Baccalauréat STI 2008

L'intégrale de mars à novembre 2008

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

∽ Baccalauréat STI Arts appliqués – Antilles–Guyane ∾ juin 2008

EXERCICE 1 **8 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. On indiquera seulement sur la copie, pour chaque question, la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Toutes les questions sont indépendantes.
Chaque réponse exacte rapporte un point. Les réponses fausses ne sont pas pénalisées.

1. La solution de l'équation : $2\ln x = 3$ est :

   a. $2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ **b.** $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ **c.** $\ln\dfrac{3}{2}$ **d.** $2\ln 3$

2. On lance deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6. On fait la somme des numéros sortis. La probabilité d'obtenir une somme égale à 5 est :

   a. $\dfrac{5}{36}$ **b.** $\dfrac{1}{9}$ **c.** $\dfrac{1}{6}$ **d.** $\dfrac{1}{11}$

3. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 6x + 1$. L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 2 est :

   a. $y = 6x - 7$ **b.** $y = 6x + 5$ **c.** $y = 18x - 31$ **d.** $y = 18x + 31$

4. L'ensemble des solutions de l'inéquation : $\mathrm{e}^x \geqslant 2$ est :

   a. $]0\,;\,+\infty[$ **b.** $]0\,;\,\ln 2[$ **c.** $[\ln 2\,;\,+\infty[$ **d.** $]-\infty\,;\,\mathrm{e}^2[$

5. Dans une classe de 24 élèves, 12 font de l'escalade, 9 font de la natation et 5 pratiquent les deux activités. On rencontre au hasard un élève de cette classe, la probabilité qu'il pratique au moins l'une de ces deux activités est :

   a. $\dfrac{11}{24}$ **b.** $0,6$ **c.** $0,875$ **d.** $\dfrac{2}{3}$

6. Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan, on considère les points $\mathrm{F}(3\,;\,0)$ et $\mathrm{F}'(-3\,;\,0)$. On considère l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan tels que $M\mathrm{F} + M\mathrm{F}' = 10$.

   Affirmation 1 : la courbe $\mathscr{C}$ est

   a. une parabole **b.** une ellipse **c.** une hyperbole **d.** un cercle

   Affirmation 2 : le point M est un sommet de la courbe $\mathscr{C}$

   a. le point $M(4\,;\,0)$ **b.** le point $M(2\,;\,0)$ **c.** le point $M(5\,;\,0)$ **d.** le point $M(0\,;\,5)$

   Affirmation 3 : une équation cartésienne de la courbe $\mathscr{C}$ est

   a. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ **b.** $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$ **c.** $16x^2 + 25y^2 = 400$ **d.** $25x^2 - 16y^2 = 400$

EXERCICE 2 **12 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle : $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x + \ln(x+1)$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

Partie A :

1. **a.** Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Quelle interprétation graphique peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

   b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   Montrer que $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x(x+1)}$.

3. **a.** Étudier, pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, le signe de $f'(x)$.

   b. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

4. Recopier et compléter le tableau suivant (les valeurs de $f(x)$ seront arrondies à 10^{-1} près.)

x	0,1	0,3	0,5	1	2	4	6	8	10	12
$f(x)$				0,7						

5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie B

1. **a.** Résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. (On vérifiera que $f(x)$ s'écrit sous la forme $f(x) = \ln[x(x+1)]$ et on donnera la valeur exacte de la solution puis la valeur arrondie à 10^{-1} près).

   b. Interpréter graphiquement cette réponse.

   c. Montrer que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

2. **a.** Montrer que la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = x\ln x + (x+1)\ln(x+1) - 2x$ est une primitive de f sur l'intervalle.

   b. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ exprimée en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 12$.

   On donnera d'abord la valeur exacte, puis la valeur arrondie au cm^2.

Baccalauréat STI Arts appliqués – Métropole
23 juin 2008

EXERCICE 1 **8 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. On indiquera sur la copie, pour chaque question, la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Toutes les questions sont indépendantes. Chaque réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. A et B sont deux évènements. La probabilité de l'évènement A est $0,4$. La probabilité de l'évènement B est $0,6$. La probabilité de l'évènement $A \cap B$ est $0,2$.
La probabilité de l'évènement $A \cup B$ est :

a. 0,8 **b.** 1 **c.** $1,2$ **d.** 0,2

2. Une urne contient six boules : deux blanches notées B1, B2, trois jaunes notées J1, J2, J3, une verte notée V. On tire deux boules de l'urne simultanément. On pourra s'aider d'un tableau. La probabilité de l'évènement « les deux boules tirées ont la même couleur » est :

a. $\dfrac{2}{30}$ **b.** $\dfrac{14}{36}$ **c.** $\dfrac{8}{30}$ **d.** $\dfrac{22}{30}$

3. Dans un repère orthonormé, on considère la courbe (C) d'équation : $25x^2 - 36y^2 - 900 = 0$.
Cette courbe est :

a. une ellipse **b.** un cercle **c.** une hyperbole **d.** une parabole

4. Dans un repère orthonormé, l'ellipse (E) a pour équation : $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.
Un de ses foyers a pour coordonnées :

a. $\left(2\sqrt{5}\ ;\ 0\right)$ **b.** $\left(0\ ;\ 2\sqrt{5}\right)$ **c.** $\left(0\ ;\ 2\sqrt{3}\right)$ **d.** $\left(2\sqrt{3}\ ;\ 0\right)$

5. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
L'aire du domaine compris entre C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ est, en unités d'aire :

a. 6 **b.** 10 **c.** 13 **d.** -6

6. La dérivée de la fonction f définie sur $\left]\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ par : $f(x) = \ln(3x-1)$ est :

a. $f'(x) = \dfrac{1}{3x-1}$ **b.** $f'(x) = 3$ **c.** $f'(x) = \dfrac{3}{3x-1}$ **d.** $f'(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$

7. Une primitive de la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x}$ est :

a. $F(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2}$ **b.** $F(x) = x^2+x+\ln x$ **c.** $F(x) = 2 + \ln x$ **d.** $F(x) = 2$

8. La solution de l'équation : $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x = 5$ est :

a. $2\ln 5$ **b.** $\ln 10$ **c.** 10 **d.** e^{10}

EXERCICE 2 **12 points**

Pour une entreprise de production d'énergies renouvelables, un graphiste conçoit un logo dont la construction apparaît dans le problème suivant.

Partie A

Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,2]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x + 1.$$

$\mathscr{C}$ désigne sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** Calculer la dérivée de la fonction f et étudier son signe sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
   b. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
2. Recopier et compléter le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à 10^{-1} près.

x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$					

3. Construire la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f. Le point O sera placé au centre de la feuille de papier millimétré.

Partie B

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par :

$$g(x) = -x^2 + 2x$$

et $\mathscr{C}'$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer la dérivée de la fonction g et dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;\,2]$.
2. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}'$ en son point d'abscisse 2.
3. Construire T et $\mathscr{C}'$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Partie C

On appelle D le domaine compris entre $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
On admet que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,2]$ et que l'aire du domaine D, en unités d'aire, est donnée par la formule : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^2 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$.
Calculer la valeur exacte de cette aire en cm^2, puis la valeur arrondie à 10^{-1} près.

Partie D

1. Dessiner le domaine D_1, symétrique de D par rapport à O.
   Colorier le domaine réunion de D_1 et D.
2. Dessiner le domaine D_2, obtenu par rotation de centre O et d'angle 90° du domaine colorié précédemment.

∽ Baccalauréat STI Arts appliqués – Métropole ∾ septembre 2008

EXERCICE 1 **8 points**

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm, on considère l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M(x\,;\,y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

1. L'ensemble $\mathscr{C}$ est-il :
   Une parabole ? Une hyperbole ? Une ellipse ?
2. On appelle S et S$'$ les deux sommets de $\mathscr{C}$, S ayant une abscisse positive. Déterminer les coordonnées de S et S$'$.
3. On appelle F et F$'$ les deux foyers de $\mathscr{C}$, F ayant une abscisse positive. Déterminer les coordonnées de F et F$'$.
4. Parmi les relations suivantes, quelle est celle que vérifient les points M de $\mathscr{C}$?
   $M\text{F}+M\text{F}' = 6$ $|M\text{F} - M\text{F}'| = 8$ $|M\text{F} - M\text{F}'| = 10$
5. Déterminer les coordonnées des points C_1 et C_2 de $\mathscr{C}$ d'abscisse 7.
6. Sur une feuille de papier millimétré, placer le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, les sommets S et S$'$ ainsi que les foyers F et F$'$; placer aussi les points trouvés à la question précédente. Tracer enfin la courbe $\mathscr{C}$ (on pourra s'aider d'une symétrie).

EXERCICE 2 **12 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^x - 2x$$

et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. On note f' la dérivée de la fonction f
   a. Calculer $f'(x)$.
   b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) > 0$, puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de f quand x tend vers $-\infty$.
3. Soit Δ la droite d'équation $y = -2x$.
   a. Exprimer $[f(x) - (-2x)]$ en fonction de x.
   b. Déterminer la limite de $[f(x) - (-2x)]$ quand x tend vers $-\infty$.
   c. En déduire l'existence d'une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.
4. Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x\left(\dfrac{\text{e}^x}{x} - 2\right)$. En déduire la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
5. Construire le tableau de variations de la fonction f
6. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.
7. Recopier et compléter le tableau suivant (les valeurs seront arrondies au centième) :

x	-3	-2	-1	0	0,7	1	2	2,5
$f(x)$								

8. Dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, tracer la droite Δ, la tangente T puis la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f.

9. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ (on donnera la valeur exacte).

10. **a.** Hachurer la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe $\mathscr{C}$.

b. Déduire de la question 9 la valeur exacte, en cm^2, de l'aire de cette partie puis en donner une valeur arrondie au centième.

Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Antilles–Guyane ∾ juin 2008

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **4 points**

Questionnaire à choix multiples

Pour chacune des quatre questions, une seule des réponses **a, b** ou **c** est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Notation : *une bonne réponse rapporte* 1 *point. Une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.*

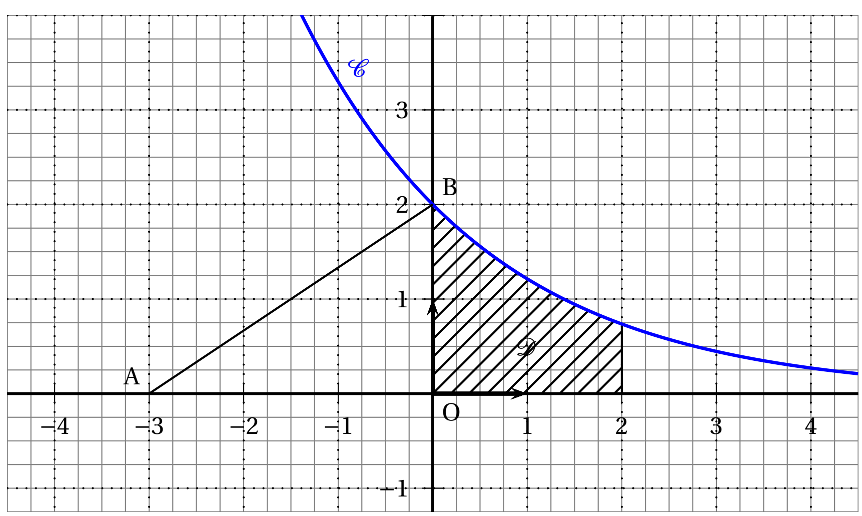
On définit la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On a tracé, ci-dessous, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On note A et B les points de coordonnées respectives $(-3\,;\,0)$ et $(0\,;\,2)$.
On note $\mathscr{D}$ le domaine (hachuré ci-dessous) délimité par :

- la courbe $\mathscr{C}$,
- l'axe des abscisses,
- l'axe des ordonnées,
- la droite d'équation : $x = 2$.



Question 1 :
La fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) :
Réponse a. : (E) : $2y' + y = 0$
Réponse b. : (E) : $2y' - y = 0$
Réponse c. : (E) : $y' - y = 0$.
(y désigne une fonction inconnue définie sur l' ensemble des nombres réels de variable x ; y' désigne la fonction dérivée de la fonction y.)

Question 2 :
La courbe $\mathscr{C}$ a pour asymptote la droite d'équation :
Réponse a. : $y = -2x$;
Réponse b. : $x = 0$;
Réponse c. : $y = 0$.

Question 3 :
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation :
Réponse a. : $y = -2x + 2$;
Réponse b. : $y = -x + 2$;
Réponse c. : $y = x + 2$.

Question 4 :
On note S le solide de révolution engendré par la rotation du domaine $\mathscr{D}$ autour de l'axe des abscisses.
La valeur V du volume du solide S est donnée par :

$$V = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x \quad \text{(en unités de volume).}$$

La valeur V du volume du solide S, en cm^3 est égale à :
Réponse a. : $4\pi\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)$;
Réponse b. : $16\pi\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)$;
Réponse c. : $32\pi\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes suivants

$$Z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i},\ \ Z_2 = \frac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} \text{ et } Z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe Z_1.
2. **a.** Écrire le nombre complexe Z_2 sous forme algébrique et montrer que : $Z_2 = \overline{Z_1}$.
   b. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe Z_2.
3. Écrire le nombre complexe Z_3 sous forme algébrique.
4. On note Z le nombre complexe défini par : $Z = Z_2 Z_3$.
   a. Calculer le module et un argument du nombre complexe Z.
   b. Écrire le nombre complexe Z sous forme algébrique.
   c. En déduire les valeurs exactes des nombres réels $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

PROBLÈME **11 points**

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = a\ln x + bx + \frac{c}{x}$$

où $a,\ b$ et c sont trois nombres réels à déterminer. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
On a représenté la fonction f sur la feuille annexe dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de cette fonction f.
On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1. La tangente T passe par l'origine O du repère.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

PARTIE A
Recherche de l'expression de $f(x)$

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1),\ f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Déterminer $f'(x)$, en fonction de la variable x et des nombres réels $a,\ b$ et c.
3. Exprimer $f(1),\ f'(1)$ et $f'(2)$ en fonction des nombres réels $a,\ b$ et c.
4. En utilisant les réponses aux questions 1. et 3., montrer que les nombres réels $a,\ b$ et c sont solutions du système S suivant :

$$S: \quad \left\{\begin{array}{rcl} b+c & = & 1\\ a+b-c & = & 1\\ 2a+4b-c & = & 0 \end{array}\right.$$

5. Résoudre le système S. En déduire une expression de $f(x)$.

PARTIE B
Étude de la fonction f

Dans la suite du problème la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ \infty[$ par :

$$f(x) = 8\ln x - 3x + \frac{4}{x}.$$

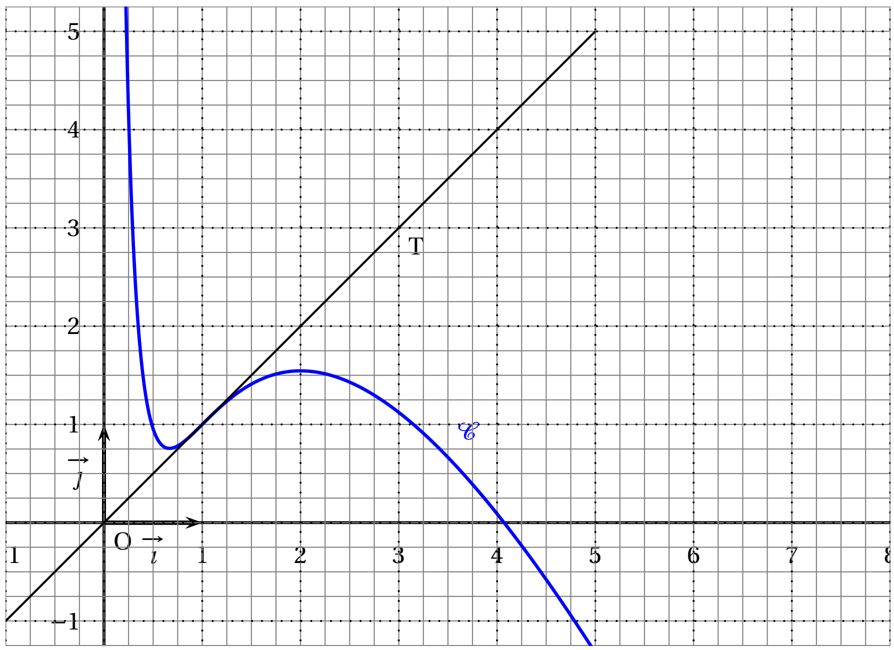
1. Déterminer par calculs la limite de f en $+\infty$ (on peut factoriser $f(x)$ par x).
2. On rappelle que : $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.
   En écrivant $f(x)$ sous la forme d'une seule fraction, déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Déterminer $f'(x)$ et vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ \infty[$:

$$f'(x) = \frac{(3x-2)(2-x)}{x^2}.$$

   Dresser le tableau de variations complet de la fonction f (justifier avec soin le signe de $f'(x)$.)
   Montrer que, sur l'intervalle $[4\ ;\ 5]$ l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution. notée α.
   Justifier l'encadrement de la solution α d'amplitude 10^{-1} suivant :

$$4,07 < \alpha < 4,08.$$

Feuille annexe



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole ∽ 17 juin 2008

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

On considère les nombres complexes

$$z_A = 4e^{i\frac{\pi}{6}},\ z_B = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_C = -2+2i.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal.
Les parties I et II sont indépendantes

Partie I : Q. C. M.
Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B, C ou D est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
On ne demande aucune justification
NOTATION : *chaque réponse juste rapporte* 0,5 *point; une réponse fausse enlève* 0,25 *point.*
Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Si le total des points est négatif, il est ramené à 0.

1. Le nombre complexe $Z_1 = z_A z_B$ est :

   Réponse A : un nombre réel positif — **Réponse B :** un nombre réel négatif
   Réponse C : un nombre imaginaire pur — **Réponse D :** l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

2. Le nombre complexe $Z_2 = z_A^6$ est :

   Réponse A : un nombre réel positif — **Réponse B :** un nombre réel négatif
   Réponse C : un nombre imaginaire pur — **Réponse D :** l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

3. Le nombre complexe conjugué de z_A est :

   Réponse A : $-4e^{i\frac{\pi}{6}}$ — **Réponse B :** $4e^{i\frac{7\pi}{6}}$
   Réponse C : $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ — **Réponse D :** $\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

4. Le nombre complexe z_C peut se mettre sous la forme :

   Réponse A : $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ — **Réponse B :** $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
   Réponse C : $2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ — **Réponse D :** $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Partie II
On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

1. Soit M un point du plan d'affixe z.
   a. Interpréter géométriquement $|z - z_A|$.
   b. Quel est l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie l'égalité : $|z - z_A| = |z - z_B|$.

   c. Vérifier que le point C appartient à l'ensemble $\mathscr{D}$.

2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
3. Déduire des questions 1. et 2. la nature du triangle ABC.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ par

$$f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + 1.$$

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

   b. En utilisant la relation $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$, $f'(x) = -\sin(x)[1 + 2\cos(x)]$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$, l'équation produit : $\sin(x)[1+2\cos(x)] = 0$.
3. **a.** En s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction dérivée f' donnée en annexe, dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

   b. Déduire des questions 2. et 3. a. le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

   Préciser les ordonnées des points dont l'abscisse x vérifie $f'(x) = 0$.
4. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$ dans le repère de l'annexe (où f' est déjà représentée).

PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction f, définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \text{e}^{2x} - 5\text{e}^{x} + 4.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).

Partie A : limites aux bornes de l'ensemble de définition

1. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 4$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = (\text{e}^x - 1)(\text{e}^x - 4)$.

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Partie B : intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses

En utilisant la forme factorisée de $f(x)$ donnée dans la partie A. 2. a., déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.

Partie C : étude des variations de la fonction f

1. **a.** Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
2. Montrer en **détaillant vos calculs** que $f\left(\ln\frac{5}{2}\right) = -\frac{9}{4}$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations complet de la fonction f.
4. À l'aide du tableau de variations et du résultat acquis à la partie B, donner le tableau de signes de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Tracer la droite $(\mathscr{D})$ puis la courbe $(\mathscr{C})$, pour x appartenant à l'intervalle $[-4\,;\,2]$, dans le repère défini en début de problème.

Partie D : calcul d'une aire

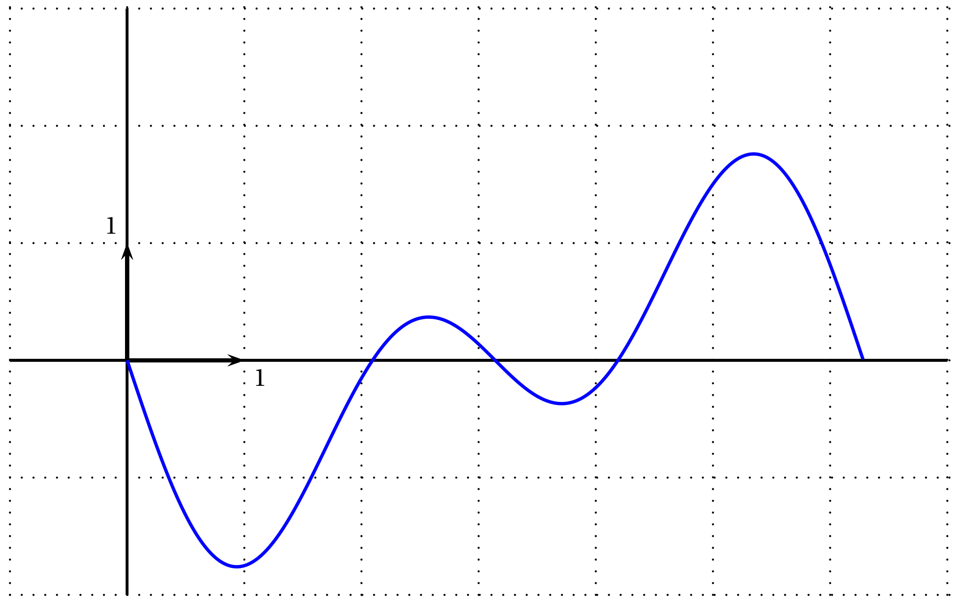
1. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Déterminer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 4$.

   b. Donner une valeur approchée au mm^2 près de cette aire.

ANNEXE à l'exercice 2

(à compléter et à rendre avec la copie)

La courbe préconstruite ci-dessous est la représentation graphique de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie juin 2008 ∾
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **4 points**

Un jeu est organisé de la manière suivante : le joueur mise 3 €, puis fait tourner une roue partagée en 6 secteurs circulaires. Lorsque la roue s'immobilise, un repère situé devant la roue indique le secteur circulaire désigné. On suppose que la roue est lancée suffisamment vite pour que la position du repère corresponde à un tirage aléatoire; la probabilité que le repère indique un secteur donné est donc proportionnelle à l'angle au centre de ce secteur.

Sur chacun des secteurs circulaires est affichée une somme que le joueur reçoit :
- le secteur 1 mesure 150° et indique la somme 0 € : le joueur ne reçoit rien;
- le secteur 2 mesure 100° et affiche 3 €;
- le secteur 3 mesure 50° et affiche 4 €;
- le secteur 4 mesure 35° et affiche 6 €;
- le secteur 5 mesure 15° et affiche 10 €;
- le secteur 6, qui et le dernier, mesure 10° et affiche 15 €.

On appelle « gain » du joueur la somme, positive ou négative, que le joueur obtient après le lancer de la roue : cette somme prend en compte la mise de 3 €. Ainsi, par exemple le gain correspondant au secteur 5 est égal à 7 €.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain du joueur. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un gain d'au moins 3 €?
3. **a.** Calculer l'espérance mathématique de la variable X.

   b. Le jeu est-il équitable?
4. Dans cette question, les cinq premiers secteurs sont inchangés, mais le sixième affiche une somme de a € où a est un nombre réel positif. On note encore X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain du joueur.

   a. Calculer l'espérance mathématique de la variable X en fonction du réel a.

   b. Déterminer la valeur de a pour que cette espérance soit nulle.

EXERCICE 2 **4 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
L'unité graphique est 1 cm; on construira une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.

1. On note A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}},\ b = 5 - 3\text{i} \text{ et } c = 11 + 4\text{i}.$$

   a. Écrire le nombre complexe a sous forme algébrique.

   b. Placer les points A, B et C sur la figure.

2. Démonter que le triangle ABC est isocèle.
3. Soit z un nombre complexe quelconque et M le point du plan d'affixe z.
   a. Donner une interprétation géométrique des nombres $|z-a|$ et $|z-b|$.
   b. Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que l'on ait $|z-a| = |z-b|$.
   Tracer cet ensemble Δ sur la figure,
   c. On note D le point d'affixe $d = 6+\text{i}$. Les points C et D appartiennent-ils à l'ensemble Δ ?
4. Démontrer que le triangle ABD est rectangle.
5. On considère le point H tel que ADBH soit un carré. Déterminer l'affixe h de ce point H.

PROBLÈME **12 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x} - \ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; la courbe $\mathscr{C}$ est donnée en annexe.

Partie A - Étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On rappelle le résultat suivant : $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.
   a. En remarquant que $f(x) = \dfrac{2x-1-x\ln x}{x}$ déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
   b. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ et en donner une équation.
3. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ on a : $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$.
   b. Déterminer le tableau des variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. Indiquer la valeur de l'extremum.
4. a. Démontrer que, sur l'intervalle $[0,1 ; 10]$, la fonction f s'annule pour deux valeurs exactement. On note x_1 et x_2 ces deux valeurs, avec $x_1 < x_2$.
   b. Placer x_1 et x_2 sur l'axe $\left(\text{O} ; \vec{\imath}\right)$ représenté sur la feuille annexe, et donner les valeurs approchées arrondies au centième de ces deux nombres.

Partie B - Étude d'une tangente

On désigne par $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2.

1. Démontrer qu'une équation de la droite $\mathscr{T}$ est : $y = -\dfrac{1}{4}x + 2 - \ln 2$.
2. On considère la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$h(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{4}x + 2 - \ln 2\right).$$

   a. Calculer $h'(x)$ et vérifier que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a : $h'(x) = \dfrac{(x-2)^2}{4x^2}$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

c. Calculer $h(2)$ et en déduire le signe de la fonction h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente $\mathscr{T}$.
4. Tracer la droite $\mathscr{T}$ sur la feuille annexe en tenant compte du résultat obtenu dans la question précédente.

Partie C Calcul d'une aire

1. On note G la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$G(x) = x - x\ln x.$$

Calculer $G'(x)$.

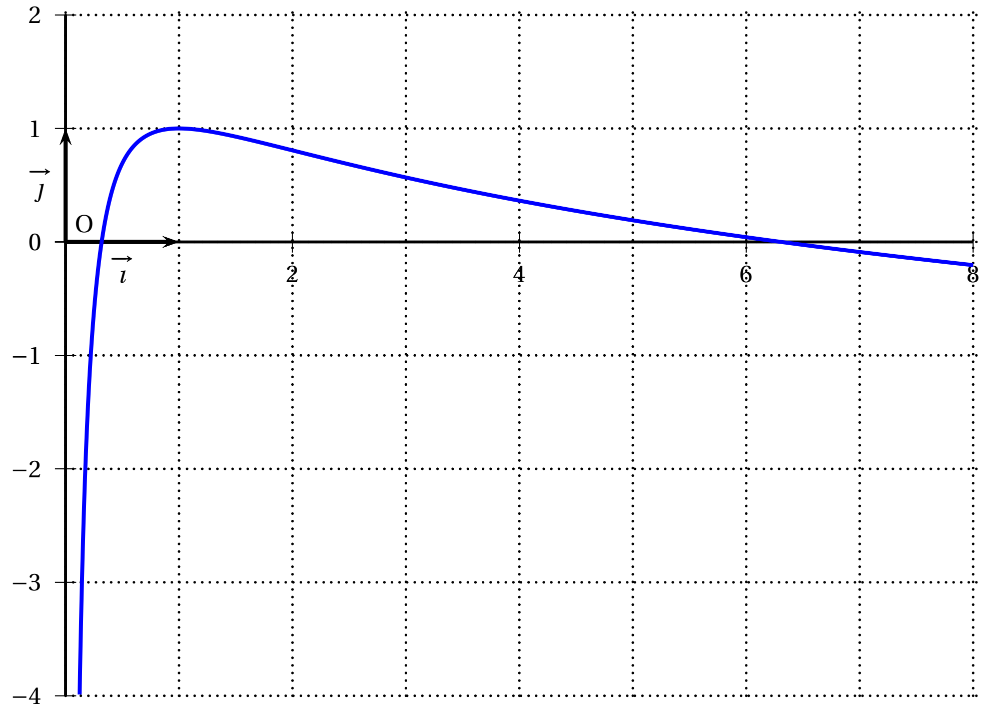
2. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$
3. On considère la partie du plan comprise entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = 6$ d'une part, entre l'axe horizontal et la courbe $\mathscr{C}$ d'autre part. On note $\mathscr{A}$ l'aire de cette partie de plan, exprimée en unités d'aire.

   a. Hachurer cette partie de plan sur la feuille annexe,

   b. Donner la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, puis sa valeur arrondie au centième.

Annexe : tracé de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

Cette feuille est à compléter au fil des questions et à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole ∽ septembre 2008

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **6 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$Z^2 + 2Z + 4 = 0.$$

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
La figure sera complétée au fur et à mesure que l'énoncé le demandera.
Soit les points A, B et C d'affixes respectives :

$$Z_\text{A} = -1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad Z_\text{B} = \overline{Z_\text{A}} \text{ et } Z_\text{C} = 2.$$

On rappelle que $\overline{Z_\text{A}}$ représente le nombre complexe conjugué de Z_A.

2. **a.** Calculer le module et un argument du nombre complexe Z_A.
   b. En déduire le module et un argument du nombre complexe Z_B.
   c. Placer les points A, B et C sur la figure.
   d. Démontrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral.
3. Soit D le point d'affixe Z_D définie par : $Z_\text{D} = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}} Z_\text{B}$.
   a. Déterminer l'écriture algébrique de Z_D.
   b. Placer le point D sur la figure.
   c. Quelle est la nature du quadrilatère BDAO ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans une usine, deux chaînes de montage A et B fabriquent les mêmes types d'objets. La chaîne A en fabrique trois fois plus que la chaîne B. 7 % de la production de la chaîne A est défectueuse contre 2 % pour la chaîne B.

Partie I

1. On considère une production de 1 200 objets.
   Reproduire et compléter le tableau suivant :

	chaîne A	chaîne B	total
nombre d'objets défectueux	63		
nombre d'objets non défectueux			
total			1 200

2. On prélève au hasard un objet dans la production de l'usine et on admet que les tirages sont équiprobables.

   a. Déterminer la probabilité que l'objet prélevé soit à la fois défectueux et produit par la chaîne A.

   b. Déterminer la probabilité que l'objet prélevé ne soit pas défectueux.

Partie II

Un objet défectueux peut présenter 1, 2 ou 3 défauts.
Soit X la variable aléatoire qui, à un objet prélevé au hasard dans la production, associe le nombre de défauts.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0,942 5	0,031 8	$\cdots$	0,006

1. Reproduire sur la copie puis compléter le tableau précédent.
2. Le prix de vente d'un objet dépend du nombre de défauts qu'il présente :

nombre de défauts	0	1	2	3
prix de vente en €	56	15	10	1

   Soit Y la variable aléatoire qui, à un objet prélevé au hasard dans la production, fait correspondre son prix de vente.

   a. Déterminer la loi de probabilité de Y.

   b. Calculer l'espérance mathématique de Y. Interpréter le résultat obtenu.

PROBLÈME **9 points**

Étude de l'énergie fournie par le rayonnement solaire

Le but de ce problème est d'étudier le rayonnement solaire en un point de la surface de la Terre dont la latitude est 45°N et l'altitude 900 m.
Dans les questions **1.**, **2.** et **3.**, on étudie le rayonnement solaire un 21 mars ensoleillé sur un plan perpendiculaire au rayonnement solaire d'une surface de 1 m^2.

1. On suppose d'abord que le rayonnement solaire exprimé en W/m^2 est donné en fonction de l'inclinaison θ du soleil (θ étant exprimé en degrés) par

$$p(\theta) = 1\,230\mathrm{e}^{\frac{-1}{3{,}8\sin(\theta+1{,}6)}}.$$

   On attire l'attention du candidat quant à l'utilisation de la calculatrice pour ces calculs : dans la formule ci-dessus le sinus porte sur un angle exprimé en degrés.

   Compléter le duplicata du tableau 1 ci-dessous, fourni en annexe (à joindre à la copie).

heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h	13 h	14 h	15 h	16 h	17 h	18 h
inclinaison θ du soleil (en °)	0	10,5	20,7	30	37,7	43	45	43	37,7	30	20,7	10,5	0
rayonnement solaire $p(\theta)$ (en W/m^2)		350		744			856						

Tableau 1

2. On veut maintenant modéliser l'évolution du rayonnement solaire en fonction de l'heure.

On définit la variable t comme étant le temps écoulé depuis le lever du soleil, qui se produit à 6 heures. Pour des raisons de symétrie entre le matin et l'après-midi, on se limitera à faire varier t dans l'intervalle $[0\,;6]$, ce qui correspond à des heures solaires variant entre 6 h et 12 h.

On admet que le rayonnement solaire (en W/m^2) peut être exprimé en fonction de t par :

$$f(t) = 856\left(1 - \mathrm{e}^{-0,6t}\right).$$

a. Compléter le duplicata du tableau 2 ci-dessous, fourni en annexe (à joindre à la copie).

heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h
temps t (en heures)	0	1	2	3	4	5	6
rayonnement solaire $f(t)$ (en W/m^2)				715			833

Tableau 2

b. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.

Calculer $f'(t)$ et étudier son signe sur l'intervalle $[0\,;6]$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

d. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal (2 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 100 unités en ordonnée).

e. Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Tracer $\mathscr{T}$ dans le même repère que $\mathscr{C}$.

f. Les dernières lignes des tableaux 1 et 2 vous paraissent-elles cohérentes ?

3. La quantité d'énergie solaire E, exprimée en Wh, reçue au cours de la journée, est donnée par :

$$\mathrm{E} = 2\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = 1\,712\int_0^6 \left(1 - \mathrm{e}^{-0,6t}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer la valeur exacte de E puis fournir la valeur arrondie à l'unité.

4. On s'intéresse maintenant à l'énergie solaire reçue sur une année.

Un logiciel de météorologie fournit une énergie solaire annuelle égale à 1 206 kWh, toujours pour une surface de 1 m^2.

a. Vérifier que cette valeur correspond environ à 161 journées telles que celle étudiée aux questions **1., 2.** et **3.**.

b. On suppose qu'un dispositif de production d'énergie électrique reçoit l'énergie solaire sur une surface de 1 km^2 et qu'il convertit 20 % de cette énergie en électricité.

Combien d'habitants auraient leur consommation électrique domestique fournie par ce dispositif, sachant qu'un habitant consomme en moyenne 700 kWh/an d'énergie électrique domestique (hors chauffage) ?

ANNEXE RELATIVE AU PROBLÈME

(à rendre avec la copie)

heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h	13 h	14 h	15 h	16 h	17 h	18 h
inclinaison θ du soleil (en °)	0	10,5	20,7	30	37,7	43	45	43	37,7	30	20,7	10,5	0
rayonnement solaire $p(\theta)$ (en W/m^2)		350		744			856						

Tableau 1

heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h
temps t (en heures)	0	1	2	3	4	5	6
rayonnement solaire $f(t)$ (en W/m^2)				715			833

Tableau 2

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Nouvelle-Calédonie novembre 2008
Génie Mécanique - Génie Énergétique - Génie Civil

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet. Des feuilles de papier millimétré seront mises à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
L'unité graphique est 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = 4z^4 - 7z^3 + 11z^2 + 10z - 12.$$

1. Résolution de l'équation $P(z) = 0$.

a. Déterminer les deux nombres réels α et β tels que pour tout nombre complexe z :

$$P(z) = \left(z^2 - 2z + 4\right)\left(4z^2 + \alpha z + \beta\right).$$

b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$a = -1, \qquad b = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \qquad c = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}, \qquad d = \frac{3}{4}.$$

a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes b et c.

b. Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

c. Démontrer que les points A, B et C sont situés sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre D dont on précisera le rayon r. Construire ce cercle.

d. Déterminer les affixes e et f des deux points E et F situés sur $\mathscr{C}$ et tels que les triangles ABE et ABF soient rectangles, respectivement en B et en A. Placer les points E et F sur le cercle $\mathscr{C}$.

EXERCICE 2 **4 points**

À l'instant $t = 0$, une bille est lâchée à la surface d'une colonne de liquide.
On note $v(t)$ la vitesse instantanée de cette bille, exprimée en $m.s^{-1}$, à un instant t donné.
On admet que la fonction v est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' + 140y = 5,88.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $(\mathrm{H}) : \quad z' + 140z = 0$, où z désigne une fonction inconnue de la variable t, dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. On pose, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
$y(t) = z(t) + 0,042$, où la fonction z est une solution de l'équation différentielle (H).

a. Démontrer que la fonction y est une solution de l'équation différentielle (E).

b. Parmi les fonctions y précédentes, démontrer que celle, notée v, qui s'annule pour $t = 0$, est définie par : $v(t) = 0,042\left(1 - \mathrm{e}^{-140t}\right)$.

3. Deux utilisations de l'expression trouvée de $v(t)$.

a. Démontrer, en étudiant la limite de $v(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, que la vitesse de la bille admet une valeur limite notée ℓ dont on donnera la valeur numérique.

b. À quel instant t la bille atteint-elle 95 % de sa vitesse limite ?

PROBLÈME **11 points**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. (L'unité graphique est 4 cm.)
Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x + x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan $\mathscr{P}$.

I - Étude d'une fonction auxiliaire

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^x(x-2) - 1.$$

1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. Étude des variations de g

a. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g et étudier son signe sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

3. Résolution de l'équation $g(x) = 0$

a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution, notée α, appartenant à l'intervalle $[1~;3]$.

b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

II - Étude de la fonction *f*

1. Étude de la limite en $+\infty$.

a. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$,

$$f(x) = \frac{1 + \mathrm{e}^{-x}}{1 + x\mathrm{e}^{-x}}.$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.

2. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

3. Étude des variations de f

a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(\mathrm{e}^x + x)^2}$ où g est la fonction définie en 1.

b. Déduire de la question I. 4., le sens de variations de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

4. Construire la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

III - Calcul d'aire

On note $\mathscr{B}$ l'aire, exprimée en cm^2 du domaine limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1. Hachurer sur le graphique le domaine $\mathscr{B}$.
2. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3. En déduire la valeur exacte de $\mathscr{B}$, puis une valeur approchée arrondie au mm^2.

Baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2008
Génie électronique, électrotechnique et optique

Exercice 1 **5 points**

Cet exercice est un vrai/faux : il s'agit donc de préciser si chacune des affirmations proposées est vraie ou fausse.

À chaque bonne réponse est attribuée 0,5 point. Toute réponse incorrecte enlève 0,25 point.
L'absence de réponse n'enlève aucun point. En cas de total négatif, la note attribuée à l'exercice sera 0.

Pour chaque affirmation, le candidat donnera la réponse sur sa copie en écrivant en toutes lettres « vrai » ou « faux ». On ne demande aucune justification.
Les questions 1., 2., 3. sont indépendantes.

1. On considère le polynôme P défini pour tout réel x par
$P(x) = (x-1)(x-3)(2x+3)$.

a. L'équation $P(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions qui sont 1, 3 et $-\dfrac{3}{2}$.
b. Pour tout réel x, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x$.
c. L'équation $(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 3)(2\mathrm{e}^x + 3) = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.

2. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

a. Les nombres z_1 et z_2 sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$.
b. Un argument de z_2 est $-\dfrac{3\pi}{4}$.
c. Le module de z_1 est $\sqrt{2}$.

3. Soit l'équation différentielle (E) : $4y'' + 49y = 0$ dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et y'' sa dérivée seconde.

a. La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = A\cos\dfrac{7x}{2} + B\sin\dfrac{7x}{2}$, où A et B sont deux constantes réelles, est solution de (E).
b. La fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = 3\cos\left(\dfrac{7x}{2} - \dfrac{3\pi}{4}\right)$ est solution de (E).
c. La fonction k définie pour tout réel x par $k(x) = -\sqrt{2}\cos\dfrac{7x}{2} - \sqrt{2}\sin\dfrac{7x}{2}$ est la solution de (E) qui vérifie $k(0) = \sqrt{2}$ et $k'(0) = 0$.

Exercice 2 **5 points**

Une boîte contient 140 tiges métalliques de forme cylindrique, de dimensions variées, issues de la production d'un atelier.

Le tableau suivant donne leur répartition suivant leur longueur ℓ et leur diamètre d, exprimée en millimètres.

ℓ \ d	15,8	16	16,1	16,3
84	5	9	6	0
85	15	19	21	4
86	12	6	12	7
87	6	7	6	5

Par exemple il y a 12 tiges métalliques de longueur 86 mm et de diamètre 16,1 mm.
On tire au hasard une tige de la boîte, les tirages étant équiprobables.
Dans tout l'exercice, les probabilités seront données sous forme de fraction.

1. Calculer les probabilités respectives $p_1,\ p_2$ et p_3 des évènements suivants :

a. « obtenir une tige de longueur 86 mm et de diamètre 16 mm » ;

b. « obtenir une tige de longueur 85 mm » ;

c. « obtenir une tige de longueur inférieure ou égale à 86 mm ».

2. Selon les normes imposées par la production, une tige métallique est conforme lorsque sa longueur ℓ et son diamètre d exprimés en millimètres, vérifient :

$$84,5 \leqslant \ell \leqslant 85,5 \quad \text{et} \quad 15,9 \leqslant d \leqslant 16,2$$

Calculer la probabilité de l'évènement : « obtenir une tige conforme ».

3. Soit X la variable aléatoire qui à chacun des tirages possibles, associe la longueur en millimètres de la tige obtenue.

a. Quelle est la probabilité de l'évènement « $X = 84$ ».

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer la probabilité de l' évènement « $X \geqslant 85$ ».

d. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. En donner un arrondi au centième.

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ de la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^x, \text{ où } a,\ b \text{ et } c \text{ désignent trois nombres réels tels que :}$$

- le point A de coordonnées $(0~;~-1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$;
- la courbe $\mathscr{C}$ admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;
- $f(1) = 2\mathrm{e}$.

Partie A

1. Démontrer que $c = -1$.

2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. En remplaçant c par sa valeur, donner pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et de b.

b. Calculer a et b.

Partie B

On admet que pour tout réel x, $f(x) = \left(2x^2 + x - 1\right)\mathrm{e}^x$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que, pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$).

Interpréter graphiquement ce résultat

2. **a.** Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = x(2x+5)\mathrm{e}^x$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du réel x.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion juin 2008
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **6 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z\sqrt{3} + 16 = 0.$$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 2\sqrt{3} + 2\text{i} \quad z_{\text{B}} = 2\sqrt{3} - 2\text{i} \text{ et } z_{\text{C}} = 4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}.$$

   a. Donner la forme algébrique du nombre complexe z_{C}.
   b. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{A}, z_{B} et z_{C}.
   c. En déduire que les points A, B et C appartiennent à un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   d. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   e. Démontrer que le triangle ABC est un triangle isocèle.

3. On considère la rotation r de centre O qui transforme A en B.
   a. Vérifier que $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}$. En déduire l'angle θ de la rotation r.
   b. Préciser alors la nature du triangle OAB.
   c. Établir que le point C est l'image du point B par la rotation r.
   d. Préciser la nature du quadrilatère OABC.

EXERCICE 2 **4 points**

Un hôtel de vacances propose deux types de bungalow (bungalow avec kitchenette ou bungalow sans kitchenette) à louer à la semaine.
Pour les clients qui le souhaitent, l'hôtel propose deux formules de restauration au choix :

- Formule A : petit déjeuner seul,
- Formule B : petit déjeuner et diner.

Pour chaque semaine de location, chaque client décide s'il prend une formule de restauration et si oui, choisit entre les formules A et B.
Le gestionnaire de l'hôtel a constaté que sur 100 clients

- 44 clients ne prennent aucune formule de restauration.
- 60 clients optent pour un bungalow avec kitchenette et parmi ceux-ci, 10 % choisissent la formule B et 20 % la formule A.
- 35 % des clients ayant choisi un bungalow sans kitchenette prennent la formule A.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de clients ayant choisi :	Bungalow avec kitchenette	Bungalow sans kitchenette	Total
Formule A			
Formule B	6		
Aucune formule de restauration		2	
Total			100

2. On interroge un client au hasard, au sujet de ses choix,
   a. Déterminer la probabilité de l'évènement E : « Le client a choisi la formule B ».
   b. Déterminer la probabilité de l'évènement F : « Le client a loué un bungalow sans kitchenette ».
   c. Déterminer la probabilité de l'évènement G : « Le client a loué un bungalow sans kitchenette ou a choisi la formule B ».
   d. Déterminer la probabilité de l'évènement H : « Le client a choisi une formule de restauration ».
3. La location d'un bungalow sans kitchenette à la semaine coûte 415? et celle d'un bungalow avec kitchenette 520 €. La formule A coûte 49 € à la semaine. La formule B coûte 154 € à la semaine.
   On appelle X la variable aléatoire qui à chacun des 6 choix possibles, associe le coût correspondant pour une semaine.
   a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
   b. Démontrer que la probabilité de l'évènement « X prend la valeur 520 » est égale à 0,42.
   c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   d. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
   e. Pour la prochaine saison, le gérant de l'hôtel pense qu'il louera dans les mêmes conditions 16 bungalows pendant 20 semaines. Quelle recette peut-il alors espérer ?

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
La représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ainsi qu'une droite $\mathcal{T}$ sont tracées dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan sur la feuille figurant en annexe.

- La courbe $\mathcal{C}$ passe par les points de coordonnées $(-1\,;\,2)$ et $(0\,;\,4)$.
- La droite parallèle à l'axe des abscisses, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Partie A : étude graphique et détermination d'une fonction

1. Donner, les valeurs des nombres réels $f(0)$ et $f(-1)$.
2. Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points A_0 et A_1 d'abscisses respectives x_0 et x_1 avec $x_0 < x_1$, préciser à l'aide du graphique le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.
3. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a. Déterminer graphiquement $f'(0)$.
   b. Déterminer par lecture graphique le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,2]$.

4. On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x, on ait :

$$f(x) = (x+a)\mathrm{e}^{-x} + bx^2 + 3.$$

En utilisant les résultats trouvés à la question 1, déterminer les nombres réels a et b.

Partie B : étude de la fonction f sans utilisation du graphique

On admet maintenant que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x} - x^2 + 3.$$

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
2. En remarquant que $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} - x^2 + 3$, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$
3. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = -x\left(\mathrm{e}^{-x} + 2\right)$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du réel x et dresser le tableau de variation de f.
4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; 2]$.
   Cette solution est l'abscisse x_1 du point A_1 définie dans la partie A question 2.

   b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre réel x_1.

Partie C : calcul d'une aire

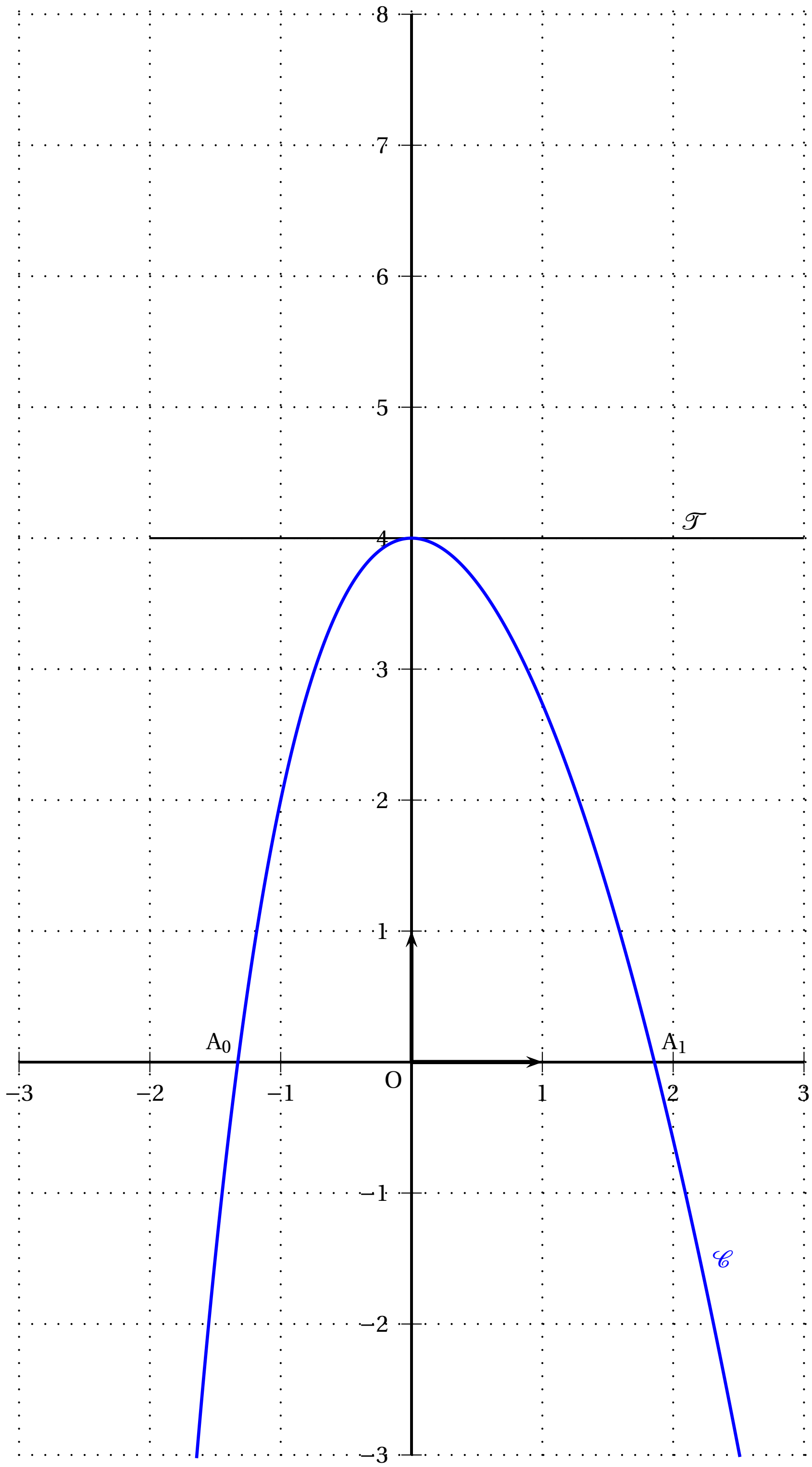
1. **a.** On considère les fonctions g et G définies sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad G(x) = (-x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

   Démontrer que la fonction G est une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

   b. En déduire une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. On désigne par $\mathscr{P}$ la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.
   On appelle $\mathscr{A}$ la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire de la partie $\mathscr{P}$. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.

Feuille annexe



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Métropole 23 juin 2008
génie électrotechnique, optique

Le candidat est invité à faire figurer toute trace de recherche, même incomplète on non fructueuse, qu'il aura développée.

Deux feuilles de papier millimétré seront distribuées en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 6z\sqrt{3} + 36 = 0.$$

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = -3\sqrt{3} + 3i$ $\quad z_B = -3\sqrt{3} - 3i$ $\quad$ et $z_C = -6\sqrt{3}$.
   - **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A et z_B.
   - **b.** Écrire le nombre complexe z_A sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
   - **c.** Placer les points A, B, C dans le plan muni du repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
3. **a.** Déterminer la nature du triangle ABC.
   - **b.** En déduire que le quadrilatère OACB est un losange.
4. On appelle K le point du plan complexe d'ordonnée négative tel que le triangle OAK soit rectangle et isocèle en O.
On note z_K l'affixe du point K.
   - **a.** Construire le point K sur la figure.
   - **b.** Par quelle rotation de centre O, le point K est-il l'image du point A ?
   - **c.** Écrire alors z_K, sous la forme $re^{i\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un réel compris entre $-\pi$ et π) puis sous forme algébrique.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y'' + 25y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont on note f' la fonction dérivée, vérifiant les trois conditions suivantes :
   - f est solution de l'équation différentielle (E) ;

- la courbe représentative de f dans un repère du plan passe par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{6}~;~-2\right)$;
- $f'(0) = -5$.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x$.

3. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$.
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle sur $\left[0~;~\frac{\pi}{6}\right]$.

PROBLÈME **11 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

On s'intéresse dans ce problème à la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \frac{3}{\text{e}^{3x} + 1}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude de la fonction f

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   b. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
   c. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout nombre réel x; qu'en déduit-on sur la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote ?
2. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3$.
   a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
   b. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite $\mathcal{D}$ comme asymptote.
   c. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = 3 - \frac{3\text{e}^{3x}}{\text{e}^{3x} + 1}$.
   d. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{-9\text{e}^{3x}}{\left(\text{e}^{3x} + 1\right)^2}$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations.
4. Déterminer une équation de la tangente Δ au point d'abscisse 0.
5. Dans le plan muni du repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ tracer les droites $\mathcal{D}$ et Δ ainsi que la courbe $\mathcal{C}$.

Partie B : Calcul de l'aire d'une partie du plan

1. **a.** On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{3\text{e}^{3x}}{\text{e}^{3x} + 1}.$$

   Déterminer une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$. (On pourra remarquer que la fonction g est de la forme $\frac{u'}{u}$ où u est une fonction que l'on précisera).

b. En utilisant la question 2. c. de la partie A, déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit a un réel strictement positif.

On note $\mathscr{A}(a)$ la mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

a. Exprimer $\mathscr{A}(a)$ à l'aide d'une intégrale.

b. Établir que $\mathscr{A}(a) = 3a - \ln\left(\mathrm{e}^{3a} + 1\right) + \ln 2$.

c. En remarquant que $3a = \ln\left(\mathrm{e}^{3a}\right)$, écrire $\mathscr{A}(a)$ sous la forme du logarithme népérien d'un quotient ; déterminer alors la limite de $\mathscr{A}(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, figurant sur la copie sera prise en compte dans l'évaluation.

Baccalauréat STI Génie électronique Polynésie juin 2008

EXERCICE 1 **6 points**

Le plan complexe est muni du repère orthonormal $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z

$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$

2. Soient A et C deux points du plan complexe, d'affixes respectives

$$z_A = -1 + i \quad \text{et} \quad z_C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)i.$$

   a. Déterminer le module de z_A et le module de z_C.

   b. Donner un argument de z_A.

3. **a.** On pose $Z = \dfrac{z_C}{z_A}$. Démontrer que $Z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

   b. Démontrer que $Z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

   c. En déduire que le point C est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ (en radian).

4. Placer le point A puis construire le point C en utilisant le résultat de la question précédente. Décrire la construction.
   Toute rédaction, même partielle, sera prise en compte dans l'évaluation.

5. Soit B l'image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.
   Construire le point B et démontrer que OCAB est un losange.

EXERCICE 2 **4 points**

Un professeur d'une classe de terminale S. T. I. donne à ses élèves trois questions dans une interrogation écrite et propose deux réponses par question : l'une juste et l'autre fausse.

On désigne par J une réponse juste et par F une réponse fausse.
On suppose que les élèves répondent à chaque question en indiquant soit la réponse juste, soit la réponse fausse. À chaque élève, on associe le résultat de son interrogation, sous la forme d'un triplet constitué des réponses données aux trois questions. Par exemple, si un élève a répondu juste à la première, faux à la deuxième et à la troisième, on lui associera le résultat (J, F, F).

I Déterminer à l'aide d'un arbre l'ensemble des résultats possibles. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

II On considère un élève qui répond au hasard à chaque question et de façon indépendante pour chacune d'elles. Le professeur fait l'hypothèse d'équiprobabilité des résultats.

1. Démontrer que la probabilité de l'évènement A « le résultat contient exactement une réponse juste » est égale à $\dfrac{3}{8}$.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement B « le résultat contient au moins une réponse juste. »

3. Dans cette question, le professeur note les copies de la manière suivante : il donne 1 point pour une réponse juste et 0 point pour une réponse fausse.

   On appelle X la variable aléatoire qui à chaque résultat associe la note obtenue par l'élève.

   a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

   b. Donner la loi de probabilité de X.

   c. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de X.

4. Dans cette question, le professeur note les copies de la manière suivante : il donne 1 point pour une réponse juste et enlève 0,25 point pour une réponse fausse.

   Si le total des points ainsi obtenu est négatif, la note attribuée est 0.

   On appelle Y la variable aléatoire qui à chaque résultat associe la note obtenue par l'élève. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(Y)$ de Y.

PROBLÈME **10 points**

PARTIE A - Étude de la représentation graphique d'une fonction *f*

On donne sur la feuille annexe, à rendre avec la copie, la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Le plan est muni du repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1,5 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln 2$.

La droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente de coefficient directeur -2 au point $\mathrm{A}(0\,;\,3)$.

Par lecture graphique et en utilisant les informations ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

1. Quelles sont les valeurs $f(\ln 2)$ et $f(0)$?
2. Déterminer, en le justifiant, $f'(\ln 2)$ et $f'(0)$.
3. Quelle est la limite de f en $-\infty$?

PARTIE B - Étude de la fonction *f*

On admettra maintenant que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 6$$

et on se propose dans cette partie de retrouver par le calcul les résultats obtenus graphiquement dans la partie A.

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - 2\right)^2 + 2$.
2. Calculer $f(\ln 2)$.
3. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Quelle propriété de la courbe $\mathscr{C}_f$, présentée dans la partie A est ainsi confirmée ?
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en utilisant l'expression de $f(x)$ donnée en **B. 1**.
5. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que pour tout nombre réel x,

   $$f'(x) = 2\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 2\right).$$

   b. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.

   c. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) > 0$.

6. En déduire sur $\mathbb{R}$ le tableau de signes de $f'(x)$ puis les variations de la fonction f.
Dresser le tableau de variations de la fonction f. Indiquer la valeur exacte de $f(\ln 2)$ et les limites trouvées en **B. 3. a.** et **B. 4.**

7. Montrer que l'équation $f(x) = 7$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Donner, en le justifiant, un encadrement de α à 10^{-1} près.

PARTIE C Calcul d'une aire

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

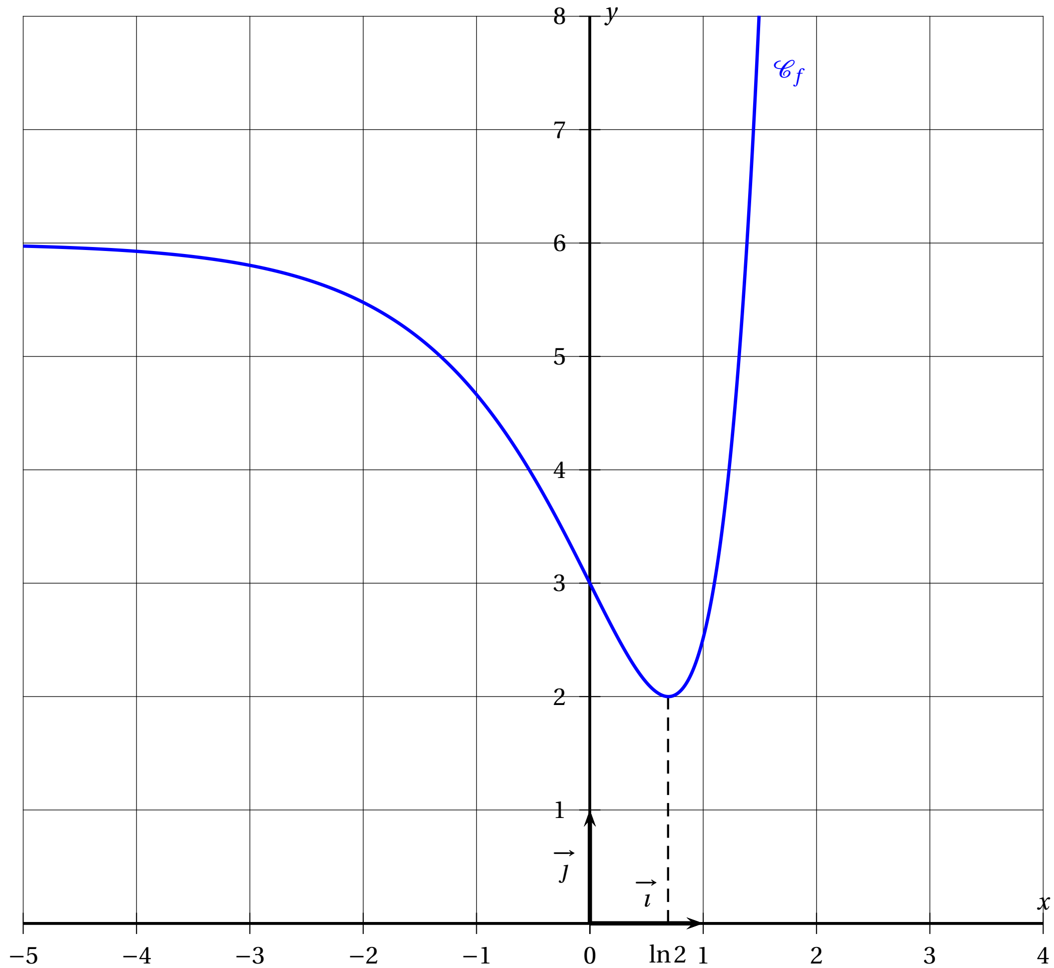
$$F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 6x$$

est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Hachurer sur la feuille annexe la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

3. Soit $\mathscr{A}$ l'aire en cm^2 de la partie hachurée précédemment. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur arrondie au centième.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE



∽ Baccalauréat STI Antilles–Guyane septembre 2008 ∾
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un vrai/faux : il s'agit donc de préciser si chacune des affirmations proposées est vraie ou fausse.

À chaque bonne réponse est attribuée 0,5 point. Toute réponse incorrecte enlève 0,25 point.
L'absence de réponse n'enlève aucun point. En cas de total négatif, la note attribuée à l'exercice sera 0.

Pour chaque affirmation, le candidat donnera la réponse sur sa copie en écrivant en toutes lettres « vrai »ou « faux ». On ne demande aucune justification.
Les questions 1., 2., 3. sont indépendantes.

1. On considère le polynôme P défini pour tout réel x par
$P(x) = (x-1)(x-3)(2x+3)$.

a. L'équation $P(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions qui sont 1, 3 et $-\dfrac{3}{2}$.
b. Pour tout réel x, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x$.
c. L'équation $(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x - 3)(2\mathrm{e}^x + 3) = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.

2. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

a. Les nombres z_1 et z_2 sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$.
b. Un argument de z_2 est $-\dfrac{3\pi}{4}$.
c. Le module de z_1 est $\sqrt{2}$.

3. Soit l'équation différentielle (E) : $4y'' + 49y = 0$ dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et y'' sa dérivée seconde.

a. La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = A\cos\dfrac{7x}{2} + B\sin\dfrac{7x}{2}$, où A et B sont deux constantes réelles, est solution de (E).
b. La fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = 3\cos\left(\dfrac{7x}{2} - \dfrac{3\pi}{4}\right)$ est solution de (E).
c. La fonction k définie pour tout réel x par $k(x) = -\sqrt{2}\cos\dfrac{7x}{2} - \sqrt{2}\sin\dfrac{7x}{2}$ est la solution de (E) qui vérifie $k(0) = \sqrt{2}$ et $k'(0) = 0$.

EXERCICE 2 **5 points**

Une boîte contient 140 tiges métalliques de forme cylindrique, de dimensions variées, issues de la production d'un atelier.
Le tableau suivant donne leur répartition suivant leur longueur ℓ et leur diamètre d, exprimée en millimètres.

ℓ \ d	15,8	16	16,1	16,3
84	5	9	6	0
85	15	19	21	4
86	12	6	12	7
87	6	7	6	5

Par exemple il y a 12 tiges métalliques de longueur 86 mm et de diamètre 16,1 mm.
On tire au hasard une tige de la boîte, les tirages étant équiprobables.
Dans tout l'exercice, les probabilités seront données sous forme de fraction.

1. Calculer les probabilités respectives p_1, p_2 et p_3 des évènements suivants :

  a. « obtenir une tige de longueur 86 mm et de diamètre 16 mm » ;

  b. « obtenir une tige de longueur 85 mm » ;

  c. « obtenir une tige de longueur inférieure ou égale à 86 mm ».

2. Selon les normes imposées par la production, une tige métallique est conforme lorsque sa longueur ℓ et son diamètre d exprimés en millimètres, vérifient :

$$84,5 \leqslant \ell \leqslant 85,5 \quad \text{et} \quad 15,9 \leqslant d \leqslant 16,2$$

Calculer la probabilité de l'évènement : « obtenir une tige conforme ».

3. Soit X la variable aléatoire qui à chacun des tirages possibles, associe la longueur en millimètres de la tige obtenue.

  a. Quelle est la probabilité de l'évènement « $X = 84$ ».

  b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

  c. Calculer la probabilité de l'évènement « $X \geqslant 85$ ».

  d. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. En donner un arrondi au centième.

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative dans le repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ de la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\text{e}^x, \text{ où } a,\ b \text{ et } c \text{ désignent trois nombres réels tels que :}$$

- le point A de coordonnées $(0~;~-1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$;
- la courbe $\mathscr{C}$ admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;
- $f(1) = 2\text{e}$.

Partie A

1. Démontrer que $c = -1$.

2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

  a. En remplaçant c par sa valeur, donner pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et de b.

  b. Calculer a et b.

Partie B

On admet que pour tout réel x, $f(x) = \left(2x^2 + x - 1\right)\mathrm{e}^x$.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$).
   Interpréter graphiquement ce résultat

2. **a.** Vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = x(2x+5)\mathrm{e}^x$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du réel x.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

∽ Baccalauréat STI Métropole septembre 2008 ∾
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z + 8 = 0.$$

2. On considère les points A, B et C du plan d'affixes respectives :

$$z_A = 2 - 2i \quad ; \quad z_B = 2 + 2i \ \text{ et } \ z_C = 4.$$

Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

3. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_A et z_B.
4. **a.** Écrire z_A et z_B sous la forme $re^{i\theta}$, où r est un réel strictement positif et θ un réel compris entre $-\pi$ et π.

   b. Montrer que le point B est l'image du point A par une rotation de centre O et d'angle que l'on précisera.
5. Démontrer que le triangle OAB est isocèle rectangle.
6. Déterminer la nature du quadrilatère OACB.

EXERCICE 2 **5 points**

Une entreprise fabriquant des ordinateurs les vend en ligne sur internet. Ces appareils sont tous garantis un an gratuitement.
Le fabricant propose en option une extension de garantie payante de deux ans, au delà de cette première année gratuite.

1. Une étude est faite sur un échantillon de 1 000 ordinateurs vendus par ce fabricant. Elle montre que :
   - 10 ordinateurs ont nécessité une ou plusieurs réparations au cours de la deuxième année (on note ce cas R_2) ;
   - au cours de la troisième année, 20 ordinateurs ont nécessité une ou plusieurs réparation (on note ce cas R_3) dont un qui avait déjà été réparé l'année précédente.

   Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre d'ordinateurs	R_3 se produit	R_3 ne se produit pas	Total
R_2 se produit			
R_2 ne se produit pas			
Total			

   On admet que la répartition précédente modélise ce qui se produit pour l'ensemble des ordinateurs vendus par ce fabricant.
2. Selon les chiffres du fabricant :
   - pour chaque ordinateur vendu sans extension de garantie et tombé en panne une ou plusieurs fois la deuxième année, le coût moyen de réparation pour l'acheteur au cours de cette deuxième année est 150 €.

- pour chaque ordinateur vendu sans extension de garantie et tombé en panne une ou plusieurs fois la troisième année, le coût moyen de réparation pour l'acheteur au cours de cette troisième année est 200 €.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque ordinateur vendu sans extension de garantie par ce fabricant, associe le coût total moyen des réparations, pour l'acheteur, au terme des trois premières années. Ce coût est exprimé en euros.

Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont donc 0, 150, 200, 350.

a. Justifier que la probabilité de l'évènement $(X = 0)$ est égale à $0,971$.

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

3. Le fabricant propose l'extension de garantie payante de deux ans à un prix de 50 €.
Que peut-on en dire ?

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + 5y = 5x^3 + 3x^2 + 5,$$

où y représente une fonction de la variable x, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' + 5y = 0$.

2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction u, définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = ax^3 + b$, soit solution de l'équation différentielle (E).

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = k\text{e}^{-5x} + x^3 + 1$ où k est un nombre réel.

a. Vérifier que h est solution de l'équation (E).

b. Déterminer le réel k tel $h(0) = -2$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3\text{e}^{-5x} + x^3 + 1.$$

1. a. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

b. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. a. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

3. a. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

b. Établir que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

c. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre réel α.

d. Déterminer selon les valeurs du réel x, le signe de $f(x)$.

Partie C : Courbe représentative de la fonction f

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 8 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^3 + 1$.
   La représentation graphique Γ de la fonction u, dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est tracée sur la feuille jointe en annexe.
   a. On pose, pour tout réel x, $d(x) = f(x) - u(x)$.
   Étudier le signe de $d(x)$.
   b. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la courbe Γ.
2. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous. On donnera dans chaque cas la valeur décimale arrondie au centième de $f(x)$.

x	$-0,2$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
$f(x)$								

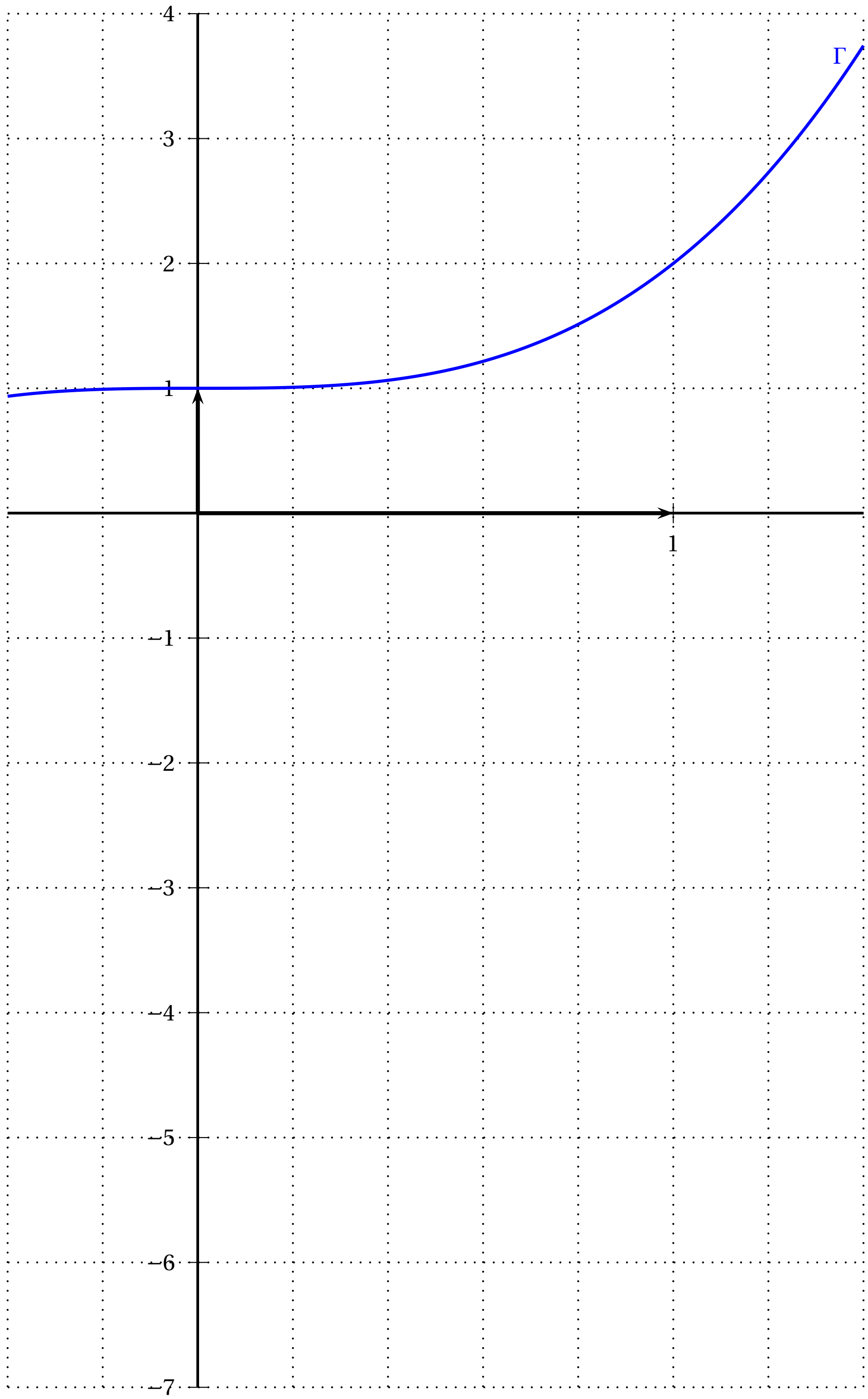
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie.

Partie D : Calcul d'une aire

On appelle $\mathscr{P}$ la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.

1. Hachurer sur la feuille annexe la partie $\mathscr{P}$ du plan.
2. Calculer la mesure, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie $\mathscr{P}$ du plan.
   Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, figurant sur la copie sera prise en compte dans l'évaluation.

FEUILLE ANNEXE DU PROBLÈME
À REMETTRE AVEC LA COPIE



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Nouvelle-Calédonie novembre 2008
Génie électronique, électrotechnique, optique

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On désigne par i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z

$$z^2 - 10z + 41 = 0.$$

2. Pour tout nombre complexe z on pose

$$P(z) = z^3 - 7z^2 + 11z + 123.$$

a. Calculer $P(-3)$.

b. Vérifier que

$$P(z) = (z+3)\left(z^2 - 10z + 41\right).$$

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z

$$P(z) = 0.$$

3. Soit I, A, B et C les points d'affixes respectives :

$z_{\mathrm{I}} = 2$ $\qquad z_{\mathrm{A}} = -3$ $\qquad z_{\mathrm{B}} = 5 + 4\mathrm{i}$ $\qquad z_{\mathrm{C}} = 5 - 4\mathrm{i}$

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2| = 5$.

a. Montrer que les points A, B et C sont dans l'ensemble $\mathscr{C}$.

b. Placer les quatre points A, B, C et I dans le plan.

c. Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

d. Représenter l'ensemble $\mathscr{C}$.

4. Soit $\mathscr{R}$ la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = z \times \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}.$$

a. Donner les éléments caractéristiques de la transformation $\mathscr{R}$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{C}'$, image du cercle $\mathscr{C}$ par la transformation $\mathscr{R}$.
Justifier la réponse et représenter l'ensemble $\mathscr{C}'$ sur la figure.

EXERCICE 2 **4 points**

Un jeu consiste à miser d'abord q euros, puis à appuyer sur un bouton. Une case de couleur s'allume alors au hasard sur le tableau ci-dessous ; à chaque jeu, chaque case a la même probabilité de s'allumer.

R	R	R	R	R	R
R	J	B	B	J	R
R	B	V	V	B	R
R	J	B	B	J	R
R	R	R	R	R	R

On convient que :
R désigne la couleur rouge
J la couleur jaune
B la couleur blanche
V la couleur verte.

- Si une case rouge s'allume, l'organisateur du jeu ne rend rien au joueur.
- Si une case blanche s'allume, l'organisateur du jeu rend la mise de q euros au joueur.
- Si une case jaune s'allume, l'organisateur du jeu donne 5 euros au joueur.
- Si une case verte s'allume, l'organisateur du jeu donne 8 euros au joueur.

1. On considère dans cette question que $q = 1$. Soit X la variable aléatoire représentant le gain relatif du joueur, obtenu en tenant compte de la mise initiale.

a. Justifier que les valeurs prises par X sont $\{-1 ; 0 ; 4 ; 7\}$.

b. Montrer que la probabilité pour que le gain relatif du joueur soit égal à 4 est :

$$P(X=4) = \frac{2}{15}$$

c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X à l'aide d'un tableau.

2. On considère dans cette question que q est un nombre positif quelconque.
Quelle devrait être la mise q pour que le jeu soit équitable ?
Toute justification ou toute explication, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.

PROBLÈME **11 points**

Partie I : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \ln x + 2x^2.$$

1. Montrer que

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x}.$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$.
Dresser le tableau de variation de la fonction g (sans les limites).

3. En déduire que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $g(x)$ est strictement positif.

Partie II : étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2x - 3.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Étudier la limite de f en 0. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Soit A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse e et B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $\sqrt{\text{e}}$.
   a. Donner les valeurs arrondies au centième des coordonnées des points A et B.
   b. En déduire que la fonction f est positive sur l'intervalle $[\sqrt{\text{e}}~;~\text{e}]$.
6. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$. Placer les points A et B.
7. **a.** Démontrer qu'au point A, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à la droite Δ.
   b. Le point A est-il le seul point de la courbe $\mathscr{C}$ admettant une tangente parallèle à la droite Δ ?

Partie III calcul d'aire

1. Soit K la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$K(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

   On note K' la fonction dérivée de la fonction K. Calculer $K'(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. Soit $\mathscr{A}$ l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \sqrt{\text{e}}$ et $x = \text{e}$.
   a. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en unité d'aire.
   b. Donner une valeur approchée au mm^2 près de l'aire $\mathscr{A}$.
   c. Retrouver une valeur approximative de ce résultat en calculant l'aire en mm^2 d'un trapèze à préciser.

↜ Baccalauréat STI Métropole 18 juin 2008 Métropole ↝
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 1 - \text{i}\sqrt{3},\quad z_{\text{B}} = 2 \text{ et } z_{\text{C}} = \overline{z_{\text{A}}}.$$

   a. Déterminer le module et un argument de z_{A}, de z_{B} et de z_{C}.

   b. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ (on laissera apparents les traits de construction).

   c. Montrer que A, B et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Soit z_{D} le nombre complexe : $z_{\text{D}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.

   a. Placer le point D d'affixe z_{D} sur le graphique précédent.

   b. Calculer $z_{\text{D}} - z_{\text{A}}$ et $z_{\text{C}} - z_{\text{B}}$ sous forme algébrique. En déduire que ABCD est un trapèze.

   c. Calculer les distances AB et CD. Que peut-on en conclure pour le trapèze ABCD ?

EXERCICE 2 **5 points**

Onze chansons différentes sont enregistrées sur un CD. La durée de chacune d'elles étant inscrite sur la pochette du CD, on a le tableau suivant :

Numéro de la chanson	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Durée en secondes	200	185	150	200	185	215	230	215	200	230	300

Un lecteur de CD sélectionne *au hasard* une des onze chansons et une seule ; toutes les chansons ont la même probabilité d'être sélectionnées.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

1. Quelle est la probabilité que la chanson n° 7 soit sélectionnée ?
2. **a.** Déterminer la probabilité de l'évènement A : « la chanson sélectionnée a une durée de 200 secondes ».

   b. Déterminer la probabilité de l'évènement B : « la chanson sélectionnée a une durée supérieure à 210 secondes ».

   c. Soit $\overline{B}$ l'évènement contraire de B. Décrire $\overline{B}$ø par une phrase, puis déterminer sa probabilité.

3. On note X la variable aléatoire qui à chaque chanson sélectionnée associe sa durée exprimée en secondes

a. Déterminer les différentes valeurs prises par X.

b. Établir sous forme d'un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Interpréter ce résultat.

PROBLÈME **10 points**

Partie A - Exploitation d'un graphique

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ est donnée sur la figure en annexe. On précise que la courbe $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses au seul point d'abscisse 0 et admet en ce point comme tangente la droite d tracée sur la figure en annexe.
Soit g' la fonction dérivée de g sur $\mathbb{R}$.

1. En prenant appui sur la représentation graphique donnée en annexe :

a. Indiquer à quel entier est égal $g(0)$.

b. Expliquer pourquoi $g'(0) = 2$.

c. Préciser sur quel intervalle la fonction g semble être positive.

2. On admet maintenant que $g(x) = ax + b + \mathrm{e}^x$ où a et b sont des réels que l'on va déterminer.

a. Déterminer b en utilisant la question **1. a.**.

b. Calculer $g'(x)$ en fonction de a puis déterminer a en utilisant la question **1. b.**.

c. En déduire que pour tout réel x,on a : $g(x) = x - 1 + \mathrm{e}^x$.

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression :

$$f(x) = x - 4 - x\mathrm{e}^{-x}.$$

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Vérifier que, pour tout réel x non nul, on a $f(x) = x\left(1 - \dfrac{4}{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 4$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_1$.

c. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_1$- par rapport à la droite Δ.

3. On note f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$, puis vérifier que : $f'(x) = g(x)\mathrm{e}^{-x}$, où g est la fonction obtenue dans la partie A (question 2. c.).

b. En utilisant la question 1. c. de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. En prenant pour unité graphique 1 cm sur chaque axe, tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'asymptote Δ dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie C - Calcul d'une aire

1. Soit h la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression :

$$h(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$$

a. Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression :

$$H(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

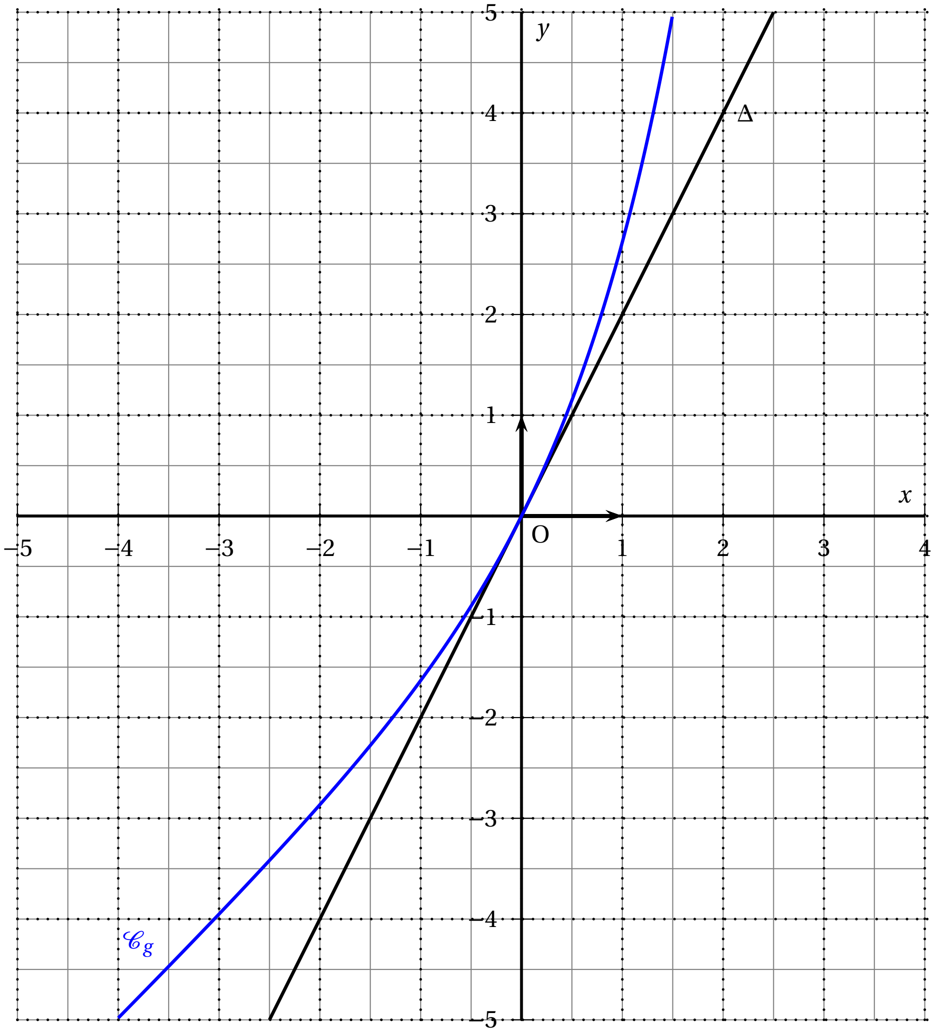
Montrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.

b. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie B.

2. a. Hachurer sur le graphique le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

b. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie hachurée. Donner la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en cm^2 puis sa valeur arrondie au centième.

ANNEXE



Baccalauréat STI Métropole septembre 2008
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Partie A

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm sur chaque axe.
Soit P le polynôme défini par :

$$P(z) = z^3 - z^2 - 2z - 12$$

1. **a.** Calculer $P(3)$. Que peut-on en déduire pour le polynôme P ?
   b. Déterminer les réels a, b et c tels que $P(z) = (z-3)\left(az^2 + bz + c\right)$.
2. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 2z + 4 = 0.$$

   b. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Partie B

Soit A, B, C et D les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_B = 2e^{-2i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_C = 3 - \left(3\sqrt{3}\right)i \quad ; \quad z_D = 3$$

1. **a.** Calculer le module et un argument de z_A puis écrire z_A sous forme trigonométrique.
   b. Écrire z_B sous forme algébrique.
2. Placer sur la feuille de papier millimétré les points A, B, C et D dans le repère $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   a. Montrer que : $\overrightarrow{DC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
   b. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 2 **4 points**

Un industriel se fournit en pièces détachées chez deux fournisseurs différents : le producteur Lavigne et le producteur Olivier. Les pièces fournies ont trois niveaux de qualité différents, en fonction des utilisations prévues. Ces niveaux de qualité influent sur la durée de vie estimée des pièces selon le tableau 1 où les durées de vie estimées sont exprimées en années.

	Qualité supérieure	Qualité ordinaire	Qualité « premier prix »
Producteur Lavigne	5	3	2
Producteur Olivier	3	2	1

Tableau 1 : durées de vie estimées des pièces en années.

Un lot est constitué de 2 000 pièces indiscernables suivant le tableau 2 ci-dessous :

	Qualité supérieure	Qualité ordinaire	Qualité « premier prix »	Total
Producteur Lavigne	100		500	800
Producteur Olivier	400	500		
Total				2 000

Tableau 2 *répartition des pièces en fonction de leur origine et de leur qualité.*

1. **a.** Recopier et compléter le tableau 2.

   b. Montrer que 1 000 pièces ont une durée de vie estimée de deux ans.
2. On choisit une pièce au hasard, chaque pièce ayant la même probabilité d'être choisie.

   a. Déterminer la probabilité que la durée de vie estimée de la pièce choisie soit de deux ans.

   b. On suppose que la pièce choisie provient du producteur Lavigne. Quelle est alors la probabilité que sa durée de vie estimée soit de deux ans ?
3. On note X la variable aléatoire qui, pour chaque pièce du lot considéré, associe sa durée de vie estimée.

   a. Déterminer la probabilité de l'évènement « $X = 3$ ».

   b. Établir sous forme d'un tableau la loi de probabilité de X.

   c. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce nombre.

PROBLÈME **4 points**

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression :

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{x}\right) - 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A Étude de la fonction *f*

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} + 1}$.

   a. Étudier le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

   b. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point E d'abscisse 0.
3. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) - (x - 1) = \ln(1 + \mathrm{e}^{x}) - \ln(\mathrm{e}^{x})$.
   En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) - (x - 1) = \ln(\mathrm{e}^{-x} + 1)$.

   b. Déterminer la limite de $f(x) - (x - 1)$ en $+\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat.

   c. Soit Δ la droite d'équation : $y = x - 1$.
   Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.
4. En prenant comme unité graphique 2 cm sur chaque axe, construire sur une feuille de papier millimétré la droite T, la droite Δ, la droite d'équation : $x = 1$, et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie B Encadrement d'une aire

1. Hachurer sur le graphique la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 2$.

On va déterminer un encadrement de la valeur de l'aire $\mathscr{A}$, de cette surface en unités d'aire.

2. Tracer la droite D d'équation : $y = 0,8x - 0,2$.

3. Par lecture graphique préciser la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

4. On admet que :

$$\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 (0,8x-0,2)\,\mathrm{d}x.$$

a. Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^2 (0,8x-0,2)\,\mathrm{d}x$.

b. En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.