l'industrie et du commerce.

CSP B : ouvrier, employé, personnel de service, ouvrier agricole.

CSP C : agriculteur exploitant.

CSP D : autre.

Les différentes filières universitaires sont regroupées en :

Type S : sciences, santé.

Type L : Lettres. Type E économie et droit.

Type I : IUT et autres.

Tableau 1 : Répartition en pourcentage des étudiants dans les différentes filières en fonction de la CSP de leurs parents.

| | CSP A | CSP B | CSP C | CSP D | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Type S | 64,7 % | 17,5 % | 4,5 % | 13,3 % | 100 % |
| Type L | 51,2 % | 24 % | 4,2 % | 20,6 % | 100 % |
| Type E | 54,2 % | 26 % | 4,5 % | 15,3 % | 100 % |
| Type 1 | 49 % | 31,3 % | 7,4 % | 12,3 % | 100 % |
| Toutes filières confondues | 56,7 % | 22,7 % | 4,7 % | 15,9 % | 100 % |

1. **a.** Donner la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard parmi ceux qui suivent des études d'économie ou de droit ait ses parents classés dons la CSP A.

   **b.** Donner la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard dans la population globale des étudiants ait ses parents exploitants agricoles.

   Tableau 2 : Probabilité qu'un étudiant choisi ou hasard dans l'ensemble des étudiants soit dans les diverses filières.

   | | Type S | Type L | Type E | Type I |
   |---|---|---|---|---|
   | Probabilité | 0,369 | 0,298 | 0,249 | 0,084 |

2. On choisit un étudiant au hasard dans la population globale des étudiants.

   Soit $A$ l'évènement : l'étudiant choisi a ses parents dans la CSP A. On définit de même les évènements $B$, $C$ et $D$.

   Soit $S$ l'évènement : l'étudiant est dans la filière de type S. On définit de même les évènements $L$, $E$ et $I$.

   Les résultats seront donnés à $10^{-3}$ près.

   **a.** Calculer la probabilité de l'évènement $E \cap A$.

   **b.** L'étudiant choisi a ses parents dans la CSP A. Quelle est la probabilité pour qu'il suive des études d'économie ou de droit ?

   **c.** L'étudiant choisi a ses parents dans la CSP B. Quelle est la probabilité pour qu'il suive des études d'économie ou de droit ?

**EXERCICE 2** **5 points**
**(candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)**

*Les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés.*
La production nette d'électricité nucléaire en France, en milliards de kWh est donnée par le tableau suivant :

| Année $x_i$ | 85 | 90 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Production $y_i$ | 213 | 298 | 359 | 378 | 376 | 368 | 382 |

**1.** Le plan est rapporté à un repère orthogonal : sur l'axe des abscisses, on placera 84 à l'origine et on choisira 1 cm pour 1 an. Sur l'axe des ordonnées, on placera O à l'origine et on choisira 1 cm pour 20 milliards de kWh.

 **a.** Représenter le nuage des points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.

 **b.** Quelles sont les coordonnées du point moyen G ?

 **c.** Placer G.

**2.** Ajustement affine

 **a.** En utilisant la méthode des moindres carrés, donner une équation de la droite de régression de $y$ en $x$. Les coefficients seront arrondis au centième.

 **b.** Tracer cette droite sur le graphique. Expliquer la méthode utilisée pour le tracé.

**3.** Estimation de production

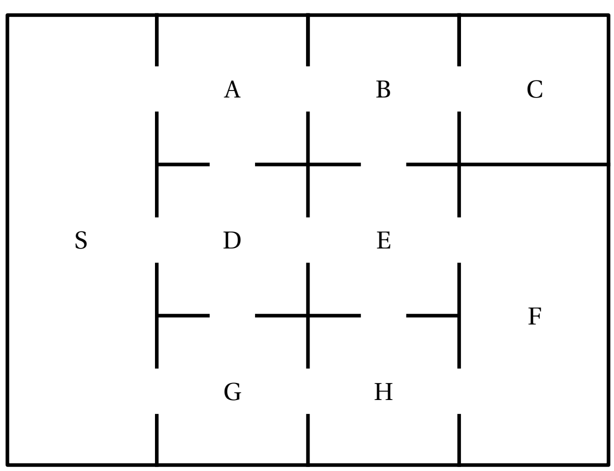
 **a.** En supposant que le modèle affine reste valable jusqu'en 2020, estimer à l'aide de ce modèle, au milliard de kWh près, la production d'électricité nucléaire en France en 2020.

 **b.** On pose $X = \ln(x)$. L'équation de la droite de régression de $y$ en $X$ obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 1\,119X - 4\,745$.

 En supposant que le modèle logarithmique reste valable jusqu'en 2020, estimer à l'aide de ce modèle, au milliard de kWh près, la production d'électricité nucléaire en France en 2020.

**EXERCICE 2** **5 points**
**(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)**

**I-** Un musée est constitué de 9 salles notées A, B, C, D, E, F, G, H et S.
Le plan du musée est représenté ci-dessous :



Ainsi, un visiteur qui se trouve dans la salle S peut atteindre directement les salles A, D ou G. S'il se trouve dans la salle C, il peut se rendre directement dans la salle B, mais pas dans la salle F.
On s'intéresse au parcours d'un visiteur dans ce musée. On ne se préoccupe pas de la manière dont le visiteur accède au musée ni comment il en sort. Cette situation peut être modélisée par un graphe, les sommets étant les noms des salles, les arêtes représentant les portes de communication.

1. Dessiner un graphe modélisant la situation décrite.
2. Est-il possible de visiter le musée, en empruntant chaque porte une fois et une seule ? Justifier en utilisant un théorème du cours sur les graphes.
3. Pour rompre une éventuelle monotonie, le conservateur du musée souhaite différencier chaque salle de sa ou des salles voisines (c'est-à-dire accessibles par une porte) par la moquette posée au sol. Quel est le nombre minimum de types de moquettes nécessaires pour répondre à ce souhait ? Justifier.

**II** - On note $M$ la matrice à 9 lignes et 9 colonnes associée au graphe précédent, en convenant de l'ordre suivant des salles S, A, B, C, D, E, F, G, H. Le graphe n'étant pas orienté, comment cela se traduit-il sur la matrice ?

**III** - On donne la matrice :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 11 & 2 & 20 & 12 & 6 & 12 & 12 \\ 12 & 20 & 3 & 6 & 11 & 20 & 5 & 18 & 5 \\ 11 & 3 & 16 & 0 & 19 & 3 & 8 & 4 & 12 \\ 2 & 6 & 0 & 3 & 1 & 7 & 1 & 4 & 1 \\ 20 & 11 & 19 & 1 & 31 & 9 & 11 & 12 & 19 \\ 12 & 20 & 3 & 7 & 9 & 28 & 9 & 20 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 11 & 9 & 9 & 8 & 9 \\ 12 & 18 & 4 & 4 & 12 & 20 & 8 & 20 & 6 \\ 12 & 5 & 12 & 1 & 19 & 9 & 9 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

1. Combien y-a-t-il de chemins qui en 4 étapes, partent de D et reviennent à D ?
2. Combien y-a-t-il de chemins qui en 4 étapes, partent de S et reviennent à C ? Les citer.
3. Est-il toujours possible de joindre en 4 étapes deux salles quelconques ? Justifier.

**PROBLÈME** **10 points**
**Commun à tous les candidats**

Le but du problème est la recherche du meilleur moment de revente d'une machine-outil en tenant compte de sa valeur marchande ainsi que du coût de son entretien. On étudie dans la **partie A**, deux fonctions qui contribuent à la résolution du problème traité dans les **parties B** et **C**. Les parties A et B sont indépendantes.

**Partie A : étude de fonctions**

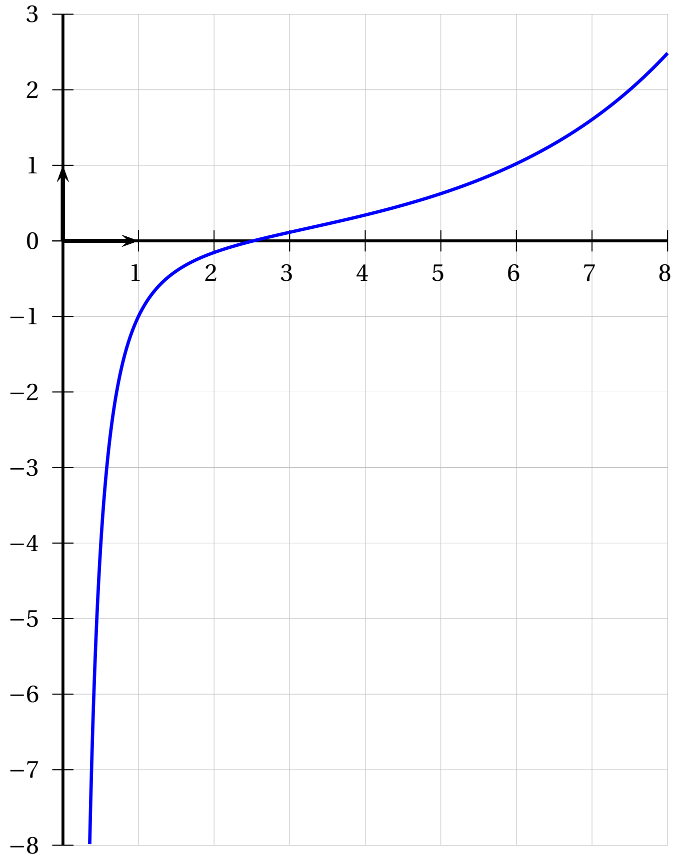
1. Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = 10 - 10\mathrm{e}^{-0,2x} + \mathrm{e}^{0,5x}.$$

   **a.** Calculer la limite de $f$ en $+\infty$.
   **b.** Étudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}_+$ et dresser son tableau de variations. Préciser les limites en 0 et en $+\infty$.

**2.** Soit la fonction $g$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

On donne une partie de la courbe représentative de la fonction $g'$ dérivée de la fonction $g$




Soit A le point d'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses. On prendra 2,5 comme valeur approchée de l'abscisse de A. Comme le suggère le graphique, on admet que la fonction $g'$ reste négative entre 0 et 2,5.

**a.** En utilisant ce graphique, déterminer les variations de la fonction $g$ sur l'intervalle $]0\,;\,8]$.

**b.** En déduire une valeur approchée du minimum de la fonction $g$ sur l'intervalle $]0\,;\,8]$.

**Partie B : dépréciation d'un matériel**

Toutes les valeurs marchandes sont exprimées en milliers d'euros, et on suppose raisonnable de négliger les variations monétaires. Une machine-outil achetée neuve, coûte 10 milliers d'euros.
Au bout d'un an, son prix de revente a diminué de 18 % et on admet qu'il en est ainsi chaque année.

**1.** Quel est le prix de revente en milliers d'euros au bout de 3 années ?

**2.** On note $v_n$ le prix de revente de la machine au bout de $n$ années, en milliers d'euros.

**a.** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

**b.** Déterminer par le calcul, le nombre d'années à partir duquel le prix de revente de la machine sera inférieur ou égal à 1,5 millier d'euros. Expliquer la méthode utilisée.

**3.** Soit $k$ la fonction définie sur $[0\,;\,8]$ par $k(x) = 10\mathrm{e}^{-0,2x}$. On admet que $k(n)$ est une bonne approximation de $v_n$ pendant les 8 premières années.

On note I l'intégrale suivante $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^5 k(x)\,\mathrm{d}x$.

**a.** Calculer la valeur exacte de I puis en donner une valeur approchée arrondie à l'unité la plus proche.

**b.** Estimer la valeur moyenne du prix de revente de la machine sur 5 années d'utilisation, puis en donner une valeur approchée.

**Partie C : coût total d'un matériel**

La machine-outil a un coût d'entretien. On estime qu'il peut être calculé par la fonction $E$ définie sur $[0\,;\,8]$ par $E(x) = \mathrm{e}^{0,5x}$ où $x$ désigne l'âge de la machine en années.

**1.** Justifier que le coût total d'utilisation de la machine-outil en fonction de son âge, exprimé en milliers d'euros, peut être défini sur $[0\,;\,8]$ par

$$f(x) = 10 - 10\mathrm{e}^{-0,2x} + \mathrm{e}^{0,5x} (f \text{ est la fonction étudiée dans la partie A})$$

**2.** Exprimer le coût moyen par année d'utilisation, en fonction de l'âge de la machine.
En utilisant les questions précédentes, estimer le meilleur moment pour revendre la machine.

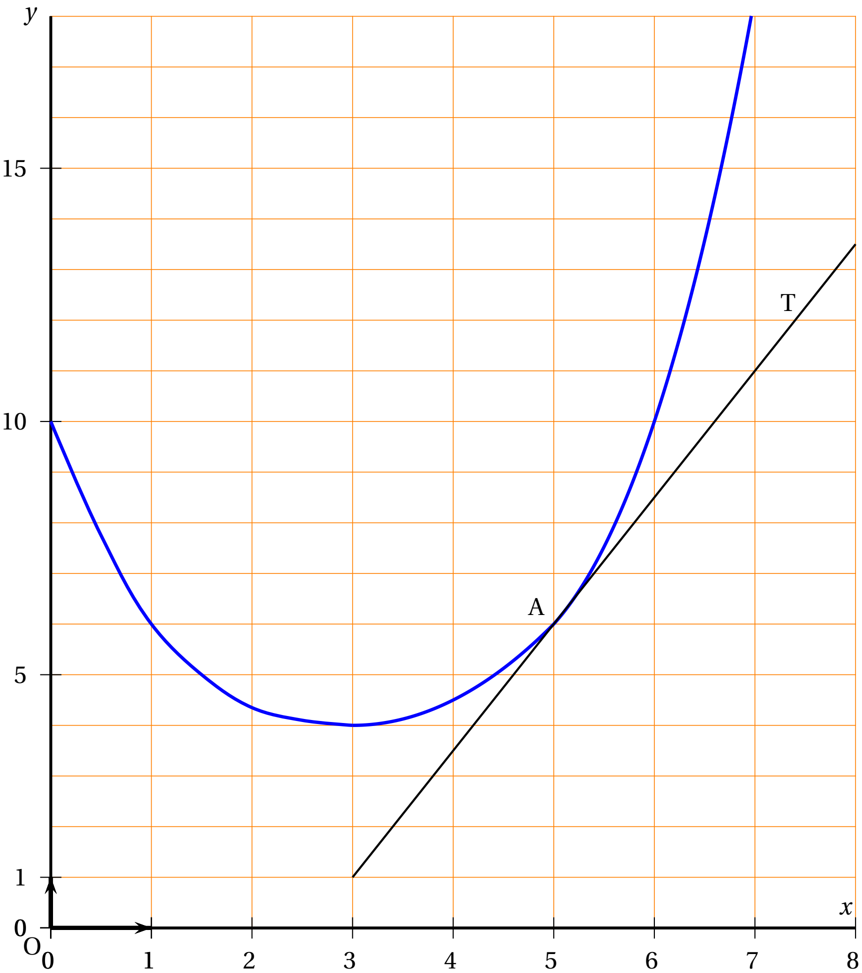
# ∾ Baccalauréat ES Asie juin 2003 ∾

**EXERCICE 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Un phénomène économique est modélisé par une fonction $f$ représentée graphiquement par une courbe $(\mathscr{C})$ dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Une partie de $(\mathscr{C})$ est donnée ci-dessous.




On donne aussi le tableau de valeurs suivant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 3 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $f(x)$ | 10 | 4 | 20 | 49,5 | 149 | 546 |

On suppose que la fonction $f$ ainsi représentée est continue et dérivable sur $[0\,;\,10]$ et strictement croissante sur $[3\,;\,10]$

On note $f'$ sa fonction dérivée.

La droite T est la tangente à $(\mathscr{C})$ en son point A d'abscisse 5 ; elle passe aussi par le point de coordonnées $(7\,;\,11)$.

$(\mathscr{C})$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 3.

**1.** En utilisant ces informations :

**a.** Reproduire et compléter le tableau ci-contre :

| $x$ | 3 | 5 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | |
| $f'(x)$ | | |

**b.** Dresser le tableau des variations de $f$ sur $[0; 10]$ ; indiquer aussi le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle. Justifier.

**c.** Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 6$.
Utiliser le graphique pour donner des valeurs approchées des solutions à 0,5 près.

**2.** On considère la fonction $g$ définie pour tout $x$ de $[0; 10]$ par : $g(x) = \ln[f(x)]$.

**a.** Étudier les variations de g et dresser le tableau des variations de $g$ sur $[0; 10]$.

**b.** À l'aide du graphique de la question 1, donner une solution approchée, dans l'intervalle $[0; 10]$, de l'équation $g(x) = 3$.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans cet exercice les résultats approchés seront donnés à 0,000 1 près.
Lors d'une épizootie, on s'est aperçu que si la maladie était diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal (avant que les symptômes apparaissent), on pouvait le guérir, sinon la maladie était mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon bien connu d'animaux dont 1 % sont porteurs de la maladie. On obtient les résultats suivants :

— si un animal est malade, le test est positif dans 85 % des cas ;

— si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :

— $M$ l'évènement : « L'animal est atteint par la maladie » ;

— $E$ l'évènement : « Le test est positif » ;

— $N$ l'évènement : « Le test est négatif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   **a.** Quelle est la probabilité qu'il soit malade et que son test soit positif ?
   **b.** Vérifier que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058 0.
3. Un animal est choisi parmi ceux dont le test est positif, quelle est la probabilité pour qu'il soit malade ?
4. On choisit 5 animaux au hasard, dans un troupeau suffisamment important pour que les épreuves puissent être considérées comme indépendantes et que les tirages puissent être assimilés à des tirages avec remise.
   Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq ait un test positif ?
5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant un test positif est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.
   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

| Coût | 0 | 100 | 1 000 |
|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,940 5 | 0,058 | 0,001 5 |

   Un éleveur possédant un troupeau de 2 000 bêtes vous demande une prévision du coût à engager à la suite d'un passage du test à tout le troupeau ; quelle réponse proposez-vous ?

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Dans la ville de GRAPHE, on s'intéresse aux principales rues permettant de relier différents lieux ouverts au public, à savoir la mairie (M), le centre commercial (C), la bibliothèque (B), la piscine (P) et le lycée (L). Chacun de ces lieux est désigné par son initiale. Le tableau ci-dessous donne les rues existant entre ces lieux.

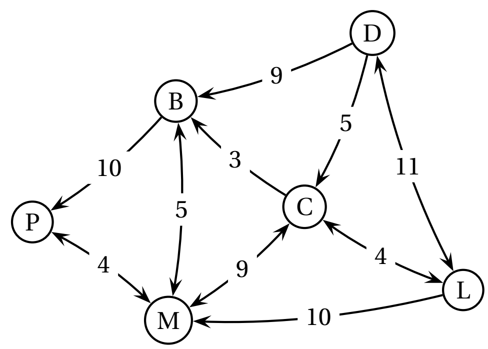
| | B | C | L | M | P |
|---|---|---|---|---|---|
| B | | • | | • | • |
| C | • | | • | • | |
| L | | • | | • | |
| M | • | • | • | | • |
| P | • | | | • | |

**1.** Dessiner un graphe représentant cette situation.

**2.** Montrer qu'il est possible de trouver un trajet empruntant une fois et une seule toutes les rues de ce plan. Justifier. Proposer un tel trajet.

Est-il possible d'avoir un trajet partant et arrivant du même lieu et passant une fois et une seule par toutes les rues ?

**3.** Dimitri habite dans cette ville ; le graphe ci-contre donne le **nouveau** plan du quartier avec les sens de circulation dans les différentes rues et le temps de parcours entre les différents lieux.




Dimitri désire prendre sa voiture pour se rendre de son domicile noté D jusqu'à la piscine.

Proposer un trajet le plus court possible lui permettant de se rendre de son domicile à la piscine.

La réponse proposée devra être justifiée par un algorithme.

**PROBLÈME** **10 points**

**Partie A**

**Étude statistique**

Le but de ce problème est de modéliser l'évolution de la cotation d'une action en Bourse.
*On ne fera qu'un seul dessin qui sera compété tout au long des différentes questions.*
*Les parties sont indépendantes.*
La société « T–E S » est entrée en Bourse en 1995. Le tableau suivant donne la valeur d'une action en euros le 1[er] janvier de chaque année.

| Année | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 |
|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Valeur de l'action en euros $y_i$ | 32 | 57 | 78 | 90 | 110 |

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$, le plan étant rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 10 euros sur l'axe des ordonnées).
2. Le graphique permet d'envisager un ajustement affine.
   - **a.** Calculer les coordonnées du point moyen G. Placer ce point sur le graphique précédent.
   - **b.** Déterminer une équation de la droite de régression de $y$ en $x$ (les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés).
   - **c.** En supposant que ce modèle reste valable jusqu'en 2003, quelle serait la valeur, en euros, d'une action de cette société en 2003 ?
3. En fait, suite à un retournement de tendance, la valeur de l'action a commencé à baisser à partir de 1999 comme le montre le tableau suivant (valeur au 1er janvier)

| Année | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 |
|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année $x_i$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Valeur de l'action en euros $y_i$ | 110 | 50 | 23 | 15 | 11 |

   - **a.** Compléter le nuage de points à l'aide de ces nouvelles valeurs.
   - **b.** Expliquer pourquoi l'ajustement précédent ne semble pas pertinent.

**Partie B**

**Étude d'une fonction**

Soit $f$ la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & 18,9x+35,6 & \text{si} \quad x \in ]0\ ;\ 4[ \\ f(x) & = & \mathrm{e}^{-0,58x+6,85} & \text{si} \quad x \in ]14\ ;\ +\infty[ \end{array}\right.$$

On suppose que $f$ modélise l'évolution du cours de l'action à partir de l'année 0.

1. 
   - **a.** Dresser le tableau de variations de $f$ sur $[0 ; 4]$.
   - **b.** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

     Étudier les variations de $f$ sur $]4\ ;\ +\infty[$ puis dresser son tableau de variations sur cet intervalle.
2. Tracer la courbe $\Gamma$ représentative de la fonction $f$ sur le graphique précédent.
   $f$ est-elle continue sur $[0\ ;\ +\infty[$ ?
3. Calculer, arrondie au centième, la valeur moyenne de $f$ sur l'intervalle $[5 ; 10]$.
   On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction $f$ sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ est égale à
   $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Interpréter ce résultat.
4. Résoudre l'inéquation : $f(x) \leqslant 1,5$.
   À partir de quelle année la valeur de l'action sera-t-elle inférieure à 1,50 euro ?

# Baccalauréat ES Centres étrangers juin 2003

**EXERCICE 1** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

*Aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé dans cet exercice. Sauf indication contraire, les résultats seront arrondis à* $10^{-4}$.

Le tableau suivant donne, en millions, la population mondiale de 1400 à 2000.

| Année | Rang $x_i$ de l'année | Population $y_i$ |
|---|---|---|
| 1400 | 0 | 374 |
| 1500 | 100 | 458 |
| 1600 | 200 | 580 |
| 1800 | 400 | 958 |
| 1900 | 500 | 1 650 |
| 1950 | 550 | 2 519 |
| 1970 | 570 | 3 691 |
| 1980 | 580 | 4 430 |
| 1990 | 590 | 5 255 |
| 2000 | 600 | 6 057 |

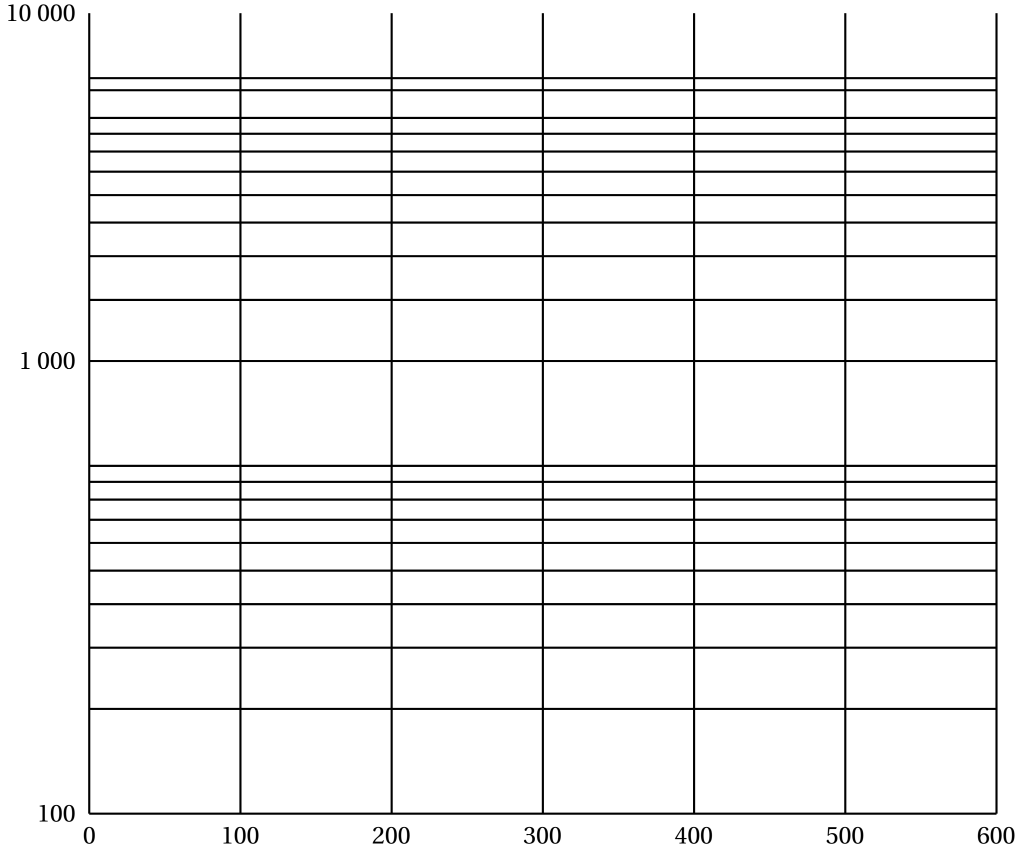
Source : site internet de l'INED (Institut national des études démographiques)

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ en utilisant le repère semi-logarithmique joint en annexe.
2. On décide de faire un ajustement exponentiel, en ignorant les quatre premières données. On pose $z_i = \ln(y_i)$.
   a. Reproduite sur la copie et compléter le tableau suivant par les valeurs $z_i$.

| Rang $x_i$ de l'année | 500 | 550 | 570 | 580 | 590 | 600 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i = \ln(y_i)$ | | | | | | |

   b. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de $z$ en $x$ par la méthode des moindres carrés.
   c. En déduire une relation entre $y$ et $x$ de la forme $y = b \times a^x$, où $a$ et $b$ sont deux réels à déterminer.
   d. Utiliser cet ajustement pour estimer, au million près, la population mondiale en 2010.

Annexe à compléter et à remettre avec la copie




**EXERCICE 2** **6 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans une station-service, la probabilité que $n$ clients se présentent pendant une période de 10 minutes est donnée par le tableau suivant :

| $n$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| Probabilité | $\frac{3}{10}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{3}{10}$ |

**1.** Justifier que ce tableau définit une loi de probabilité. Calculer l'espérance de cette loi et interpréter le résultat.

On note $C_n$ l'évènement « $n$ clients se présentent pendant une période de 10 minutes ».

Lorsqu'un client se présente, la probabilité qu'il prenne du gazole est $\frac{2}{5}$ et on note $D_p$ l'évènement : « $p$ clients ont pris du gazole pendant une période de 10 minutes ».

On rappelle que $P_{\text{B}}(\text{A})$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que B est réalisé.

**2.** On sait que deux clients se présentent pendant une période de 10 minutes.

**a.** Calculer la probabilité que ces deux clients prennent du gazole.

**b.** Montrer que la probabilité $P_{C_2}(D_1)$ qu'un seul de ces deux clients prenne du gazole est égale à $\frac{12}{25}$.

ıprobabilités de l'évènement $D_p$ sachant que $C_n$, est réalisé pour toutes les valeurs possibles de $p$ et $n$, seront présentées dans le tableau suivant :

| | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ |
|---|---|---|---|
| $D_0$ | 1 | | |
| $D_1$ | 0 | | $\frac{12}{25}$ |
| $D_2$ | 0 | 0 | |

**a.** Justifier les valeurs 0 présentes dans le tableau.

**b.** Justifier la valeur 1 correspondant à $P_{C_0}(D_0)$.

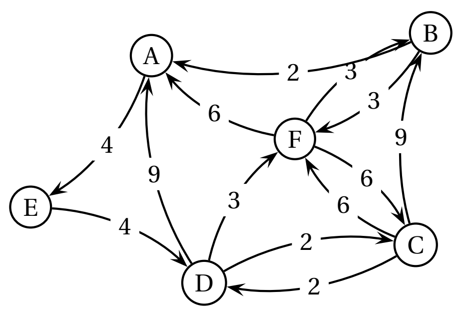
**c.** Reproduire le tableau sur la copie en complétant les valeurs manquantes (on les donnera sous forme de fractions).

**3.** Déterminer la probabilité de l'évènement $D$.

**EXERCICE 2** **6 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Un livreur d'une société de vente à domicile doit, dans son après- midi, charger son camion à l'entrepôt noté A, livrer cinq clients que nous noterons B, C, D, E et F, puis retourner à l'entrepôt. Le réseau routier, tenant compte des sens de circulation, et les temps de par- cours (en minutes) sont indiqués sur le graphe G suivant :




**1.** Donner la matrice M associée au graphe G.
On utilisera le modèle suivant :

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | |
| B | | | | | | |
| C | | | | | | |
| D | | | | | | |
| E | | | | | | |
| F | | | | | | |

**2.** On donne la matrice $M^6$ :

$$M^6 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 19 & 11 & 12 & 9 & 6 & 16 \\ 36 & 28 & 23 & 22 & 18 & 34 \\ 37 & 24 & 25 & 17 & 15 & 31 \\ 15 & 12 & 9 & 10 & 8 & 15 \\ 28 & 22 & 19 & 15 & 15 & 26 \end{pmatrix}$$

On s'intéresse aux chemins partant de l'entrepôt A et se terminant en A.

**a.** Combien existe-t-il de chemins de longueur 6 reliant A à A ?

**b.** Citer ces chemins.

**c.** Parmi ceux qui passent par tous les sommets du graphe, lequel minimise le temps de parcours ?

**d.** Quelle conséquence peut tirer le livreur du dernier résultat ?

**3.** Au départ de sa tournée, le livreur a choisi de suivre l'itinéraire le plus rapide. Malheureusement, le client C n'est pas présent au passage du livreur et celui-ci décide de terminer sa livraison par ce client. Indiquer quel est le chemin le plus rapide pour revenir à l'entrepôt A à partir de C. La réponse devra être justifiée.

**PROBLÈME** **10 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

**Étude d'une fonction**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + 100\text{e}^{-0,2x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$
(unités graphiques : 1 cm pour 1 unité en abscisse ; 1 cm pour 10 unités en ordonnée).

**1.** Calculer la limite de $f$ en $+\infty$.

**2.** Montrer que la droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

**3.** Calculer la dérivée $f'$ et étudier les variations de $f$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

**4.** Tracer $\mathcal{C}_f$ et D dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ pour $x$ appartenant à $[1~;~18]$.

**5.** Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 50$ sur l'intervalle$[1~;~18]$.

**6.** Calculer la valeur exacte du nombre $\text{M} = \dfrac{1}{17}\displaystyle\int_0^{18} f(x)\,\text{d}x$, puis donner sa valeur arrondie à l'entier le plus proche.

**Partie B**

**Modélisation d'un coût**

Un artisan confiseur qui propose des chocolats « faits maison » en fabrique de 1 à 18 kg par jour. Le coût moyen de fabrication d'un kilogramme de chocolats est exprimé en euro. Il est modélisé par la fonction $f$ étudiée dans la **partie A**, où $x$ désigne la masse en kg de chocolats fabriqués ($1 \leqslant x \leqslant 18$). Dans la suite, on utilisera les résultats de la **partie A**.

**1.** **a.** Déterminer, à un euro près, le coût moyen de fabrication pour 6 kg fabriqués.

**b.** Quelle est la quantité à fabriquer pour que le coût moyen soit minimum ?

**c.** Quel est alors ce coût ?

**2.** L'artisan vend ses chocolats au prix de 50 € le kilogramme.
Quelle quantité minimale doit-il fabriquer pour faire un bénéfice ?

**3.** Quelle est pour l'artisan la valeur moyenne du coût de fabrication d'un kilogramme de chocolats ?

*Aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé dans cet exercice. Sauf indication contraire, les résultats seront arrondis à* $10^{-4}$.
Le tableau suivant donne, en millions, la population mondiale de 1400 à 2000.

| Année | Rang $x_i$ de l'année | Population $y_i$ |
|---|---|---|
| 1400 | 0 | 374 |
| 1500 | 100 | 458 |
| 1600 | 200 | 580 |
| 1800 | 400 | 958 |
| 1900 | 500 | 1 650 |
| 1950 | 550 | 2 519 |
| 1970 | 570 | 3 691 |
| 1980 | 580 | 4 430 |
| 1990 | 590 | 5 255 |
| 2000 | 600 | 6 057 |

Source : site internet de l'INED (Institut national des études démographiques)

**1.** Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ en utilisant le repère semi-logarithmique joint en annexe.

**2.** On décide de faire un ajustement exponentiel, en ignorant les quatre premières données. On pose $z_i = \ln(y_i)$.

**a.** Reproduite sur la copie et compléter le tableau suivant par les valeurs $z_i$.

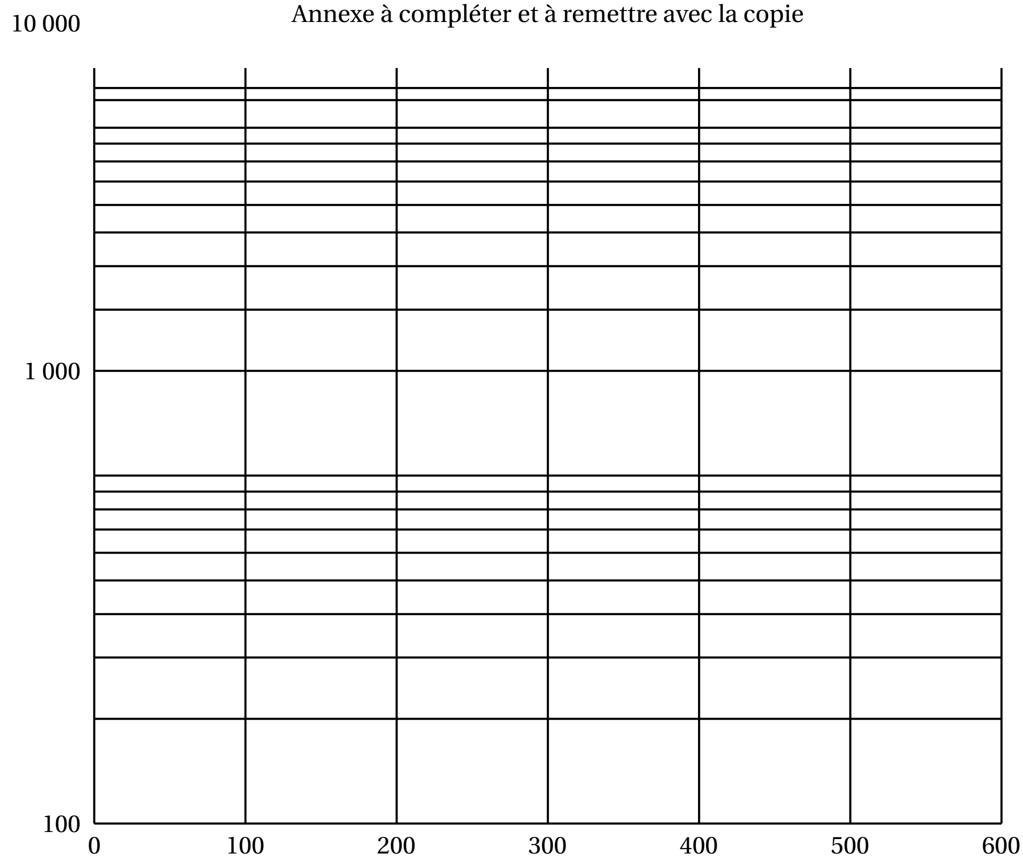
| Rang $x_i$ de l'année | 500 | 550 | 570 | 580 | 590 | 600 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i = \ln(y_i)$ | | | | | | |

**b.** Donner une équation de la droite d'ajustement affine de $z$ en $x$ par la méthode des moindres carrés.

**c.** En déduire une relation entre $y$ et $x$ de la forme $y = b \times a^x$, où $a$ et $b$ sont deux réels à déterminer.

**d.** Utiliser cet ajustement pour estimer, au million près, la population mondiale en 2010.

Annexe à compléter et à remettre avec la copie



# Baccalauréat ES Métropole juin 2003

**EXERCICE 1** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

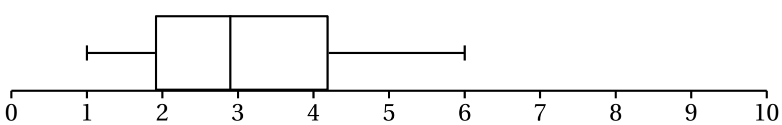
Les guichets d'une agence bancaire d'une petite ville sont ouverts au public cinq jours par semaine : les mardi, mercredi, jeudi, vendredi et samedi.
Le tableau ci-dessous donne la répartition journalière des 250 retraits d'argent liquide effectués aux guichets une certaine semaine.

| Jour de la semaine | mardi | mercredi | jeudi | vendredi | samedi |
|---|---|---|---|---|---|
| Rang $i$ du jour | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Nombre de retraits | 37 | 55 | 45 | 53 | 60 |

On veut tester l'hypothèse « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine ». On suppose donc que le nombre des retraits journaliers est égal à $\dfrac{1}{5}$ du nombre des retraits de la semaine.

On pose $d^2_{\text{obs}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{5}\left(f_i - \frac{1}{5}\right)^2$ où $f_i$ est la fréquence des retraits du $i$-ème jour.

1. Calculer les fréquences des retraits pour chacun des cinq jours de la semaine.
2. Calculer alors la valeur de $1\,000d^2_{\text{obs}}$ (la multiplication par 1 000 permet d'obtenir un résultat plus lisible).
3. En supposant qu'il y a équiprobabilité des retraits journaliers, on a simulé 2 000 séries de 250 retraits hebdomadaires.
   Pour chaque série, on a calculé la valeur du $1\,000d^2_{\text{obs}}$ correspondant. On a obtenu ainsi 2000 valeurs de $1\,000d^2_{\text{obs}}$.
   Ces valeurs ont permis de construire le diagramme en boîte ci-dessous où les extrémités des « pattes » correspondent respectivement au premier décile et au neuvième décile.

   Lire sur le diagramme une valeur approchée du neuvième décile.
4. En argumentant soigneusement la réponse, dire si pour la série observée au début, on peut affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 10 %, que « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine » ?

**EXERCICE 2** **5 points**
**Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Une enquête a montré que :

- avant de passer l'épreuve théorique du permis de conduire (c'est-à-dire le code) 75 % des candidats ont travaillé très sérieusement cette épreuve,
- lorsqu'un candidat a travaillé très sérieusement, il obtient le code dans 80 % des cas,
- lorsqu'un candidat n'a pas beaucoup travaillé, il n'obtient pas le code dans 70 % des cas.

On interroge au hasard un candidat qui vient de passer l'épreuve théorique (on rappelle que les résultats sont connus dès la fin de l'épreuve).
On note $T$ l'évènement « le candidat a travaillé très sérieusement »
$R$ l'évènement « le candidat a réussi le code ».
*Les probabilités seront données sous forme décimale, arrondies éventuellement au millième.*

1. Traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré.
2. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement « le candidat a travaillé très sérieusement et il a obtenu le code ».

   **b.** Montrer que la probabilité $p(R)$ qu'un candidat réussisse à l'épreuve théorique est égale à $0,675$.
3. Le candidat interrogé vient d'échouer. Quelle est la probabilité qu'il ait travaillé très sérieusement ?
4. À la sortie de l'épreuve, on interroge au hasard et de façon indépendante 3 candidats (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise).

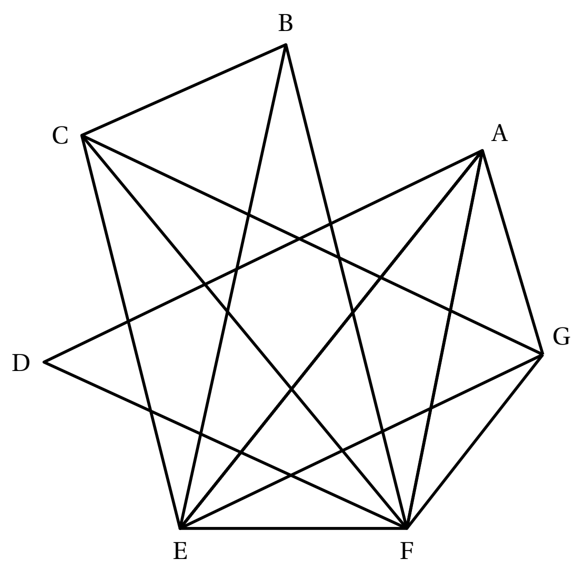
   Calculer la probabilité $p_3$ d'interroger au moins une personne ayant échoué à l'épreuve.
5. On interroge désormais au hasard et de façon indépendante $n$ candidats.

   Quelle est la probabilité $p_n$ d'interroger au moins une personne ayant échoué à l'épreuve ?

**EXERCICE 2** **5 points**

**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. À ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G). Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle. Les arêtes du graphe Γ ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



Graphe Γ

1. Déterminer la matrice associée au graphe Γ (les sommets de Γ étant classés dans l'ordre alphabétique).
2. Quelle est la nature du sous-graphe de Γ′ constitué des sommets A, E, F et G ?

   Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique $\chi(\Gamma)$ du graphe Γ ?
3. Quel est le sommet de plus haut degré de Γ ?

   En déduire un encadrement de $\chi(\Gamma)$.
4. Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ par ordre de degré décroissant, colorier le graphe Γ figurant en annexe.

**5.** Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?
Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.

**PROBLÈME** **11 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;\,50]$ par

$$g(x) = (x-15)^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}.$$

**1.** On note $g'$ la fonction dérivée de $g$ sur $[0\,;\,50]$.

**a.** Montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{3}(x-15)(21-x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$.

**b.** Étudier le signe de $g'$ sur $[0\,;\,50]$.

**c.** Dresser le tableau de variations de $g$ sur $[0\,;\,50]$.

**2.** Soit $G$ la fonction définie pour tout $x$ de $[0\,;\,50]$ par

$$G(x) = 3(-x^2+24x-153)\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}.$$

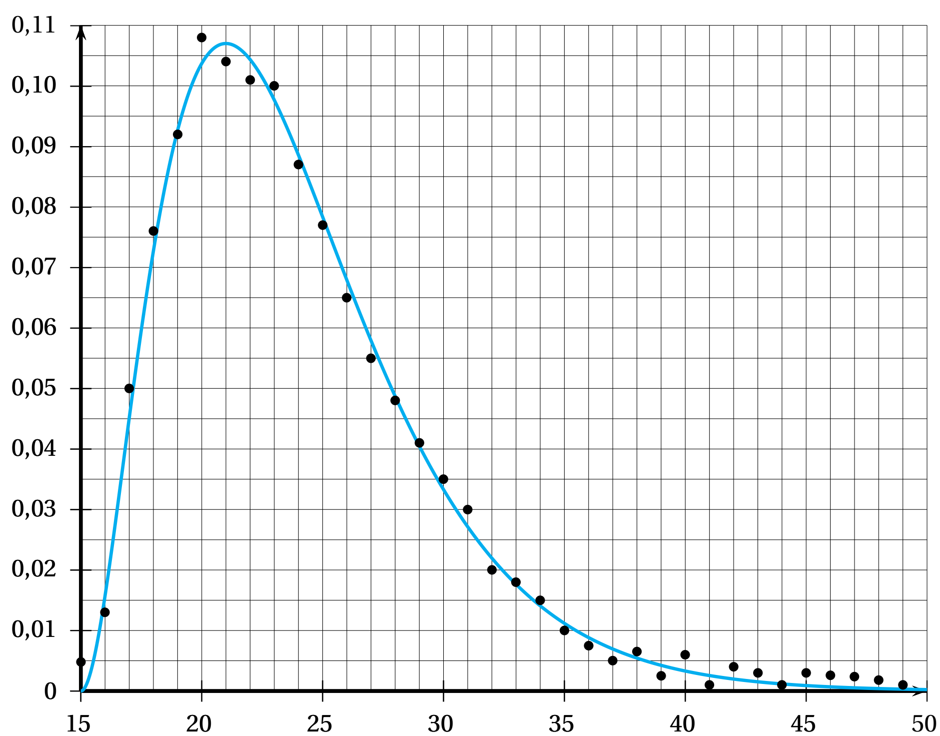
Montrer que $G$ est une primitive de $g$ sur $[0\,;\,50]$.

**Partie B**

Soit $f$ la fonction définie sur $[15\,;\,49]$ par $f(x) = \dfrac{107\mathrm{e}^7}{36\,000}g(x)$.

**1.** Justifier que $f$ admet les mêmes variations que $g$ sur l'intervalle $[15\,;\,49]$.

**2.** La représentation graphique de $f$ dans un repère orthogonal $\mathscr{R}$ est donnée ci-dessous.



Calculer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$ (on utilisera le résultat de la **question A. 2)**).
On donnera la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis sa valeur arrondie à $10^{-1}$.

**Partie C**

Dans une population et pour une génération donnée, le taux de fécondité $t(k)$ à l'âge $k$ où $k$ est un entier compris entre 15 et 49, est le rapport entre le nombre de naissances chez les mères d'âge $k$ et le nombre de femmes d'âge $k$ de cette génération.
Le nuage de points représentant le taux de fécondité d'une population pour une génération donnée (l'âge étant représenté en abscisse et le taux de fécondité en ordonnée) est représenté dans le repère $\mathscr{R}$.
On appelle descendance finale la somme des taux de fécondité par âge $t(k)$ ; elle est donc égale à $\sum\limits_{k=15}^{49} t(k)$. On suppose qu'elle peut être modélisée par l'aire délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$.

1. Utiliser les résultats de la **partie B** afin d'estimer la descendance finale de cette génération (on donnera un résultat arrondi à $10^{-1}$).
2. Une valeur arrondie à $10^{-2}$de la somme des taux de fécondité par âge est 1,20.
   Comparer ce résultat avec celui obtenu à la question précédente.
   Le modèle choisi paraît-il adapté ?
3. Calculer la valeur moyenne de $f$ sur l'intervalle $[15 ; 49]$. Peut-on affirmer que la descendance finale est égale à cette valeur moyenne ?
   Justifier votre réponse.

# ∽ Baccalauréat ES La Réunion juin 2003 ∾

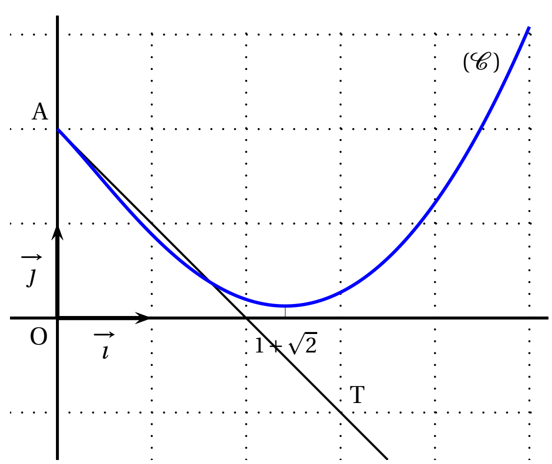
**EXERCICE 1**
**Commun à tous les candidats**

Les membres d'un club sportif se présentent à l'accueil soit pour jouer au golf soit pour profiter de la salle de musculation (une activité excluant l'autre).
La probabilité qu'il ne pleuve pas, en automne, dans cette région est égale à $0,8$. En automne un membre se présente.
S'il pleut, il joue au golf dans 30 % des cas.
S'il ne pleut pas, il s'enferme dans la salle de musculation dans 20 % des cas.
On note B l'évènement « il pleut »,
G l'évènement « le membre du club joue au golf ».

1. **a.** Traduire la situation ci-dessus à l'aide d'un arbre pondéré.
   **b.** Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $0,7$.
   **c.** Déterminer la probabilité qu'il pleuve sachant que le membre du club se présentant à l'accueil ne joue pas au golf.
2. Trois membres se présentent successivement et indépendamment le uns des autres. On suppose que, pour chacun des trois, la probabilité qu'il joue au golf est $0,7$.
   On s'intéresse au nombre de golfeurs parmi ces trois personnes.
   **a.** En utilisant un arbre pondéré, montrer que la probabilité $p_2$ que deux membres exactement jouent au golf est de $0,441$.
   **b.** Établir la loi de probabilité associée à cette situation.
   **c.** Déterminer l'espérance mathématique et interpréter le résultat obtenu.
   **d.** Déterminer la probabilité qu'au moins un des trois membres ne joue pas au golf.

**EXERCICE 2**
**Enseignement obligatoire**

La courbe $(\mathscr{C})$, donnée ci-après, est la courbe représentative d'une fonction $h$ définie sur $[0\,;\,5]$. Le point A a pour coordonnées $(0\,;\,2)$.
La droite (T) est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.




1. Préciser $h(0)$.
   Déterminer à l'aide d'une lecture graphique le nombre dérivé $h'(0)$. (Justifier la réponse).

**2.** La fonction $h$, définie sur $[0\,;\,5]$ est de la forme :

$$h(x) = ax^2 + bx + c + 2\ln(x+1)$$

où $a, b$ et $c$ sont des nombres réels.
On note $h'$ la dérivée de la fonction $h$.
Exprimer $h'(x)$ en fonction de $a$ et $b$.

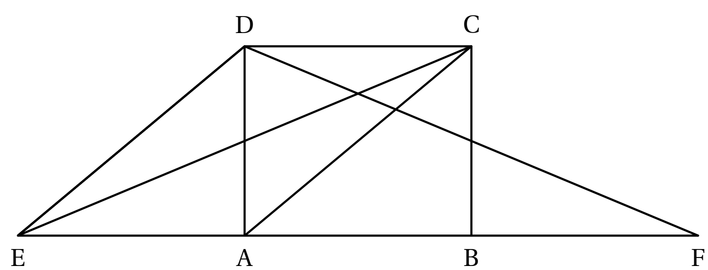
**3.** On note $h'(3) = \dfrac{1}{2}$.
En utilisant ce résultat et les résultats de la question **1.**, déterminer chacune des valeurs $a, b$ et $c$.

**4.** En utilisant la représentation graphique de la fonction $h$, donner, en justifiant, le signe de $h'(x)$.

**5.** Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;\,5]$ par : $g(x) = \dfrac{1}{h(x)}$.
Déterminer le sens de variation de la fonction $g$.

## EXERCICE 2
**Enseignement de spécialité**

Une grande surface est conçue de telle façon que six secteurs (alimentation, hi-fi, etc.) notés A, B, C, D, E, F sont reliés par des allées selon le graphe ci-dessous.




**1.** **a.** Recopier et compléter le tableau suivant :

| Secteur | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Degré | | | | | | |

**b.** Le graphe $\mathcal{G}$ est connexe. Pourquoi ?

**2.** Un visiteur désire parcourir l'ensemble des allées en ne passant par celles-ci qu'une seule fois.

**a.** Démontrer que son souhait est réalisable.

**b.** Donner un exemple d'un tel parcours.

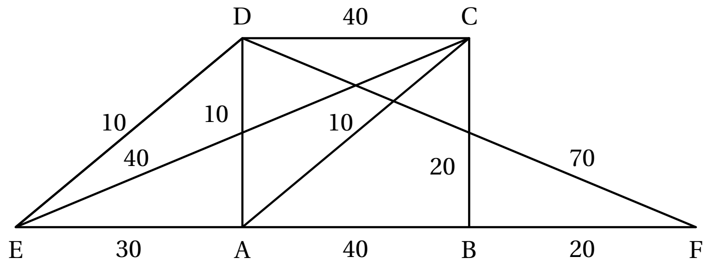
**3.** Le directeur désire associer chaque secteur à une couleur de sorte que deux secteurs (sommets) ne portent pas la même couleur.

**a.** Démontrer que le nombre chromatique $n$ du graphe vérifie $n \geqslant 4$.

**b.** Expliquer pourquoi $n \leqslant 5$.

**c.** Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.

**4.** Une famille se trouve dans le secteur E et doit se rendre dans le secteur F. Cela étant, les parents connaissent suffisamment les allées pour savoir que, pour chacune d'elles, les enfants ne résistant pas, il leur faudra débourser une somme (en euros) précisée dans le graphe ci-dessous.




(AB = 40 ; AC = 10 ; AD = 10 ; AE = 30 ; BC = 20 ; BF = 20 ; CD = 40 ; CE = 40 ;
DE = 10 ; DF = 70)
Indiquer une chaîne qui minimise la dépense de cette famille.

**PROBLÈME**

**Partie A - Étude d'une fonction $f$**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 15(0,4 - x)\mathrm{e}^{-x}$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité 2 cm).

**1.** **a.** Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.

**b.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

**2.** Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$.

**a.** Vérifier que, pour tout $x$ réel, on a $f'(x) = 15(x - 1,4)\mathrm{e}^{-x}$.

**b.** Étudier le signe de $f'(x)$.

**c.** Établir le tableau de variations de $f$.

**3.** Représenter ta portion de la courbe $(\mathscr{C})$ pour $x$ compris entre 0 et 7.

**a.** Montrer que l'équation $f(x) = 4,5$, admet, entre 0 et 7, deux solutions $\alpha$ et $\beta$ (on notera $\alpha$ la plus petite des deux solutions).

**b.** Donner la valeur arrondie de $\alpha$ à $10^{-2}$ près, en présentant brièvement la méthode utilisée.

**c.** Donner la valeur arrondie de $\beta$ à $10^{-2}$ près.

**d.** Quel est l'ensemble des solutions, dans l'intervalle $[0 ; 7]$, de l'inéquation $f(x) \leqslant 4,5$ ?

**Partie B - Application**

La fonction $f$ est la fonction coût marginal $\mathrm{C_M}$ de fabrication d'un produit. $x$ est exprimé en tonnes ($x$ compris entre 0 et 7), et le coût est exprimé en milliers d'euros.

**1.** **a.** Pour quelle production le coût marginal est-il minimum et quel est ce prix ?

**b.** Pour quelles productions le coût marginal est-il inférieur à 4,5 ? (on donnera chacune des bornes de l'intervalle à $10^{-2}$ près)

**2.** La fonction coût total $\mathrm{C_T}$ est une primitive de la fonction coût marginal.

**a.** Soit $g$ et $h$ les fonctions définies sur $[0 ; 7]$ par :

$$g(x) = 15(0,4 - x)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad h(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}.$$

$h'$ étant la fonction dérivée de $h$, calculer $h'(x)$ et déterminer $a$ et $b$ pour que $h$ soit une primitive de $g$.

**b.** En déduire que $\mathrm{C_T}(x) = (15x + 9)\mathrm{e}^{-x} + 6x + k$.

**c.** Déterminer $k$ sachant que les frais fixes s'élèvent à 2 000 euros (c'est-à-dire que $\mathrm{C_T}(0) = 2$).

# ∽ Baccalauréat ES Liban juin 2003 ∾

**EXERCICE 1** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

*Aucun détail des calculs statistiques effectués à la calculatrice n'est demandé dans cet exercice.*

**Partie A**

Le tableau suivant donne l'évolution de la production annuelle de turbots dans une ferme aquacole.

| Année | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Production $y_i$ | 650 | 760 | 1 190 | 1 620 | 2 600 | 5 050 |

1. Construire le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i ; y_i\right)$ dans un repère orthogonal R : sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour une année, sur l'axe des ordonnées, on placera 600 à l'origine et on choisira 1 cm pour 200 turbots.
2. D'après l'allure du nuage quel type d'ajustement peut-on envisager ?

**Partie B**

Les résultats des questions **1, 2 et 3** seront arrondis à $10^{-3}$.

1. On pose $z_i = \ln(y_i)$.
   Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

   | Année | 1997 | 1998 | 1199 | 2000 | 2001 | 2002 |
   |---|---|---|---|---|---|---|
   | Rang de l'année $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
   | $z_i$ | | | | | | |

   Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points associé à la série $(x_i ; z_i)$.
2. **a.** En utilisant la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement affine de $z$ en $x$.
   **b.** Exprimer $y$ en fonction de $x$.
   En utilisant la question précédente, répondre aux deux questions suivantes :
   Quelle production peut-on prévoir en 2005 ?
   À partir de quelle année peut-on prévoir que la production annuelle dépassera 30 000 turbots ?

**EXERCICE 2** **5 points**
**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Un théâtre propose deux types d'abonnements pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.
On considère un groupe de 2 500 personnes qui s'abonnent tous les ans. $n$ étant un entier naturel, on note :
$a_n$ la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année $n$ ;
$b_n$ la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année $n$ ;
$P_n$ la matrice $[a_n \; b_n]$ traduisant l'état probabiliste à l'année $n$.
Tous les ans 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1. On suppose que, l'année zéro, 1 500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1 000 l'abonnement B. Déterminer l'état initial $P_0 = [a_0 \quad b_0]$.
2. **a.** Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.

   **b.** Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.

   **c.** En déduire le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année un.
3. Soit $P = [x \quad y]$ l'état stable, où $x$ et $y$ sont deux nombres réels positifs tels que $x + y = 1$.
   Justifier que $x$ et $y$ vérifient l'équation $x = 0,85x + 0,45y$.
   Déterminer $x$ et $y$.
   En déduire la limite de la suite $(a_n)$ quand $n$ tend vers plus l'infini.
   Interpréter le résultat précédent en terme de nombre d'abonnements de type A.

**PROBLÈME** **10 points**
**Commun à tous les candidats**

La commercialisation d'un article sur un marché suit une fonction d'offre notée $f$ et une fonction demandée notée $g$.
Elle sont définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{8} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{120}{e^x + 15}$$

où $x$ représente la quantité exprimée en milliers d'articles, $f(x)$ représente le prix de vente exprimé en euro pour une quantité $x$ offerte, et $g(x)$ représente le prix de vente exprimé en euro pour une quantité $x$ demandée.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On désigne respectivement par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ dans ce repère.
La courbe $\mathcal{C}_f$ est donnée dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ sur l'annexe jointe au sujet.
L'annexe sera complétée et jointe à la copie.

**Partie A Étude de la fonction demande**
**Détermination de la quantité échangée et du prix d'équilibre du marché**

1. Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$.
   En déduire l'existence d'une asymptote que l'on précisera.
2. $g'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
   Justifier que : $g'(x) = -\dfrac{120e^x}{(e^x + 15)^2}$.
3. Déterminer le sens de variation de la fonction $g$ sur $[0 ; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de $g$ sur $[0 ; +\infty[$.
4. **a.** Reproduire sur la copie et compléter le tableau de valeurs (arrondir les résultats à $10^{-1}$).

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 3,5 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | | | | | | | | | |

   **b.** Calculer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0.

   **c.** Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ et la tangente T sur l'annexe jointe au sujet.
5. On admet que sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = g(x)$ a une solution unique $n$ appelée quantité échangée. On note $p = f(q) = g(q)$ le prix d'équilibre correspondant.

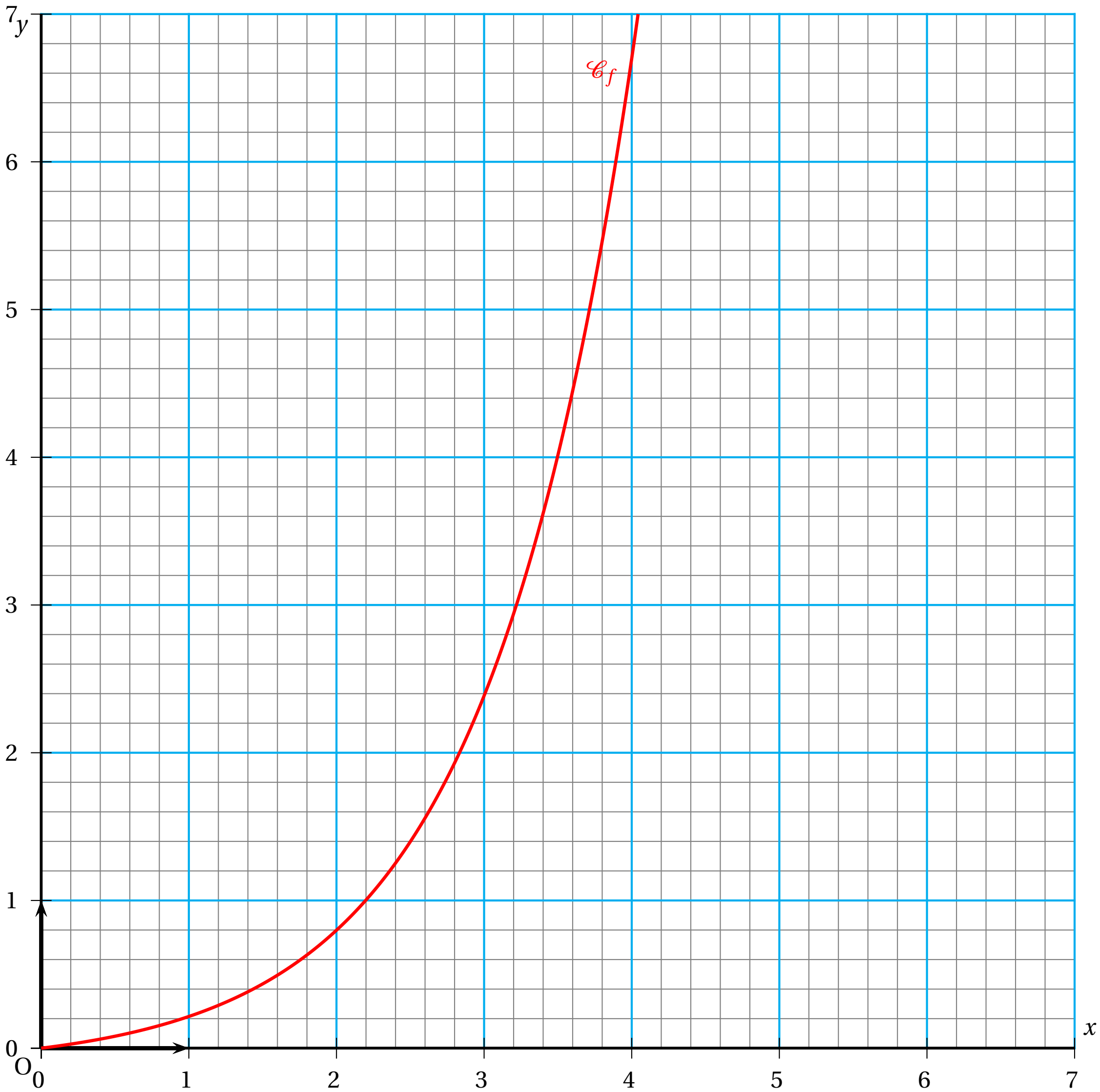
   **a.** Faire apparaître sur le graphique les valeurs $p$ et $q$.

**b.** Vérifier que $q = \ln(25)$.
En déduire la valeur de $p$.

**Partie B Calcul du « surplus du consommateur »**

1. $\mathcal{D}$ est le domaine du plan défini par $\{M(x\,;\,y)/0 \leqslant x \leqslant q \quad \text{et} \quad p \leqslant y \leqslant g(x)\}$, où $p$ et $q$ sont les valeurs déterminées dans la partie **A. 5.**.
Hachurer ce domaine $\mathcal{D}$ sur l'annexe jointe au sujet.
2. Soit $G$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :
$$G(x) = 8\left[x - \ln\left(\mathrm{e}^x + 15\right)\right]$$
Démontrer que $G$ est une primitive de $g$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. On appelle « surplus du consommateur » (en milliers d'euro) le nombre :
$$R = \int_0^q g(x)\,\mathrm{d}x - pq$$
Justifier que $R$ représente, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$.
Calculer la valeur exacte de $R$.
Donner une valeur approchée de $R$ à l'euro près.

**Annexe à rendre avec la copie**



# Baccalauréat ES Polynésie juin 2003

Exercice 1 — **5 points**

**Commun à tous les candidats**

**Évolution de l'indice IMVP**

L'indice IMVP (international motor vehicle program) est un indicateur de référence élaboré par le Massachussets Institute of Technology qui mesure en heures le temps de montage moyen d'un véhicule.

Dans une entreprise de construction automobile, on a obtenu le tableau suivant :

| année | rang de l'année $x_i$ | temps en heures $y_i$ |
|---|---|---|
| 1995 | 5 | 26,2 |
| 1996 | 6 | 23,7 |
| 1997 | 7 | 21,4 |
| 1998 | 8 | 18,5 |
| 1999 | 9 | 16,8 |
| 2000 | 10 | 15,4 |
| 2001 | 11 | 14,6 |

(source Renault)

**Partie A**

Le nuage de points $M_i$ associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un plan rapporté à un repère orthonormal est donné en annexe.

*Les résultats seront arrondis si nécessaire au centième.*

1. Calculer les coordonnées du point moyen et le placer sur le graphique.
2. Le nuage de points montre qu'un ajustement affine semble justifié. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite D d'ajustement affine de $y$ en $x$, obtenue par la méthode des moindres carrés.

   Représenter D sur le graphique.
3. En déduire graphiquement puis par le calcul les prévisions du temps de montage moyen pour l'année 2005 puis l'année 2007, en supposant que le modèle reste valable jusqu'en 2007.
4. Calculer la variation en pourcentage de ce temps de l'année 2000 à l'année 2001.

**Partie B**

On décide d'approcher ce nuage par un arc de parabole ; pour cela on pose $z = \sqrt{y}$.

1. Donner le tableau des valeurs $(x_i\ ;\ z_i)$. Les valeurs $z_i$ seront arrondies au millième.

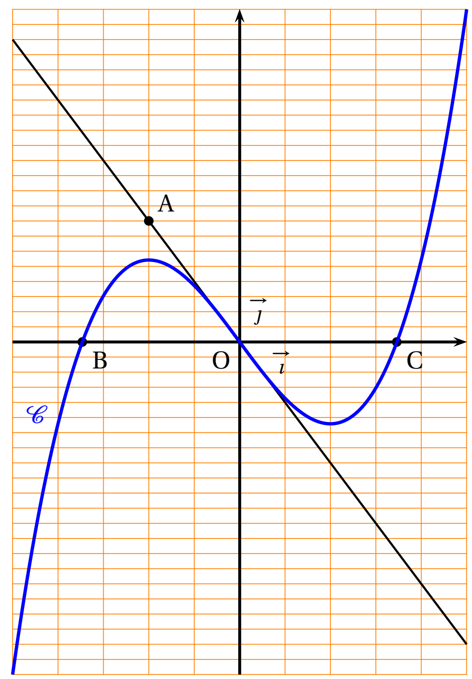
   On suppose qu'un ajustement affine de $z$ en $x$ est justifié.
2. Donner une équation de la droite d'ajustement affine obtenue par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au millième).
3. En déduire l'expression de $y$ en fonction de $x$, puis le temps de montage en 2005 et en 2007 arrondis au dixième.
4. Ces temps sont-ils plus plausibles que ceux obtenus dans la partie A ?

   Expliquer.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

*Chaque question comporte trois affirmations repérées par les lettres* a, b, c.
*Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse sans justification.*
**Les réponses seront transcrites dans le tableau figurant en annexe.**
Soit $f$ une fonction impaire définie et dérivable sur $[-5\ ;\ 5]$ ; on désigne par $F$ une primitive de $f$ sur cet intervalle.
Sur les graphiques ci-dessous, le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est un repère orthogonal.
La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f$.
Le point A a pour coordonnées $(-2\ ;\ 8)$, le point B a pour coordonnées $\left(-2\sqrt{3}\ ;\ 0\right)$ et le point C a pour coordonnées $\left(2\sqrt{3}\ ;\ 0\right)$.
La droite (OA) est la tangente en O à $\mathscr{C}$.




**1.** **a.** $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de $F'$.

**b.** $f'(0) = -2$.

**c.** $f$ est négative ou nulle sur $[-1\ ;\ 1]$.

**2.** **a.** Soit $S$ l'aire , exprimée en unités d'aire, de la portion de plan délimitée pu $\mathscr{C}$, l'axe $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath}\right)$ et la droite d'équation $x = -2$.
On a : $0 \leqslant S \leqslant 2$.

**b.** $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\text{d}x = 0$.

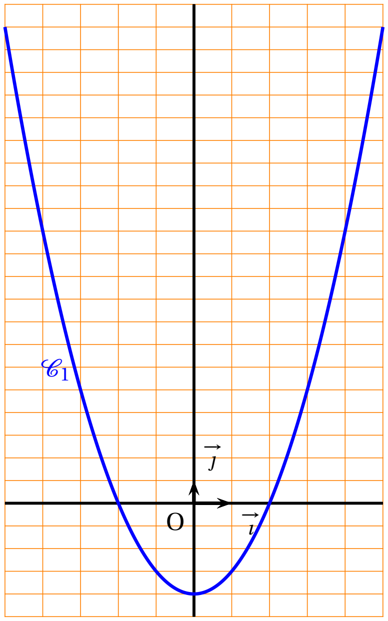
**c.** $F(2) - F(0) < 0$.

**3.** Parmi les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ l'une représente $f'$ et l'autre représente $F$.

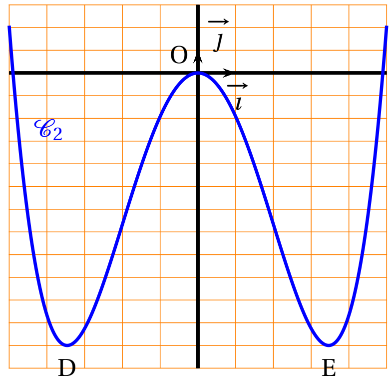
**a.** Une équation de $\mathscr{C}_1$ est $y = x^2 - 2$.

**b.** $\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de $f'$.

**c.** $\displaystyle\int_{0}^{2\sqrt{3}} f(x)\,\text{d}x = -10$.




$\mathscr{C}_2$ est la représentation graphique d'une fonction dérivable.
Le point D a pour abscisse $-2\sqrt{3}$.
Le point E a pour abscisse $2\sqrt{3}$.



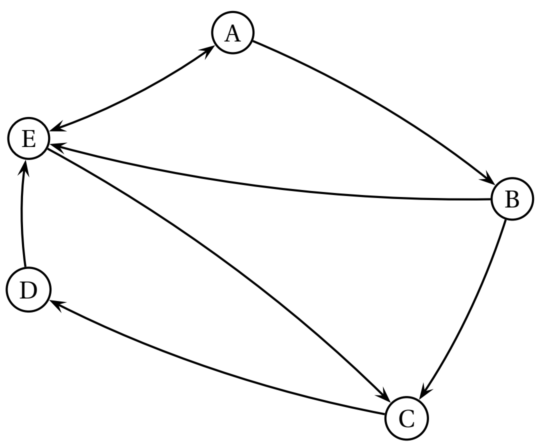

**EXERCICE 2** **5 points**

**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

*Chaque question comporte trois affirmations repérées par les lettres a, b, c.*
*Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie oufausse sans justification.*

**Les réponses seront transcrites dans le tableau figurant en annexe.**

Dans une ville la circulation réglementée par des sens uniques est représentée par le graphe G ci-dessous dont les sommets illustrent les carrefours existant entre les rues.




**1.** Les sommets étant classés dans l'ordre alphabétique,

**a.** la matrice associée au graphe G est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**b.** la matrice associée au graphe G est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**c.** la matrice associée au graphe G est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

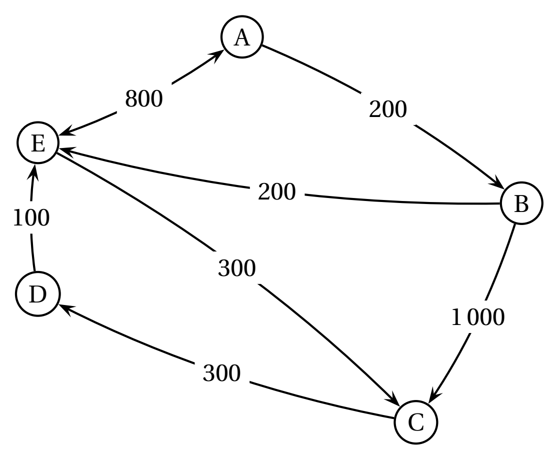
**2.** Le nombre de chaînes de longueur 3 qui vont du sommet A vers le sommet D du graphe G est :

**a.** 3

**b.** 2

**c.** 4

**3.** Le graphe G est pondéré par la distance exprimée en mètres entre deux carrefours comme suit :




Un automobiliste est au carrefour A et cherche à rejoindre le carrefour D.
Le poids (minimum) en mètres de la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet D est :

**a.** 1 400

**b.** 1 000

**c.** 900

**4.** En tenant compte du sens de circulation la plus grande distance parcourue est :

**a.** de A vers D.

**b.** de B vers D.

**c.** de C vers B.

**PROBLÈME** **10 points**
**Commun à tous les candidats**

Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = 2\ln(t+1)+1 \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{4}{1+\mathrm{e}^{-t}}.$$

**1.** Étude de la fonction $f$

**a.** Étudier la limite de $f$ en $+\infty$.

**b.** Étudier le sens de variation de $f$.
Dresser le tableau de variations de $f$.

**2.** Étude de la fonction $g$

**a.** Étudier la limite de $g$ en $+\infty$.

**b.** Étudier le sens de variation de $g$.
Dresser le tableau de variations de $g$.

**3.** Étude graphique

Sur la feuille donnée en annexe, la courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de $f$ dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On appelle $\Gamma$ la courbe représentative de la fonction $g$ dans ce repère.

**a.** Une des deux courbes admet une asymptote. Préciser laquelle et tracer cette asymptote dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

**b.** Tracer la courbe $\Gamma$.

**c.** À l'aide du graphique, donner une valeur approchée à 0,1 près de l'abscisse $\alpha$ du point d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma$, puis étudier graphiquement le signe de $g(t) - f(t)$ suivant les valeurs de $t$.

**4.** Calcul de primitives

**a.** Montrer que $g(t) = \dfrac{4\text{e}^t}{\text{e}^t + 1}$ pour tout $t$ de $[0\,;\,+\infty[$.
En déduire une primitive de $g$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

**b.** Soit $H$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$H(t) = (t+1)\ln(1+t) - t.$$

Déterminer la dérivée de $H$ et en déduire une primitive de $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

**5.** Application économique

Un plan de restructuration dans une industrie est établi sur cinq ans. On admet que $f(t)$ modélise le nombre d'emplois créés, en milliers d'emplois, et que $g(t)$ représente le nombre d'emplois supprimés, en milliers d'emplois, $t$ représentant le temps en années.

On admet que, sur cinq ans, la variation du nombre d'emplois est donnée par :

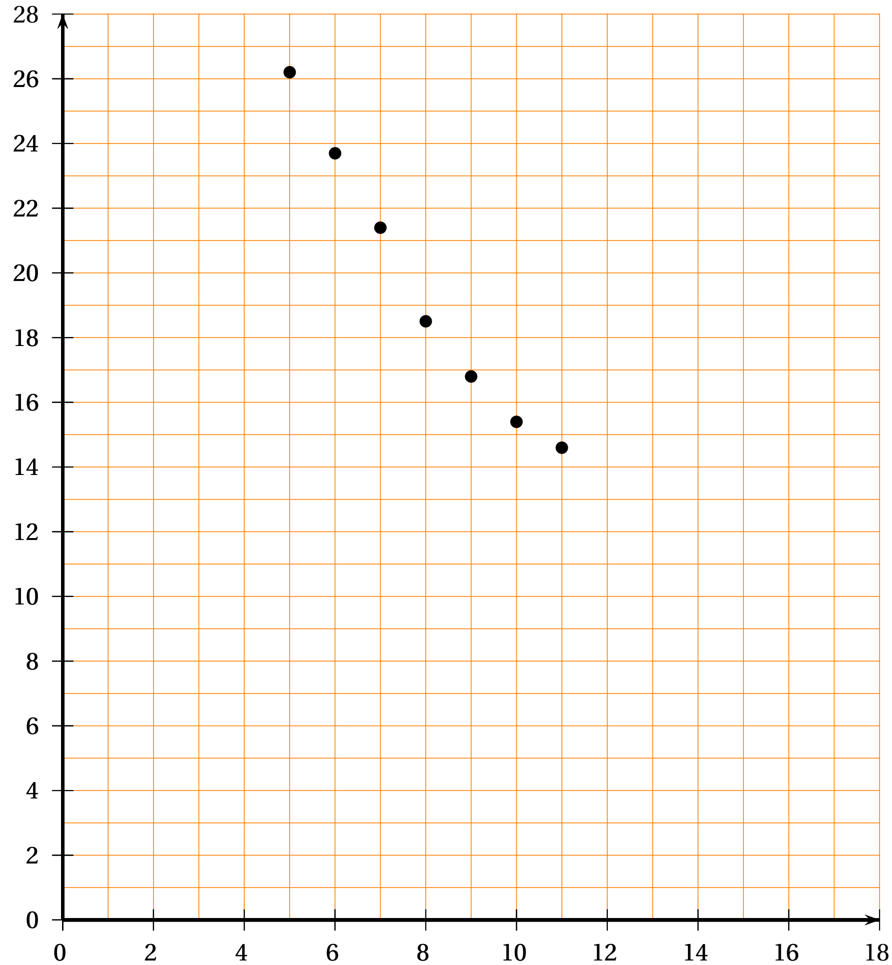
$$\text{I} = \int_0^5 [f(t) - g(t)]\,\text{d}t.$$

**a.** Calculer I et donner la variation du nombre d'emplois sur les cinq ans à la dizaine d'emplois près.
Interpréter ce résultat.

**b.** Déterminer, à l'aide de la **question 3**, le temps nécessaire, exprimé en mois, pour que le nombre d'emplois créés soit supérieur au nombre d'emplois supprimés.

**Annexe à rendre avec la copie**

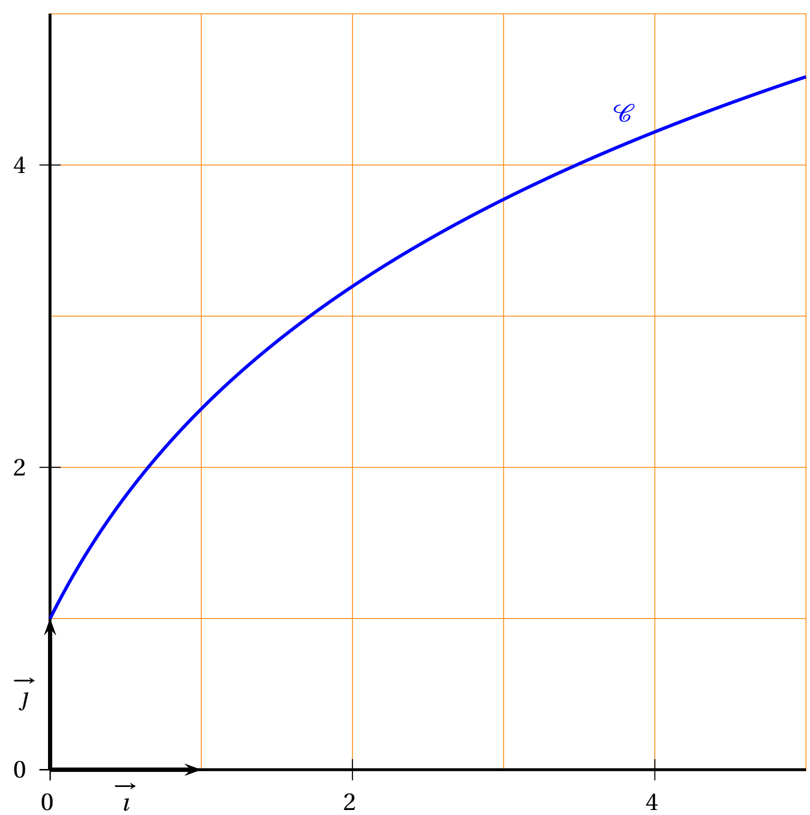
Exercice 1



**Exercice 2**

| Question 1 | | Vrai ou Faux |
|---|---|---|
| | a | |
| | b | |
| | c | |
| Question 2 | | Vrai ou Faux |
| | a | |
| | b | |
| | c | |
| Question 3 | | Vrai ou Faux |
| | a | |
| | b | |
| | c | |

**Problème**



# Baccalauréat ES Antilles septembre 2003

**EXERCICE 1** **9 points**
**Commun à tous les candidats**

Le but de cet exercice est l'étude d'une fonction définie partiellement par sa représentation graphique ; on considère la fonction $f$ définie sur par :

$$f(x) = ax + bx\ln(x) - 1,$$

où $a$ et $b$ sont deux réels non nuls.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;\,2]$ est donnée en annexe (à rendre avec la copie).

**Partie A**

1. **a.** Déterminer graphiquement $f(1)$.
   **b.** En déduire que $a = 3$.
2. On sait que $f\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right) = -6\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} - 1$.
   En déduire la valeur de $b$.
   Dans la suite du problème la fonction $f$ est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 3x + 6x\ln(x) - 1.$$

**Partie B**

1. Déterminer les limites de la fonction $f$ en 0 et en $+\infty$.
   (On pourra utiliser le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$.)
2. **a.** On admet que $f$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ ; montrer que pour tout $x \in ]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 9 + 6\ln(x)$.
   **b.** Étudier le signe de $f'$ et en déduire les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   **b.** Tracer en couleur la droite $\mathscr{D}$ sur la figure de l'annexe ainsi que la tangente au point d'abscisse $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

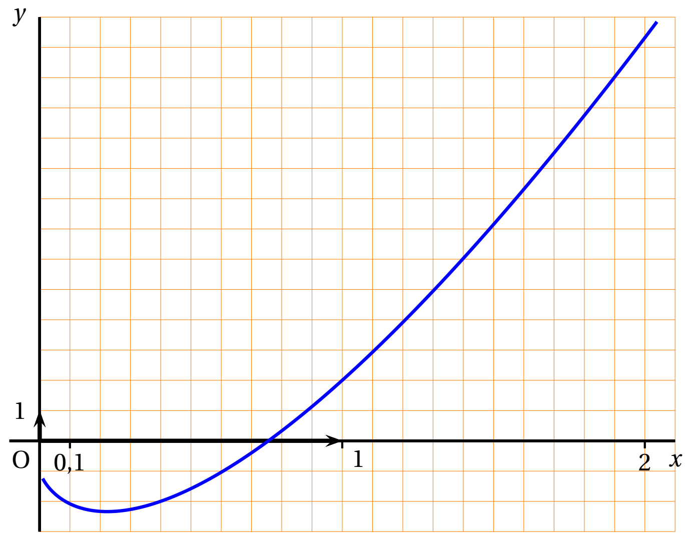
**Partie C**

Sur la figure de l'annexe, les graduations représentent 1 unité en ordonnée et 0,1 unité en abscisse.

1. Combien d'unités d'aire représente un carreau ?
   En vous appuyant sur la figure de l'annexe, donner un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 2 de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. On considère la fonction $g$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 3x^2\ln(x).$$

   **a.** On admet que $g$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ ; déterminer la dérivée $g'$ de $g$.
   **b.** En déduire une primitive de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Donner une valeur approchée du résultat à $10^{-1}$ près.




**EXERCICE 2** **6 points**

Dans une fête foraine, Julie décide de jouer à un jeu dont chaque partie se déroule de la façon suivante :

- Elle tire un jeton dans une urne contenant 7 jetons rouges et 2 bleus.
- S'il est bleu elle gagne, sinon, sans remettre le premier jeton tiré, elle en tire un deuxième.
- S'il est bleu elle gagne, sinon, sans remettre les deux précédents, elle en tire un troisième.
- S'il est bleu elle gagne, sinon elle a perdu la partie.

**1.** Pour les calculs suivants, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

**a.** Déterminer les probabilités des évènements suivants :

- $A$ : « Julie gagne en un tirage exactement » ;
- $B$ : « Julie gagne en deux tirages exactement » ;
- $C$ : « Julie gagne en trois tirages exactement ».

**b.** Calculer la probabilité de gagner à ce jeu.

**2.** On suppose dans la suite de l'exercice qu'à chaque partie la probabilité de gagner est $\frac{7}{12}$.

À chaque partie gagnée, Julie gagne 1 ticket. Elle a remarqué un joli petit ourson en peluche qu'elle peut obtenir avec au moins 3 tickets.
Elle décide donc d'effectuer quatre parties consécutives.
On suppose que les parties sont indépendantes.
On appelle $k$ le nombre de tickets gagnés par Julie lors des quatre parties et on notera $P(A)$ la probabilité de l'évènement $A$.

**a.** Montrer que $P(k=2) \approx 0,354$ à $10^{-3}$ près.

**b.** On donne, à $10^{-3}$ près :
$P(k=0) \approx 0,030$ ;
$P(k=1) \approx 0,169$ ;
$P(k=3) \approx 0,331$ ;
$P(k=4) \approx 0,116$.
Déterminer la probabilité pour que Julie reparte avec l'ourson à l'issue des quatre parties.

**3.** La mise pour quatre parties est de 5 €.
Les gains sont des bibelots dont la valeur, en fonction du nombre de tickets gagnés, est donnée dans le tableau ci-dessous :

| Nombre de tickets | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Valeur du gain (en €) | 0 | 0,75 | 0,75 | 6 | 10 |

On appelle $G$ le gain de Julie, c'est-à-dire ce qu'elle gagne compte tenu de ses mises.

**a.** Quelles sont les différentes valeurs prises par $G$ ?

**b.** Déterminer la loi de probabilité de $G$ (on pourra utiliser les résultats donnés à la **question 2.**).

**c.** Calculer l'espérance mathématique de $G$ et commenter le résultat obtenu.

**EXERCICE 3** **5 points**
**Enseignement obligatoire**

La part des femmes élues maires de 1947 à 2001 est donnée en pourcentage par le tableau suivant :

| Année | 1947 | 1953 | 1959 | 1965 | 1971 | 1977 | 1983 | 1989 | 1995 | 2001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Part $y_i$ (%) | 0,7 | 0,8 | 1 | 1,1 | 1,7 | 2,6 | 4 | 5,5 | 7,6 | 11,3 |

*Pour tout l'exercice, les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés.*

**1.** Représenter le nuage de points associé à cette série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthonormé (unités : 1 cm).

**2.** Donner une équation de la droite d'ajustement affine de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième).
Tracer cette droite sur le graphique précédent.

**3.** En supposant que cet ajustement reste pertinent jusqu'en 2007, calculer une estimation de la part des femmes élues maires en 2007.

**4.** La forme du nuage de points laisse penser qu'un autre ajustement serait préférable. Pour cela, on pose $z = \ln y$, où ln est la fonction logarithme népérien.

**a.** Faire un tableau faisant apparaître les valeurs $x$ et les valeurs $z = \ln y$, arrondies au centième.

**b.** Donner une équation de la droite d'ajustement affine de $z$ en $x$ par la méthode des moindres carrés, les coefficients étant arrondis au centième.

**c.** En déduire l'ajustement $y = 0,54\mathrm{e}^{0,32}x$.

**d.** En supposant que cet ajustement reste pertinent jusqu'en 2007, calculer une estimation de la part des femmes élues maires en 2007.

**EXERCICE 3** **5 points**
**Enseignement de spécialité**

La figure donnée en annexe (à rendre avec la copie) représente une pyramide SABCD de sommet S.
On donne les coordonnées des points suivants dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ :
S(0 ; 0 ; 5) ; A(0 ; 2 ; 0) ; B(2 ; 0 ; 0) ; C(0 ; −2 ; 0) ; D(−2 ; 0 ; 0) ; M(0 ; 1 ; 0).

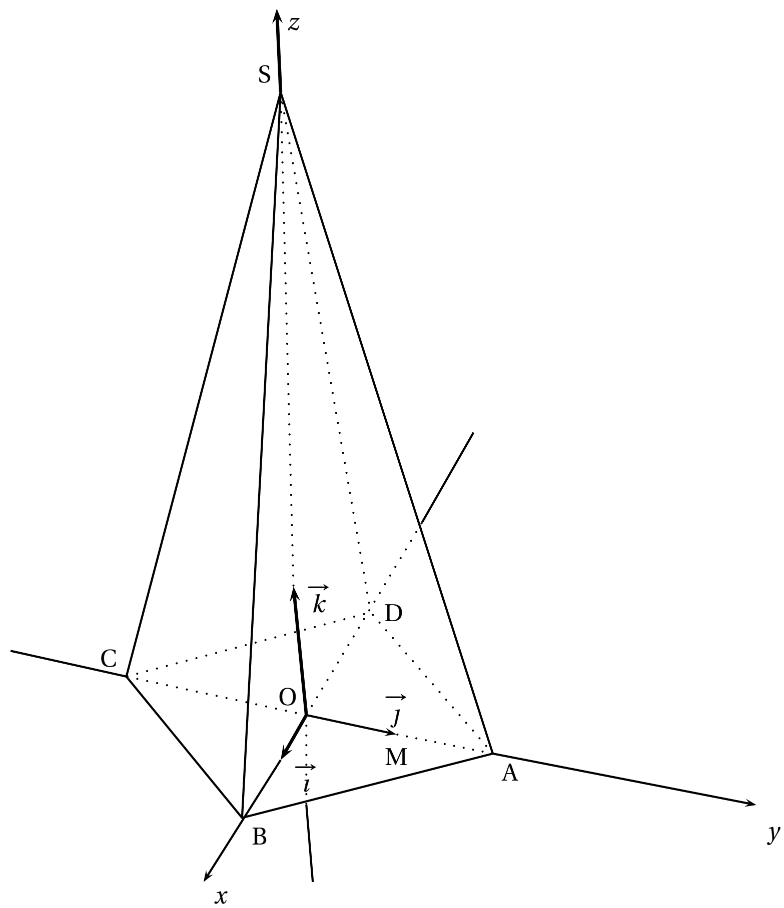
1. Démontrer que la base ABCD de la pyramide est un carré.
2. **a.** Sans aucun calcul, donner une équation du plan contenant les points A, B, C et D.

   **b.** Déterminer une équation du plan (ABS).
3. **a.** Vérifier que le plan (BCS) admet pour équation : $5x - 5y + 2z = 10$.

   **b.** Placer le point N$(1\ ;\ -1\ ;\ 1)$. Est-il dans le plan (BCS) ?
4. **a.** Déterminer une équation du plan $\mathscr{R}$ parallèle au plan (BCS) passant par le point M.

   **b.** Dessiner les traces du plan $\mathscr{R}$ sur les plans $(x\text{O}y)$, $(y\text{O}z)$ et $(x\text{O}z)$.

**Annexe**


z
S
$\overrightarrow{k}$
D
C
O
$\overrightarrow{\jmath}$
M
A
$\overrightarrow{\imath}$
B
y
x

# ∽ Baccalauréat ES Métropole septembre 2003 ∾

**Exercice 1** **6 points**
**Commun à tous les candidats**

### Partie A

Soit la fonction $f$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 4 - 8\ln x.$$

1. Étudier les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.
2. **a.** Déterminer la dérivée de $f$ et en déduire le sens de variation de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   **b.** Dresser le tableau de variation de $f$. En déduire le signe de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** Montrer que la fonction $G$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$G(x) = x\ln x - x$$

   est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $]0\ \ +\infty[$.
   **b.** En déduire la primitive $F$ de $f$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ vérifiant $F(1) = 0$.

### Partie B

Le cours d'une action cotée en bourse, exprimé en dizaines d'euros, est égal à $f(x)$, où $x$ représente le nombre de mois écoulés à partir du 1<sup>er</sup> décembre 2001. On a $x \in [1\ ;\ 12]$.

1. Un investisseur décide d'acheter 2 500 actions de ce type. En quel mois de l'année 2002 est-il le plus judicieux pour lui d'acheter ? Calculer sa dépense arrondie à l'euro.
2. **a.** Calculer la valeur moyenne de $f$ sur l'intervalle $[1\ ;\ 11]$ ; on en donnera un arrondi à 0,1.
   **b.** Quelle interprétation économique peut-on donner de ce résultat ?

**Exercice 2** **5 points**
**Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

*Dans tout cet exercice les résultats seront arrondis à* $10^{-2}$.
Une étude statistique effectuée sur un produit a donné les résultats suivants où
$x$ désigne le prix unitaire en euros,
$y$ désigne la demande en milliers d'unités
$z$ désigne l'offre en milliers d'unités.

| $x$ | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | 5 | 7 | 8,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 8,4 | 5,3 | 3,9 | 3,1 | 2,8 | 2,1 | 1,7 |
| $z$ | 0,75 | 1,25 | 1,75 | 2,25 | 2,5 | 3,5 | 4,25 |

1. **a.** Vérifier que la quantité offerte $z$ est proportionnelle au prix unitaire $x$.
   **b.** On appelle $g$ la fonction offre ainsi définie sur $[1\ ;\ 10]$ par $z = g(x)$.
   Représenter $g$ dans le repère orthonormal $\mathcal{R}$ (unité graphique 1 cm).
2. **a.** Représenter, dans le repère $\mathcal{R}$, le nuage de points associé à la série statistique $(x\ ;\ y)$.
   **b.** Donner une équation de la droite D d'ajustement affine de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés (aucun calcul n'est exigé sur la copie).
   Tracer D dans le repère $\mathcal{R}$.

**c.** À l'aide de cet ajustement, calculer le prix unitaire d'équilibre (c'est-à-dire celui pour lequel l'offre est égale à la demande). Vérifier graphiquement.

**3.** On se propose de determiner un autre type d'ajustement pour cette série.

**a.** Recopier et compléter le tableau suivant :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X = \ln x$ | 0,41 | | 1,25 | | | | |
| $Y = \ln y$ | 2,13 | | | | | | |

**b.** On admet qu'il est justifié de considérer un ajustement affine de $Y$ en $X$.
Donner une équation de la droite d'ajustement affine de $Y$ en $X$. .

**c.** En déduire que l'on a $y = \mathrm{e}^{-0,92\ln x+2,51}$ et calculer le prix unitaire d'équilibre obtenu avec ce nouvel ajustement.

**Exercice 2** **5 points**
**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

Une entreprise fabrique deux produits E et F en quantités respectives $x$ et $y$ exprimées en tonnes, pour lesquelles le coût de production $z$ est donné par

$$z = x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 13.$$

où $z$ est exprimé en milliers d'euros avec $x \in [0 ; 7]$ et $y \in [0 ; 7]$.

**1.** La surface représentant ce coût est donnée dans le repère de l'espace situé sur la feuille fournie en annexe qui sera rendue avec la copie.

**a.** Placer sur cette surface le point A d'abscisse 4 et d'ordonnée 6.

**b.** Donner graphiquement un encadrement d'amplitude 10 de la cote du point A.

**c.** Vérifier par le calcul.

**2.** **a.** Montrer que l'on a $z = (x-3)^2 + 2(y-1)^2 + 2$.

**b.** En déduire la production pour laquelle ce coût est minimal. Quel est ce coût en euros ?

**c.** Placer le point B correspondant à cette production sur la surface.

**3.** L'entreprise doit fabriquer une quantité $x$ du produit E et une quantité $y$ du produit F avec la contrainte $x + y = 7$.

**a.** Vérifier que $z$ peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$ avec $x \in [0 ;7]$ et
$g(x) = 3x^2 - 30x + 83$.

**b.** Déterminer la valeur de $x$ pour laquelle $g$ admet un minimum. Quel est alors le coût de production en euros ?

**c.** Placer le point C correspondant à cette production sur la surface.

**Problème** **9 points**
**Commun à tous les candidats**

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction $L$ vérifiant les conditions suivantes

- $L$ est définie sur $[0 ; 1]$ ;
- $L$ est croissante sur $[0 ; 1]$ ;
- $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$ ;
- pour tout $x$ de $[0 ; 1]$, $L(x) \leqslant x$.

**Partie A : les parties I et II sont indépendantes.**

Le but de la **partie A** est de vérifier que les fonctions $f$ et $g$ considérées satisfont aux conditions énoncées ci-dessus.

**I.** Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1.$$

1. Déterminer la dérivée de $f$ et dresser le tableau de variation de $f$ sur $[0\,;\,1]$.
2. Déterminer le signe de $x - f(x)$ sur $[0\,;\,1]$.
3. Conclure.

**II.**

1. Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}-2)x - 1.$$

   **a.** Calculer $g'(x)$. En déduire le sens de variation de $g$ sur $[0\,;\,1]$.

   **b.** Calculer $g(0)$ et $g(1)$.

2. Soit $h$ la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$h(x) = -\mathrm{e}^x + (\mathrm{e}-1)x + 1.$$

   **a.** Le tableau suivant donne le signe de la dérivée de $h$ (que l'on ne demande pas de calculer).

| $x$ | 0 | | $\ln(\mathrm{e}-1)$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $h'(x)$ | | + | 0 | − | |

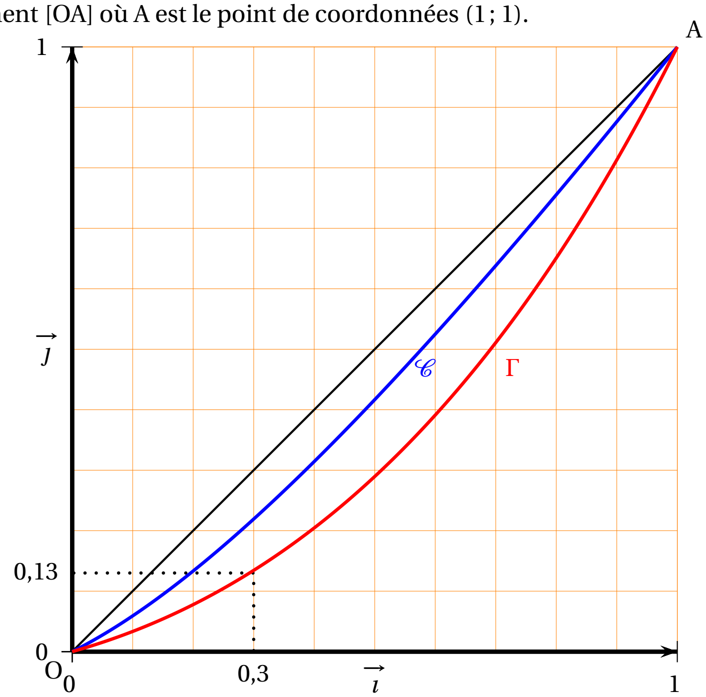
   Dresser le tableau de variations de $h$ ; on précisera l'arrondi à 0,1 de $h[\ln(\mathrm{e}-1)]$.

   **b.** Vérifier que pour tout $x$ de $[0\,;\,1]$, on a : $h(x) = x - g(x)$.
   À l'aide de **II. 2. a.**, montrer que pour tout $x$ de $[0\,;\,1]$, on a : $g(x) \leqslant x$.

3. Conclure.

**Partie B**

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes représentatives respectives $\mathscr{C}$ et $\Gamma$ des fonctions $f$ et $g$ et le segment [OA] où A est le point de coordonnées $(1\,;\,1)$.



1. On suppose que la courbe de Lorenz $\Gamma$ illustre la répartition des surfaces des exploitations agricoles d'un pays G.

   En abscisse, $x$ représente le pourcentage du nombre des exploitations les plus petites par rapport au nombre total des exploitations du pays.

   En ordonnée, $g(x)$ représente le pourcentage total des superficies de ces exploitations.

   Par exemple, comme l'arrondi de $g(0,3)$ à $10^{-2}$ est 0,13 on dit que 30 % des exploitations les plus petites représentent au total 13 % de la superficie des exploitations du pays G.

   Donner la valeur arrondie à $0,01$ de $g(0,5)$. Interpréter ce résultat.

2. On appelle coefficient de Gini pour le pays G, le nombre $2\mathscr{A}$ où $\mathscr{A}$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par le segment [OA] et la courbe $\Gamma$. On le note $\gamma_{\text{G}}$.

   **a.** Exprimer cette aire $\mathscr{A}$ à l'aide d'une intégrale. Déterminer la valeur exacte de cette aire.

   **b.** Donner la valeur arrondie à 0,01 de $\gamma_{\text{G}}$.

3. La représentation graphique $\mathscr{C}$ de $f$ est la courbe de Lorenz pour un pays F.

   Calculer $\gamma_{\text{F}}$ le coefficient de Gini pour le pays F.

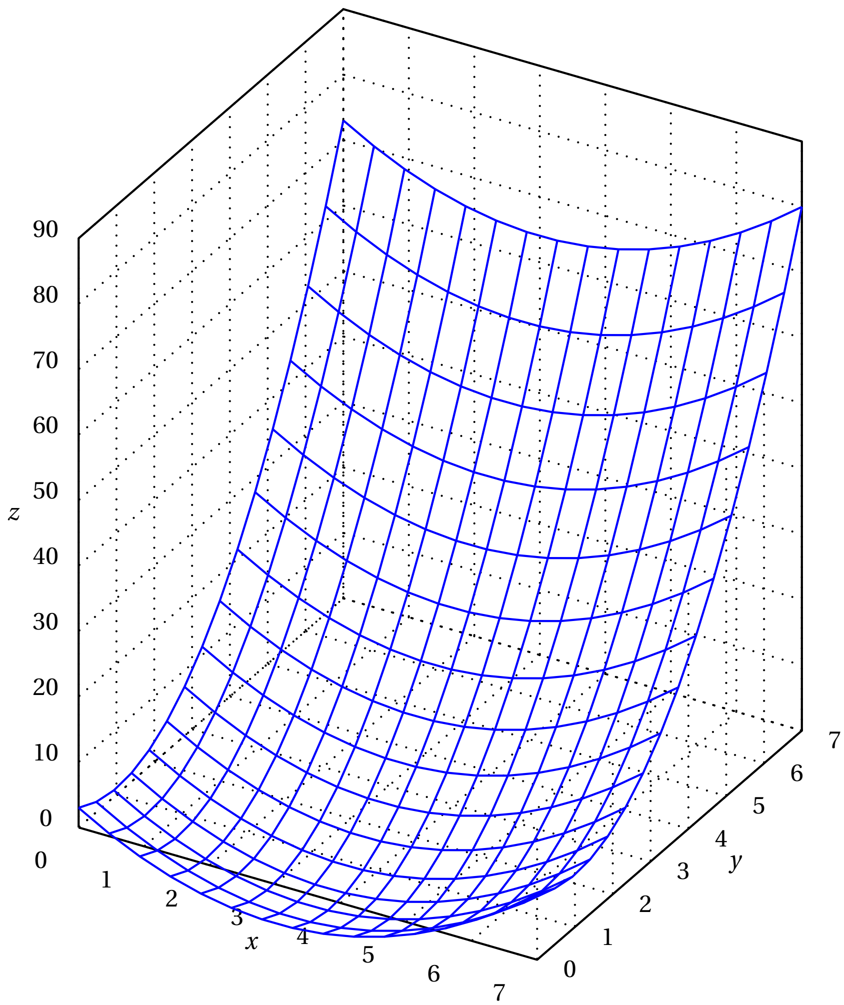
   En donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 0,01.

4. Plus le coefficient de Gini est petit, plus la répartition des exploitations est égalitaire.

   **a.** Quel est le pays pour lequel la répartition est la plus égalitaire ?

   **b.** Le graphique permettait-il de prévoir ce résultat ? Pourquoi ?

**Annexe à rendre avec la copie**
**Enseignement de spécialité**



# ∽ Baccalauréat ES (obligatoire) Polynésie septembre 2003 ∾

**EXERCICE 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

Le tableau suivant donne le taux de prélèvement obligatoire en France exprimé en points de PIB (produit intérieur brut).

| Année | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Taux $t_i$ | 42,7 | 42,9 | 43,4 | 43,7 | 44,8 | 44,9 | 44,9 | 45,7 | 44,7 | 44,2 |

Source : budget

Le nuage de points associe à la série $(x_i\ ;\ t_i)$ présentant des écarts à peu près réguliers de part et d'autre de la droite d'ajustement, on effectue un lissage par la méthode des moyennes mobiles d'ordre 3 en remplaçant le taux $t_i$ par la moyenne $z_i = \dfrac{t_{i-1} + t_i + t_{i+1}}{3}$. Par exemple : $z_1 = \dfrac{z_0 + z_1 + z_2}{3} = 43$.

**1.** Compléter après l'avoir reproduit le tableau suivant (les valeurs seront arrondies à 0,1) et compléter le nuage de points sur la figure donnée en annexe.

| Rang de l'année $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Moyenne $z_i$ | 43 | 43,3 | | 44,5 | | | 45,1 | 44,9 |

**2.** Écrire une équation de la droite d'ajustement affine D de $z$ en $x$ par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 0,01). Tracer D sur la figure fournie en annexe.

**Partie B**

L'allure du nuage permet d'envisager un autre ajustement correspondant à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation

$$y = -0,065x^2 + 0,91x + 42.$$

**1.** Tracer la parabole $\mathscr{P}$ sur la figure fournie en annexe en utilisant le tableau suivant. On prendra 45,2 comme valeur approchée de l'ordonnée du sommet de $\mathscr{P}$.

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 42,8 | 43,6 | 44,1 | 44,6 | 44,9 | 45,1 | 45,2 | 45,1 |

**2.** On se propose d'étudier pour lequel des deux modèles on obtient le meilleur ajustement. Pour cela, on calcule les sommes des carrés des écarts entre les valeurs $z_i$ et les valeurs données par le modèle. On appelle $S_{\mathscr{P}}$ et $S_D$ les sommes associées respectivement à la parabole $\mathscr{P}$ et à la droite D.

**a.** Compléter après l'avoir reproduit le tableau suivant. Les valeurs sont données à 0,01 près.

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(z_i - y_i)^2$ | 0,04 | 0,09 | | 0,01 | | | 0,01 | 0,04 |

**b.** Calculer $S_{\mathscr{P}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{8} (z_i - y_i)^2$.

**c.** Pour le modèle correspondant à la droite D on donne $S_D = 0,8$. Quel est le modèle qui donne le meilleur ajustement ?

**3.** En utilisant le modèle associé à la parabole $\mathscr{P}$ :

**a.** Calculer $y_9$ ( valeur arrondie à $10^{-2}$).

**b.** Cette valeur étant une estimation de la moyenne mobile $z_9$, en déduire une estimation $t_{10}$ du taux de prélèvement obligatoire en 2002.

### EXERCICE 2 — 5 points

**Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

La D.G. XXIV de la Commission Européenne, dans son rapport du 8 juillet 1999, détaille ainsi l'évaluation du test W pour le diagnostic de I'ESB (Encéphalopathie Spongiforme Bovine) :
• la proportion des réactions POSITIVES au test effectué sur des tissus nerveux provenant d'animaux infectés est égale à 70 % ;
• la proportion des réactions NÉGATIVES au test effectué sur des tissus nerveux provenant d'animaux non infectés est égale à 90 %.
On envisage un dépistage dans un cheptel bovin. On choisit dans le cheptel un animal au hasard.

On désigne par $M$ l'évènement « l'animal est malade » et par $T$ l'évènement « le test est positif ».

**Partie A**

On estime à 0,07 la fréquence d'animaux malades dans le cheptel.

1. Construire un arbre pondéré représentant cette situation et donner les valeurs manquantes.
2. En utilisant cet arbre, calculer $P(M \cap T)$ puis $P(T)$.
3. En déduire la probabilité que l'animal soit malade sachant que le test est positif. On donnera la valeur arrondie à $10^{-3}$.

**Partie B**

On estime maintenant à $x$ la fréquence d'animaux malades dans le cheptel.

1. Construire un arbre pondéré représentant cette situation.
2. En utilisant cet arbre, calculer $P(M \cap T)$ puis $P(T)$.
3. On note $P_T(M)$ la probabilité que l'animal soit malade sachant que le test est positif.
   Montrer que $P_T(M) = \dfrac{7x}{6x+1}$.
4. Soit $f$ la fonction numérique de la variable $x$ définie sur $[0\,;\,1]$ par
   $f(x) = \dfrac{7x}{6x+1}$.
   Résoudre sur $[0\,;\,1]$ l'inéquation $f(x) \geqslant 0,9$. Interpréter le résultat.

### PROBLÈME — 10 points

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

Le tableau de variations donné ci-dessous est celui de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 2.$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| Variations de $g$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\ln 2 - 1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

1. **a.** Calculer $g(0)$.
   **b.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une autre solution $\alpha$ appartenant à l'intervalle $[-2\,;\,-1]$.

   Dans la suite, on prendra $-1,6$ comme valeur arrondie de $\alpha$.
2. Déterminer le signe de $g$ sur $\mathbb{R}$.

**Partie B**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x}.$$

1. **a.** Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.
   **b.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ (on pourra mettre $\mathrm{e}^{2x}$ en facteur dans l'expression $f(x)$).
2. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'$ et $g$ ont le même signe.
   **b.** En déduire le sens de variations de $f$.
   **c.** Dresser le tableau de variations de $f$.
3. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de $f$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées).

**Partie C**

1. Soit $H$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = \mathrm{e}^{x}(x-1).$$

   Montrer que $H$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h$ définie par $h(x) = x\mathrm{e}^{x}$.
2. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f$.
3. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. On donnera la valeur exacte en unités d'aire, puis la valeur arrondie à $10^{-2}$ en cm$^2$.

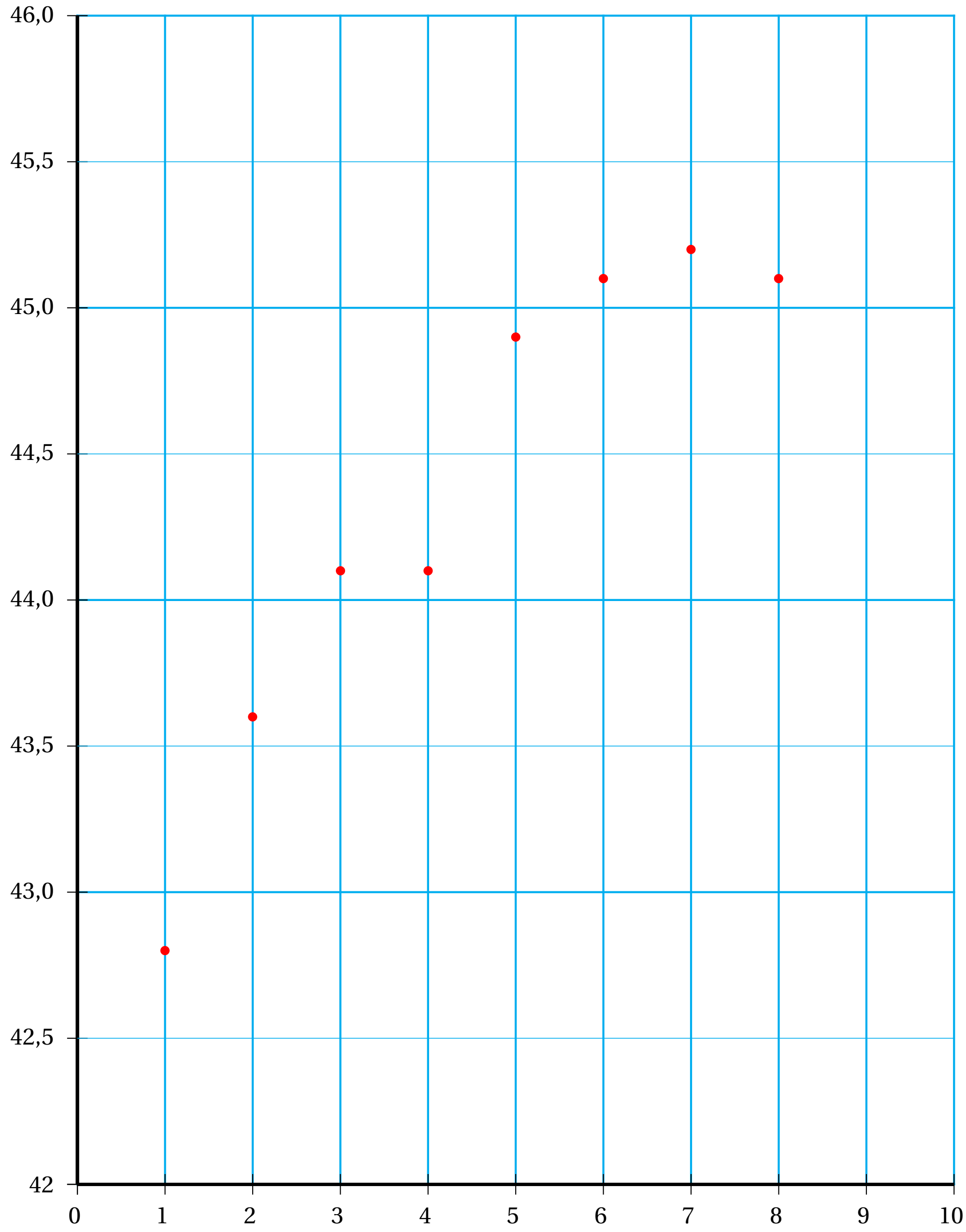
**Partie D**

Dans une entreprise, le coût de fabrication, en centaines d'euros, de $x$ dizaines d'objets est modélisé par la fonction $C$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $C(x) = f(x)$.

1. Calculer le coût de fabrication de 10 objets au centime d'euro près.
2. **a.** Résoudre graphiquement l'équation $C(x) = 6$.
   Donner une valeur approchée à $10^{-1}$ près par défaut du résultat.
   **b.** En déduire le nombre maximal d'objets qu'on peut fabriquer pour un coût de 600 € ?

**Annexe à rendre avec la copie**

Exercice 1

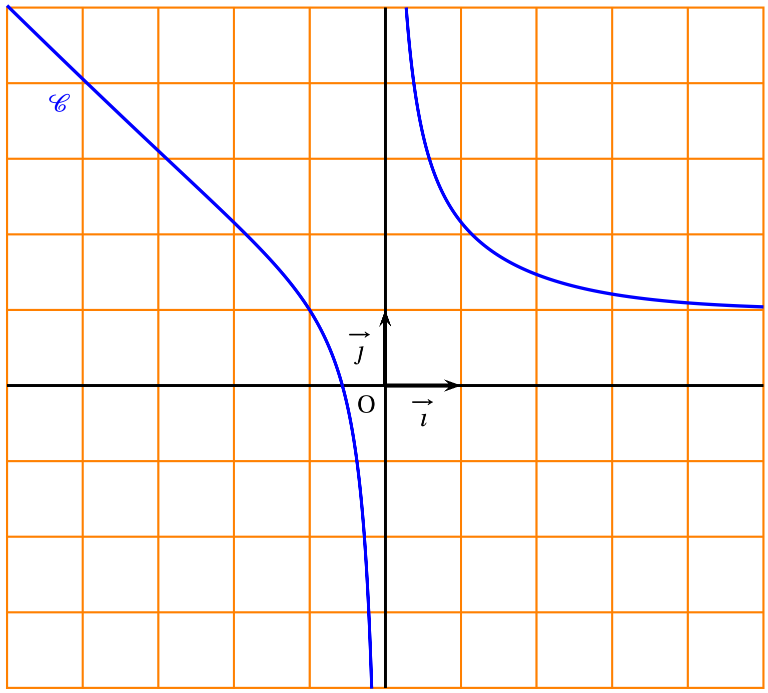


# Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2003

**EXERCICE 1** **5 points**

**Partie A**

**Lecture graphique**




La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessus est une représentation graphique, dans le plan muni du repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$.
L'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = 1$ sont deux asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

1. Lire les limites de la fonction $f$ aux bornes de l'ensemble de définition.
2. Résoudre graphiquement :
   a. $f(x) = 1$ ;
   b. $f(x) > 1$.

**Partie B**

On admet que la fonction $f$ représentée par la courbe précédente est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - 1}.$$

1. a. Vérifier que l'on a : $f(x) = \dfrac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}}$.
   b. Retrouver alors, en justifiant, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. a. Étudier, suivant les valeurs de $x$, le signe de $(e^x - 1)$.
   b. Résoudre l'inéquation $\dfrac{e^x + x}{e^x - 1} > 1$.
3. a. Démontrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) + x\right] = 0$.

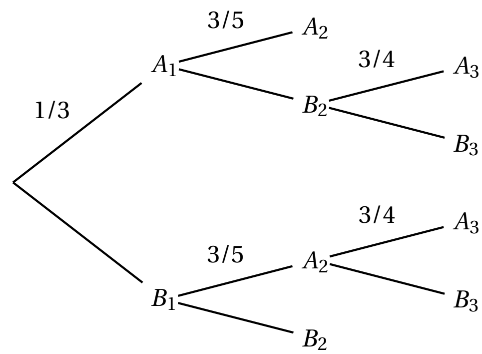
**b.** Que peut-on en déduire ?

**4.** Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

**EXERCICE 2** **5 points**

Alain et Benjamin pratiquent assidûment le tennis. Lorsqu'ils disputent un match l'un contre l'autre, est déclaré vainqueur le premier qui remporte deux manches.

Alain et Benjamin décident de faire un match.
On considère les évènements :
$A_i$ : « Alain remporte la $i$-ième manche » ;
$B_i$ : « Benjamin remporte la $i$-ième manche ».
On donne ci-contre l'arbre pondéré présentant toutes les issues possibles de cette rencontre.




1. Quelle est la probabilité qu'Alain remporte ce match en trois manches ?
2. Démontrer que la probabilité qu'Alain gagne cette rencontre est $0,6$.
3. Ils décident de jouer trois matchs dans l'année (les résultats des matchs sont indépendants les uns des autres) et de faire une cagnotte pour s'offrir un repas en fin d'année. À la fin de chaque match, le perdant versera 20 €.
   Benjamin s'interroge sur sa dépense éventuelle en fin d'année.
   **a.** Quelles sont les dépenses possibles de Benjamin ?
   **b.** Démontrer que la probabilité que Benjamin dépense 40 € est 0,432.
   **c.** Quelle est la loi de probabilité associée à la dépense possible de Benjamin ?
   **d.** Calculer l'espérance de dépense en fin d'année pour Benjamin.

**EXERCICE 2** **5 points**
**Enseignement de spécialité**

Monsieur X a placé 2 000 € le 31 décembre 2002 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de 3,5 % (ce qui signifie que, chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts). À partir de l'année suivante, il prévoit de placer, chaque 31 décembre, 700 € supplémentaires sur ce livret.
On désigne par $C_n$ le capital, exprimé en euros, disponible le 1er janvier de l'année $(2003 + n)$, où $n$ est un entier naturel. Ainsi, on a :

$$\mathrm{C}_0 = 2\,000.$$

1. **a.** Calculer le capital disponible le 1er janvier 2004.
   **b.** Établir, pour tout entier naturel $n$, une relation entre $C_{n+1}$ et $C_n$.
2. Pour tout entier naturel $n$, on pose :

$$u_n = C_n + 20\,000.$$

   **a.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   **b.** Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
   **c.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$C_n = 22\,000 \times (1,035)^n - 22\,000.$$

**d.** Calculer le capital disponible le 1er janvier 2008 (on arrondira le résultat à l'euro près).

**3.** Le premier janvier 2008, Monsieur X retirera alors le capital disponible de la banque pour financer un voyage dont le coût (supposé fixe) est de 6 000 €. Il paiera cette somme en 4 mensualités qui seront 4 termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 800 €.
Calculer le montant de chacune de ces 4 mensualités.

**PROBLÈME** **10 points**

**Partie A**

**Étude d'une fonction**

Soit $f$ la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(x^3 - x^2\right).$$

**1.** Justifier que, pour tout $x$ de l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, $f(x)$ est définie.

**2.** Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**3.** On note $f'$ la fonction dérivée de $f$. Vérifier que, pour tout $x$ dans l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{3x-2}{x(x-1)}.$$

Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

**4.** **a.** Démontrer que l'équation :

$$f(x) = 0$$

admet sur $]1\,;\,+\infty[$ une solution unique $\alpha$. Donner la valeur arrondie de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.

**b.** Démontrer que $f(x)$ est strictement positif sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

**5.** Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm, tracer la courbe $\Gamma$ représentative de la fonction $f$ sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

**6.** Soit $h$ la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = 2x\ln x + (x-1)\ln(x-1).$$

On note $h'$ sa fonction dérivée.
Pour tout $x$ de $]1\,;\,+\infty[$, calculer $h'(x)$.
En déduire une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$

**Partie B**

**Interprétation économique**

On considère une machine produisant un composé chimique liquide.
Pour qu'elle soit rentable, cette machine doit produire au moins 2 hectolitres.
De plus, le liquide produit est dangereux et impose une fabrication maximale de 9 hectolitres avant révision de la machine.
Pour tout $x$ de $[2\,;\,9]$, la valeur du coût marginal $c(x)$, exprimé en milliers d'euros, est donnée par :

$$c(x) = \ln\left(x^3 - x^2\right),$$

et $C_T(x)$ est le coût total de fabrication de $x$ hectolitres de liquide. On rappelle que :

$$C'_T(x) = c(x).$$

où $C'_T$ désigne la fonction dérivée de $C_T$.
Le coût total des deux premiers hectolitres (mise en route de la machine et fabrication) est 10 milliers d'euros, ce qui se traduit par $C_T(2) = 10$.

1. Déterminer le coût total $C_T(x)$ en fonction de $x$.
2. **a.** Calculer $C_T(9) - C_T(2)$. On donnera d'abord la valeur exacte, puis une valeur approchée à l'euro près.

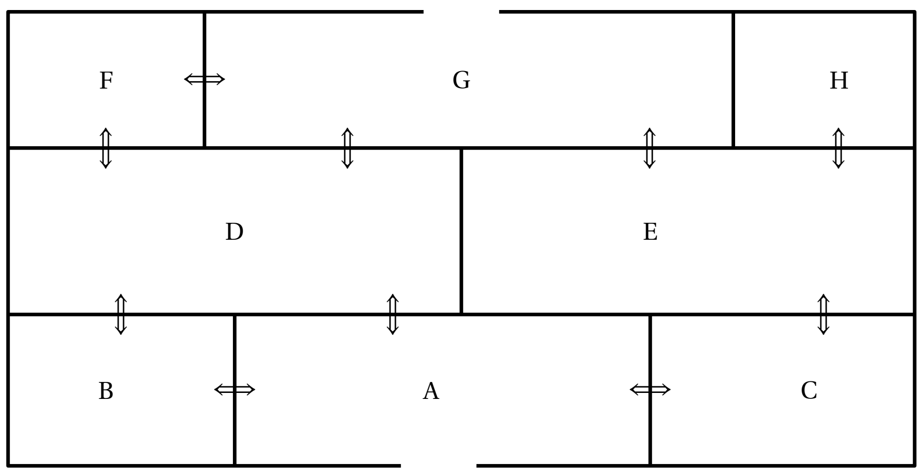
   **b.** Donner une interprétation graphique de la question **2. a.**.

# Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2003

**EXERCICE 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Jimmy s'entraîne à un jeu électronique.
Il arrive à l'entrée A d'un labyrinthe virtuel, schématisé par le dessin ci-dessous, où les doubles flèches représentent des portes s'ouvrant dans les deux sens :




Son parcours est régi par les règles suivantes :
- Il passe au hasard d'une salle à une autre, chaque porte possible étant équiprobable.
- Dès qu'il franchit une porte, elle se referme derrière lui, l'empêchant ainsi de la franchir à nouveau.
- La sortie est G. Il gagne la partie dès qu'il arrive en G.
- S'il franchit trois portes, l'entrée en A et la sortie en G non comprises, toutes les portes se ferment et la partie est terminée.

1. Jimmy décide de jouer une partie.
   - **a.** Construire l'arbre pondéré des différents trajets possibles.
   - **b.** Montrer que la probabilité du trajet ABDF est de $\frac{1}{9}$.
   - **c.** Montrer que la probabilité que Jimmy gagne est de $\frac{1}{2}$.
2. Jimmy joue trois fois de suite. Les trois parties successives sont indépendantes.
   - **a.** Calculer la probabilité qu'il gagne une partie et une seule.
   - **b.** Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie.

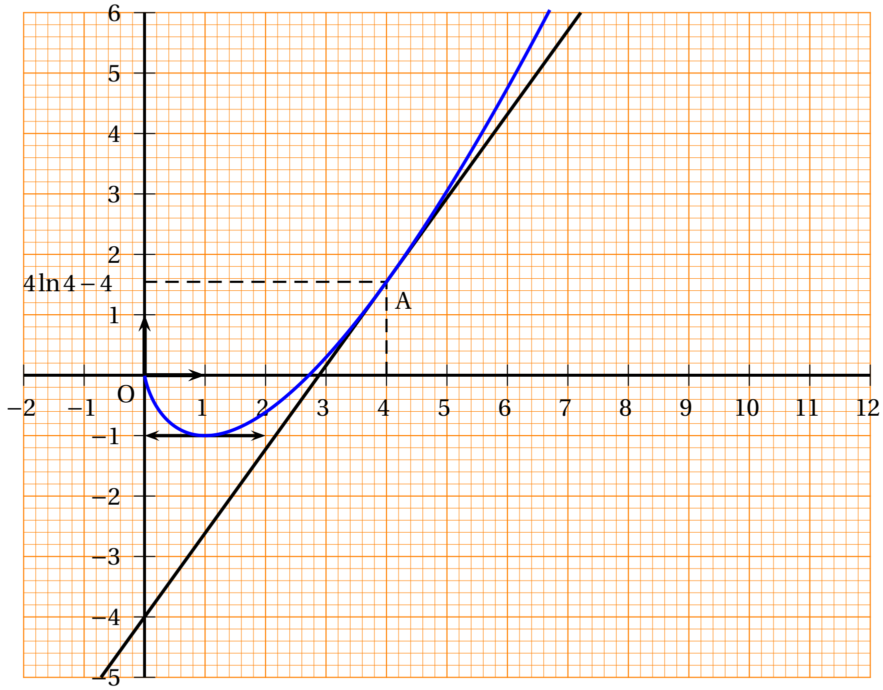
**EXERCICE 2** **4 points**

**Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

La courbe donnée ci-dessous représente une fonction $F$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$. On note $F'$ la fonction dérivée de $F$.

1. **a.** Par lecture graphique, donner les valeurs de : $F(1)$, $F'(1)$, $F(4)$.
   - **b.** La tangente à la courbe au point $A(4\,;4\ln 4-4)$ passe par le point $B(0\,;\,-4)$.
     Déterminer par lecture graphique la valeur de son coefficient directeur. En déduire $F'(4)$.
   - **c.** On note $f$ la fonction dont $F$ est une primitive. Donner la valeur de : $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. On donne : $F(x) = x\ln(x) - x$ pour $x > 0$. On appelle $a$ le nombre strictement positif tel que $\displaystyle\int_1^a f(x)\,\mathrm{d}t = 1$.
   - **a.** Exprimer $F(a)$ en fonction de $a$.
   - **b.** Calculer la valeur exacte de $a$ et une valeur approchée de $a$ à $10^{-3}$ près.
   - **c.** Calculer l'expression de $F'(x)$ pour $x > 0$.
   - **d.** Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant $F$ au point d'abscisse $a$.




**EXERCICE 2** **4 points**

**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

Un magasin de logiciels de jeux décide de lancer la commercialisation d'un nouveau produit.
Pour cela, il planifie sur trois ans ses objectifs trimestriels de prix de vente en se basant sur la loi de l'offre et de la demande.
$n$ étant un entier naturel, on désigne par $v_n$ l'indice du prix de vente lors du $n$-ième trimestre. L'indice de départ est noté $v_0$. On a : $v_0 = 100$ et $v_{n+1} = \dfrac{4}{5}v_n + 28$.

1. On pose : $u_n = v_n - 140$.
   - **a.** Montrer que $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{5}$ de premier terme $(-40)$.
   - **b.** Exprimer $u_n$ en fonction de $n$, puis $v_n$ en fonction de $n$.
2. On désigne par $d_n$ l'indice de la demande lors du $n$-ième trimestre.
   Sachant que : $d_n = \dfrac{750}{7} - \dfrac{5}{7}v_n$, calculer $d_0$ et exprimer $d_n$ en fonction de $n$.
3. Calculer les valeurs des deux indices au bout des trois ans.

**PROBLÈME** **11 points**

**Partie A : Fonction offre**

Dans un magasin, pour le marché d'un produit audiovisuel, l'offre hebdomadaire, exprimée en dizaines d'articles de ce produit, est définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{ax}-1}{4}$$

où $a$ est un nombre réel positif et où $x$ représente le prix de vente unitaire de ce produit exprimé en centaines d'euros.

**1.** Sachant qu'un prix de vente unitaire de 400 € (qui se traduit par $x = 4$) correspond à une offre de 745 dizaines d'articles, déterminer la valeur exacte de $a$. Dans la suite du problème, on prendra : $a = 2$.

**2.** Étude de la fonction $f$ définie sur $[0~;~+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{4}$.

- **a.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
- **b.** Calculer l'expression de $f'(x)$, où $f'$ désigne la dérivée de $f$ en déduire le sens de variations de $f$ sur $[0~;~+\infty[$.
- **c.** Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de $f$ (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées)

**Partie B : Fonction demande**

Dans ce même magasin pour le même article la demande hebdomadaire, exprimée en dizaines d'articles, est donnée en fonction du prix unitaire $x$, exprimé en centaines d'euros par une fonction $g$ définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{12}{\mathrm{e}^{2x}+1}$$

**1.** Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$.

**2.** Calculer l'expression de $g'(x)$, où $g'$ désigne la dérivée de $g$ ; en déduire le sens de variations de $g$ sur $[0~;~+\infty[$.

**3.** Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$, représentative de $g$ sur le même graphique que $\mathscr{C}_f$.

**Partie C : Prix d'équilibre**

On note $(p~;~q)$ les coordonnées du point d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

**1.** Par lecture graphique, donner un encadrement de $p$ à $10^{-1}$ près.

**2.** Par le calcul, on résolvant l'équation $f(p) = g(p)$, vérifier que : $p = \dfrac{\ln 7}{2}$.

**3.** Calculer la valeur exacte de $q$.

**4.** Le nombre $p$ correspond, selon la loi de l'offre et de la demande, au prix d'équilibre. Donner ce prix d'équilibre en euro au centime près par excès ainsi que le nombre d'articles offerts assurant l'équilibre du marché.

**Partie D : Équilibre, offre et demande**

On considère $\mathrm{R}_1 = pq - \displaystyle\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{R}_2 = \displaystyle\int_0^p g(x)\,\mathrm{d}x - pq$.

**1.** Calculer la valeur exacte de $\mathrm{R}_1$.

**2.** Soit la fonction $G$ définie sur $[0~;~+\infty[$ par : $G(x) = 6\left[2x - \ln\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)\right]$.

- **a.** Vérifier que $G$ est une primitive de $g$ sur $[0~;~+\infty[$.
- **b.** Calculer $\mathrm{R}_2$, et vérifier que 1,898 en est une valeur approchée.

**3.** Interpréter économiquement les quantités $pq$, $\mathrm{R}_1$ et $\mathrm{R}_2$.

# Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2004

**EXERCICE 1** **3 points**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| variation de $f$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | $+\infty$ |

On a donné le tableau de variations d'une fonction $f$ définie sur $]-\infty\ ;\ -2[\cup]-2\ ;\ +\infty[$, où $\alpha$ est le nombre réel strictement supérieur à 1 tel que $f(\alpha) = 0$.

On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Dire pour chacune des cinq affirmations suivantes si elle est VRAIE ou si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS CONCLURE. Aucune justification n'est demandée.

Le barème est le suivant :

— 0,5 point par réponse exacte ;

— 0,25 point par réponse fausse ;

— 0 point pour absence de réponse.

Cet exercice sera noté entre 0 et 3 ; il n'y aura pas de note globale négative.

1. La droite d'équation $y = -2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
2. L'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions.
3. $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in ]-5\ ;\ -2[$.
4. Sachant que $\alpha$ appartient à l'intervalle $]1\ ;\ 2[$, on a $\displaystyle\int_{\alpha}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x < 0$.
5. Les primitives de $f$ sont croissantes sur l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$.
6. Si $-2 < x < 1$ et $\alpha < x'$ alors $f(x) < f(x')$.

**EXERCICE 2** **4 points**

Pour chacune des questions suivantes, indépendantes les unes des autres, il est proposé quatre réponses dont une seule est exacte. Donnez la bonne réponse en justifiant votre choix.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(2+\frac{3}{x}\right) = L$

   **A.** $L = 0$ **B.** $L = \ln 2$ **C.** $L = \ln 5$ **D.** $L = 0,7$.

2. La courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$ admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation :

   **A.** $y = x+1$ **B.** $y = x-2$ **C.** $y = x$ **D.** $y = 3$.

**3.** $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

**A.** $I = \frac{1}{2}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{2}\mathrm{e}$ **B.** $I = \mathrm{e}^3 - 1$ **C.** $I = 0$ **D.** $I = 2\mathrm{e}^3 - 2\mathrm{e}$.

**4.** Dans un lycée 45 % des élèves de terminale sont des garçons. Les élèves de ce lycée étudient l'anglais, l'allemand ou l'espagnol en première langue vivante.
- 70 % des élèves étudient l'anglais,
- 20 % des garçons étudient l'allemand,
- 40 % des élèves qui étudient l'anglais sont des garçons,
- il y a autant de garçons que de filles qui étudient l'espagnol.

À l'aide d'un tableau ou d'un arbre, répondre aux questions suivantes :

**a.** Quel est le pourcentage des garçons qui étudient l'anglais ?

**A.** 42 % **B.** 28 % **C.** 18 % **D.** 52 %

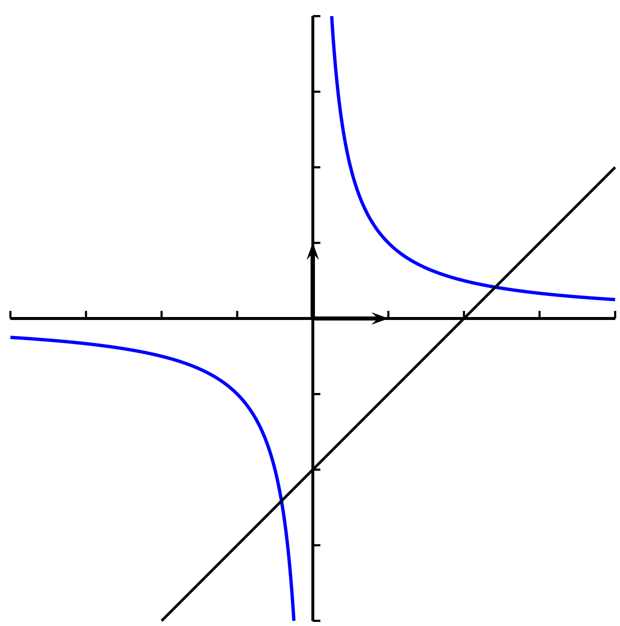
**b.** On choisit au hasard la fiche d'un élève parmi ceux qui ne pratiquent pas l'allemand. Quelle est la probabilité que ce soit une fille qui étudie l'espagnol ?

**A.** $\frac{2}{7}$ **B.** $\frac{4}{43}$ **C.** $\frac{8}{55}$ **D.** $\frac{5}{16}$.

**EXERCICE 3** **5 points**
**pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité**

Soit l'équation (E) : $\frac{1}{x} = x - 2$ où l'inconnue est un réel de l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

**1.** Un élève a représenté sur sa calculatrice l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et la droite d'équation $y = x - 2$.



Au vu du graphique ci-dessus obtenu à l'écran de sa calculatrice, combien l'équation (E) semble-t-elle admettre de solutions sur $]0~;~+\infty[$ ?

**2.** Un second élève considère la fonction $g$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}.$$

**a.** Déterminer les limites de $g$ aux bornes de l'ensemble de définition.

**b.** On note $g'$ la fonction dérivée de $g$. Calculer $g'(x)$. Montrer que $g$ est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

**c.** En déduire le nombre de solutions de l'équation (E) et en donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude $10^{-2}$.

**3.** Un troisième élève dit : « Je peux résoudre l'équation (E) algébriquement ». Justifier, en résolvant l'équation (E), que ce troisième élève a raison.

## EXERCICE 3 — 5 points

**Pour les candidats ayant suivi la spécialité**

Pour modéliser la production d'une entreprise les économistes utilisent des fonctions qui suivent le modèle dit de Cobb-Douglas : $z = Ax^{\alpha}y^{\beta}$ $(A,\ \alpha,\ \beta$ réels strictement positifs), où $z$ désigne une quantité obtenue à partir de deux quantités variables $x$ et $y$.

### Partie A

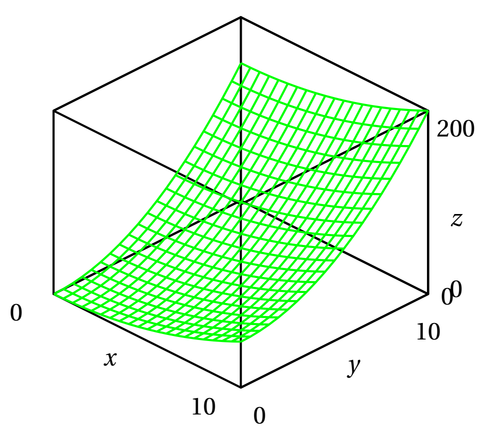
On considère les fonctions $f$ et $h$ définies pour $x \in [0\ ;\ 10]$ et $y \in [0\ ;\ 10]$ respectivement par

$$f(x\ ;\ y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad h(x\ ;\ y) = \frac{1}{4}x^2y.$$

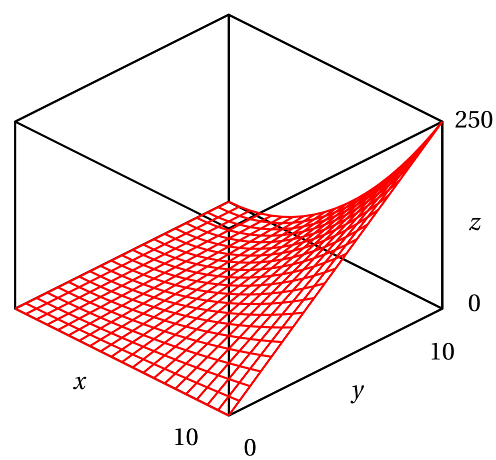
**1.** Vérifier que $f$ et $h$ sont deux fonctions de Cobb-Douglas en donnant pour chacune d'elles les valeurs $A,\ \alpha,\ \beta$.

**2.** Les représentations graphiques de $f$ et $h$ figurent parmi les trois représentations graphiques ci-dessous.

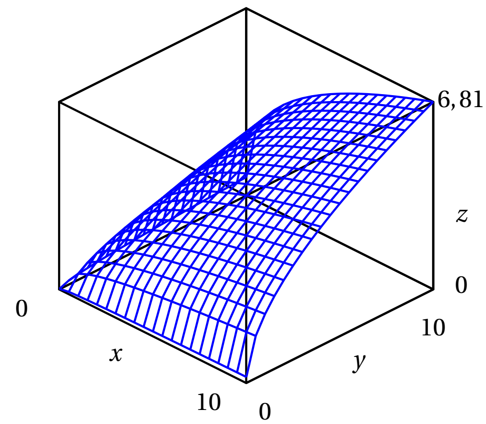
Associer à chaque fonction sa représentation graphique. Les choix seront justifiés.



représentation 1



représentation 2

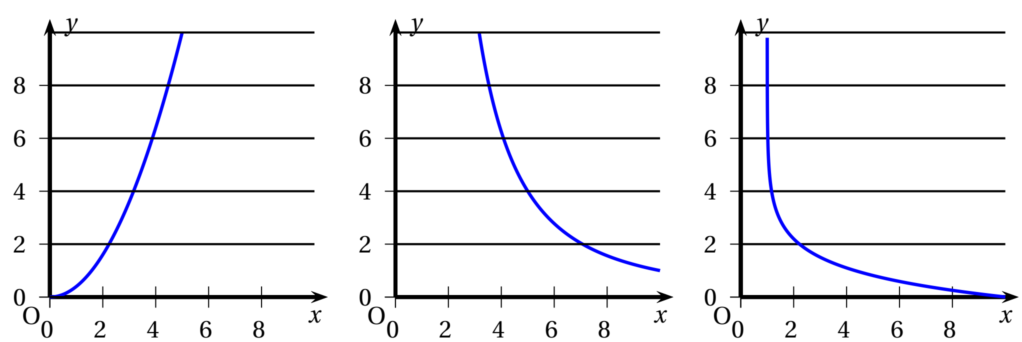



représentation 3

**Partie B**

La fabrication d'un produit dépend des durées de fonctionnement de deux machines M et M′. Les durées de fonctionnement des machines M et M′ exprimées en centaines d'heures sont respectivement égales à $x$ et $y$. La quantité produite, exprimée en tonnes, est $z = h(x,\ y)$, où $h$ est la fonction définie à la **partie A**.

**1.** Dans cette question la quantité produite est fixée à 25 tonnes.
Quelle est, parmi les trois représentations graphiques suivantes, celle de la section du plan d'équation $z = 25$ avec la surface d'équation $z = \frac{1}{4}x^2y$ ?




**2.** Les horaires de travail font que la somme des durées de fonctionnement des deux machines M et M′ est de huit centaines d'heures.

**a.** Montrer que $z = 2x^2 - \frac{1}{4}x^3$.

**b.** Soit la fonction $g$ définie par $g(x) = 2x^2 - \frac{1}{4}x^3$ pour $x \in [0 ; 8]$.
Étudier les variations de $g$ et en déduire les durées de fonctionnement $x$ et$y$ qui assurent une production maximum.

**Exercice 4** **8 points**

Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x\mathrm{e}^x - 1.$$

**1.** **a.** On admet que la limite de $g$ en $-\infty$ est $-1$. Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de $g$. Justifier toutes les affirmations qui sont notées dans ce tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | ↘ | $-\frac{1}{\text{e}}-1$ | ↗ | $+\infty$ |

**b.** On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**2.** On note $f$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \text{e}^x - \ln x.$$

**a.** Étudier la limite de $f$ en 0.

**b.** Vérifier que, pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, où $f'$ est la fonction dérivée de $f$.

**c.** Dresser le tableau de variations de $f$, en admettant que la limite de $f$ en $+\infty$ est $+\infty$.

**3.** Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal. Prendre 4 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Tracer $\mathscr{C}$, en prenant 0,6 comme valeur approchée de $\alpha$.

**4.** On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan muni du repère ci-dessus tels que : $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

**a.** Hachurer l'ensemble $\mathscr{D}$.

**b.** Vérifier que la fonction $U$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $U(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien.

**c.** En déduire une primitive de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

**d.** Calculer l'aire de $\mathscr{D}$ en unités d'aire. Puis en donner une valeur approchée en $\text{cm}^2$ à $10^{-2}$ près.