Baccalauréat STI 2009

L'intégrale de juin à novembre 2009

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

∽ Baccalauréat STI Arts appliqués – Antilles-Guyane ∾ juin 2009

EXERCICE 1 **8 points**

Parmi les 90 élèves de la section STI Arts appliqués d'un lycée :

- 90 % aiment dessiner
- 80 % aiment réaliser des maquettes
- Parmi ceux qui n'aiment pas dessiner les 2/3 aiment réaliser des maquettes

1. Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant :

	Aiment dessiner	N'aiment pas dessiner	Total
Aiment réaliser des maquettes			
N'aiment pas réaliser des maquettes			
Total			90

Dans tout l'exercice, donner les probabilités sous forme de fraction irréductible puis en donner l'arrondi à 10^{-3}.

2. Parmi les 90 élèves de la section on choisit un élève au hasard.
On note D l'évènement : « l'élève choisi aime dessiner ».
On note M l'évènement : « l'élève choisi aime réaliser des maquettes ».

a. Exprimer à l'aide d'une phrase chacun des évènements $D \cap M$, $\overline{D}$ et $\overline{D} \cap \overline{M}$.

b. Déterminer la probabilité de chacun de ces trois évènements.

3. Parmi les élèves qui aiment dessiner, on choisit un élève au hasard, quelle est la probabilité que cet élève aime réaliser des maquettes ?

4. On choisit un élève au hasard, quelle est la probabilité qu'il aime dessiner ou réaliser des maquettes ?

PROBLÈME **12 points**

1. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par

$$f(x) = 4x + 1 - \mathrm{e}^{x}.$$

a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; 2]$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 2]$.

c. Déterminer $f(0)$, $f(\ln(4))$ et $f(2)$ (valeurs exactes puis valeurs arrondies à $1O^{-3}$).

d. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par

$$g(x) = \ln(2x + 1).$$

a. On note g' la fonction dérivée de la fonction g. Déterminer l'expression de $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; 2]$.

b. Démontrer que $g'(x) > 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2]$.

c. Déterminer $g(0)$ et $g(2)$, on donnera les valeurs exactes puis les valeurs arrondies à 10^{-3}.

d. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l' intervalle $[0\,;\,2]$.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 5 cm.
L'origine de ce repère sera placée dans le coin en bas à gauche de la feuille millimétrée.
Tracer sur le même dessin les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g.

4. a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\text{I} = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\text{d}x$.

b. Vérifier que la fonction G définie par $G(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\ln(2x+1) - x$ est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\text{J} = \displaystyle\int_0^2 g(x)\,\text{d}x$.

c. On admet que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$.
Donner en unités d'aires la valeur exacte de l'aire de la portion de plan délimitée par les deux courbes tracées et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$, puis en donner la valeur en cm^2 arrondie à 10^{-2}.

✍ Baccalauréat STI Arts appliqués 19 juin 2009 ✍
Métropole–La Réunion

EXERCICE **8 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. Recopier pour chaque question le numéro de question suivi de la proposition qui vous semble exacte. Aucune justification n'est demandée. Toutes les questions sont indépendantes.
Chaque bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte aucun point.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$ alors :

a. $\displaystyle\lim_{x \to -1} f(x) = 0$ **b.** $\displaystyle\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$ **c.** $\displaystyle\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$

2. Une autre écriture de $\mathrm{e}^{-\ln(2)}$ est :

a. 2 **b.** -2 **c.** $\dfrac{1}{2}$

3. Sur l'ensemble $]1~;~+\infty[$, l'équation $\ln(x-1) = 1$ admet comme solution :

a. 1 **b.** $1+\mathrm{e}$ **c.** $\mathrm{e}-1$

4. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère la conique C d'équation $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$; alors :

a. C n'a pas de foyer ;
b. C a pour foyers les points $\mathrm{F}_1\left(\sqrt{5}~;~0\right)$ et $\mathrm{F}_2\left(-\sqrt{5}~;~0\right)$;
c. C a pour foyers les points $\mathrm{F}_1\left(\sqrt{3}~;~0\right)$ et $\mathrm{F}_2\left(-\sqrt{3}~;~0\right)$.

5. Soient A et B deux évènement associés à une expérience aléatoire. Pour tout évènement X, on note $p(X)$ sa probabilité.
On suppose que : $p(A) = 0,25$, $p(B) = 0,6$ et $p(A \cup B) = 0,7$, alors $p(A \cap B)$ est égal à :

a. $0,35$ **b.** $0,85$ **c.** $0,15$

6. Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On considère les points $\mathrm{E}(0~;~-1)$ et $\mathrm{F}\left(3\sqrt{5}~;~1\right)$.
La distance EF est égale à :

a. $3\sqrt{5}$ **b.** 7 **c.** $\sqrt{7}$

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 1$. Une primitive F de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $F(x) = \mathrm{e}^{2x} + x$ **b.** $F(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$ **c.** $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + x - 3$

8. Le plan est rapporté à un repère orthonormal ; on considère la conique C_1 d'équation $5x^2 - y^2 - 25 = 0$ et la droite D_1 d'équation $y = x$.
La conique C_1 et la droite D_1 :

a. n'ont pas de point d'intersection
b. ont deux points d'intersection de coordonnées $\left(\dfrac{5}{2}~;~\dfrac{5}{2}\right)$ et $\left(-\dfrac{5}{2}~;~-\dfrac{5}{2}\right)$.

c. ont deux points d'intersection de coordonnées $\left(\sqrt{5}\ ;\ 0\right)$ et $\left(-\sqrt{5}\ ;\ 0\right)$.

PROBLÈME **12 points**

Le but de ce problème est de calculer la surface d'un pendentif en forme de tulipe.
Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On choisit pour unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I = [0 ; 3] par :

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 2x + 3.$$

La courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est notée $\mathcal{C}_f$ et donnée en annexe.
Ce graphique sera complété au fur et à mesure du problème.

1. Par lecture graphique, donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I.
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale K= $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\text{d}x$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I = [0 ; 3] par

$$g(x) = (3 - x)\text{e}^x.$$

On appelle $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que pour tout x de l'intervalle I, on, a $g'(x) = (2-x)\text{e}^x$ où g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.
2. Étudier le signe de g' et dresser le tableau de variations de la fonction g.

   a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs de la fonction g (arrondir les valeurs au dixième).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$g(x)$			5,4	6,7			

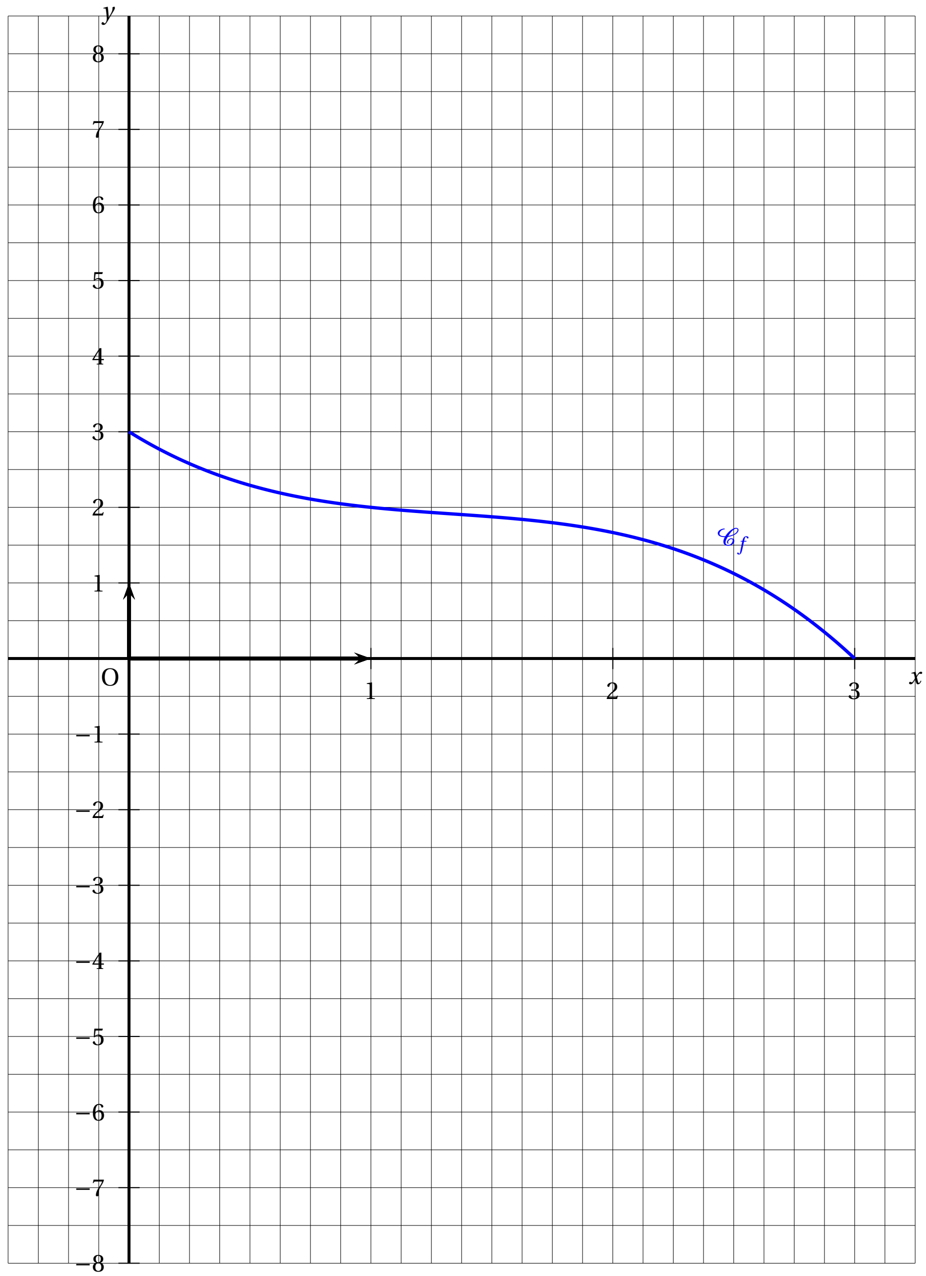
   b. Compléter le graphique de la feuille annexe en traçant la courbe $\mathcal{C}_g$.
3. **a.** Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = (4-x)\text{e}^x$ est une primitive de la fonction g.

   b. Donner la valeur exacte de l'intégrale J= $\displaystyle\int_0^3 g(x)\text{d}x$.

Partie C

1. Hachurer P_1 la portion de plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et$\mathcal{C}_g$.
2. Construire les courbes Γ_f et Γ_g symétriques de $\mathcal{C}_f$ et$\mathcal{C}_g$ par rapport à l'axe des abscisses.
3. Hachurer P_2 la portion de plan comprise entre Γ_f et Γ_g.
4. En utilisant les résultats de la question A. 2. et de la question B. 4. b., exprimer en unités d'aire l'aire du motif représenté par les portions de plan P_1 et P_2.
   En déduire une valeur exacte de l'aire en cm^2 puis la valeur arrondie au cm^2.

ANNEXE à rendre avec la copie



∽ Baccalauréat STI Arts appliqués – Métropole ∾ septembre 2009

EXERCICE **8 points**

Indiquer si chacune des propositions P1, P2, P3 et P4 suivantes est vraie ou fausse.
Justifiez vos réponses.

1. On considère un jeu de cartes classique de 32 cartes.
   On tire au hasard une carte de ce jeu.
   On considère les évènements suivants :
   C : « la carte tirée est un cœur »
   R : « la carte tirée est un roi »
   $C \cup R$: « la carte tirée est un cœur ou un roi ».
   Pour tout évènement X, on note $p(X)$ sa probabilité.
   (P1) La probabilité de l'évènement $C \cup R$ est :
   $p(C \cup R) = p(C) + p(R) = \dfrac{8}{32} + \dfrac{4}{32} = \dfrac{12}{32}$ c'est-à-dire $p(C \cup R) = \dfrac{3}{8}$.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   On considère la conique d'équation cartésienne : $x^2 + 4y^2 = 16$.
   (P2) Cette conique est une ellipse dont les foyers sont $\text{F}\left(2\sqrt{3}\,;\ 0\right)$ et $\text{F}'\left(-2\sqrt{3}\,;\ 0\right)$.
3. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ par : $F(x) = 5 - x + x\ln(x)$.
   (P3) F est une primitive de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.
4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
   Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm est donnée ci-dessous.
   (P4) L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$ est égale à $\dfrac{8}{3}$ en cm^2.

PROBLÈME **12 points**

Partie A

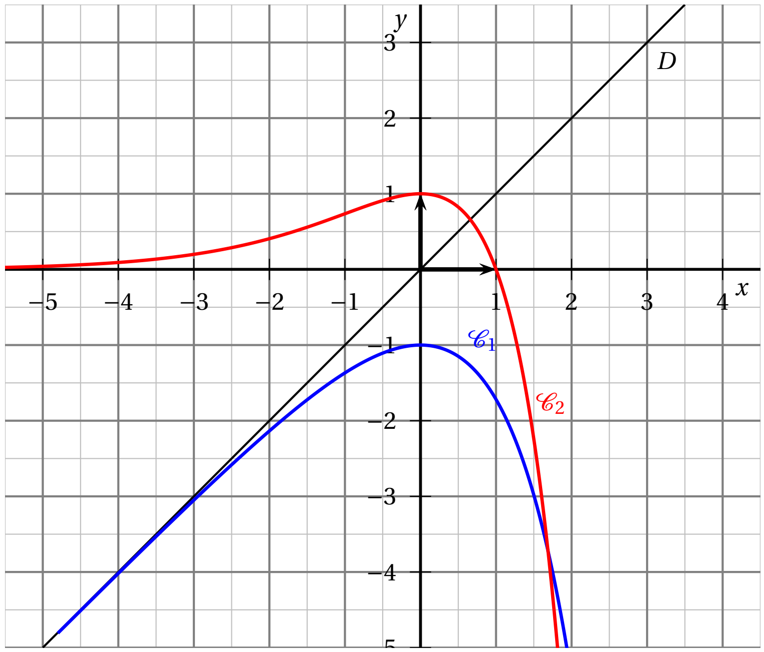
On a tracé ci-dessous, dans un même repère orthonormal d'origine O, les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \text{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = (1 - x)\text{e}^x$$

ainsi qu'une droite D passant par l'origine O.

1. Attribuer à chaque fonction sa courbe représentative, en justifiant la réponse.
2. Calculer la limite de $f(x) - x$ quand x tend vers $-\infty$.
   En déduire alors que la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote oblique et en donner une équation.

Partie B : Étude de la fonction *g*.



1. Calculer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g puis établir le tableau de variations de la fonction g.
3. Indiquer si la fonction g admet des extremums sur $\mathbb{R}$.

Partie C : Intersection des courbes représentatives de f et g

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Vérifier que pour tout réel x : $h'(x) = 1 - g(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.
2. En utilisant l'étude de la fonction g, déterminer pour tout x réel le signe de $h'(x)$. Donner alors le tableau de variations de la fonction h.
   Les limites de la fonction h en $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas demandées.
3. Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1 ; 2[$.
   À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
4. Déduire de la question précédente que les deux courbes admettent un unique point d'intersection sur l'intervalle $]1 ; 2[$.

Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat STI Antilles-Guyane juin 2009 ∾
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Une agence de voyage propose trois durées de séjours - un week-end, une semaine, ou deux semaines - et deux types de destination - France ou Étranger.
Parmi les dossiers de l'agence, on constate que :

- 60 % de séjours ont lieu en France ;
- 20 % des séjours en France durent deux semaines ;
- pour les séjours en France, il y a deux fois plus de séjours d'un week-end que de séjours d'une semaine ;
- 75 % des séjours à l'étranger durent deux semaines ;
- il y a autant de séjours d'un week-end que de deux semaines.

1. L'agence a traité 250 dossiers. Reproduire puis compléter le tableau d'effectifs suivant :

	France	Étranger	Total
Le week-end			
La semaine			
Deux semaines			
Total			

2. On choisit un dossier au hasard parmi les 250 dossiers traités. Calculer la probabilité des évènements suivants (on exprimera les résultats sous forme de fractions) :

a. F : « le dossier choisi est, celui d'un séjour en France » ;

b. S : « le dossier choisi est celui d'un séjour de deux semaines » ;

c. Sachant que le dossier choisi est celui d'un séjour de deux semaines, quelle est la probabilité qu'il soit celui d'un séjour en France ?

Dans la suite, on considère que la probabilité pour un client de choisir un séjour d'un week-end ou de choisir un séjour de deux semaines est la même, égale à $0,42$.

3. Le traitement d'un dossier par l'agence a un coût : appels téléphoniques, recherches, temps passé, ...
Les frais de dossier s'élèvent pour l'agence à :
- 2 euros pour un séjour d'un week-end ;
- 5 euros pour un séjour d'une semaine ;
- 15 euros pour un séjour de deux semaines ;

Soit X la variable aléatoire qui à chaque type de dossier associe son coût.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer $\text{E}(X)$, espérance mathématique de X. On fera apparaître de façon détaillée l'application de la formule donnant $\text{E}(X)$.

c. Par souci de commodité, l'agence demande une somme forfaitaire à chaque client quelque soit le type de séjour qu'il a choisi.
Quelle somme doit-elle demander à chaque client pour espérer rentrer au moins dans ses frais ? Expliquer cette réponse.

EXERCICE 2 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.).
Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chacune des questions, donner, sans justification, la bonne réponse sur la copie.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte ou l'absence de réponse est comptée 0 point.

1. Le nombre complexe $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ a pour module et argument respectivement :
   Réponse A : 1 et $\dfrac{\pi}{6}$;
   Réponse B : 2 et $\dfrac{\pi}{3}$;
   Réponse C : 4 et $-\dfrac{\pi}{3}$
2. Le plan complexe est rapporté au repère $\left(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   Le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$ appartient :
   Réponse A : au cercle de centre O et de rayon 1 ;
   Réponse B : à la droite d'équation $y = -x$;
   Réponse C : au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
3. Une solution de l'équation $\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ est :
   Réponse A : 1 ; **Réponse B :** i ; **Réponse C :** 0.
4. L'ensemble des points d'affixe z tels que : $|z+\mathrm{i}| = |z-1|$ est :
   Réponse A : la droite d'équation $y = x - 1$;
   Réponse B : la droite d'équation $y = -x$;
   Réponse C : la droite d'équation $y = x$.

PROBLÈME **11 points**

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = a\frac{\ln x}{x} + b,$$

où a et b sont deux nombres réels à déterminer.
f' désigne la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de cette fonction f, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan d'unité graphique 2 cm.
On a représenté la courbe $\mathscr{C}$, sur la feuille annexe.
La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point de coordonnées (1 ; 2) ; elle coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; 1).

Partie A : recherche de l'expression de $f(x)$

En utilisant le graphique de la feuille annexe,

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Déterminer $f'(x)$, en fonction de la variable x, du nombre réel a et du nombre réel b si besoin.
3. Utiliser les deux questions précédentes pour déterminer les valeurs de a et b.

Partie B : étude de la fonction f

Dans la suite du problème, la fonction f est définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2.$$

1. Déterminer, par le calcul, la limite de $f(x)$ en O.
En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ dont on donnera une équation.

2. a. Démontrer, par le calcul, que la droite D, d'équation, $y = 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

b. Étudier par le calcul la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite D sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Tracer la droite D sur la feuille annexe.

3. Déterminer $f'(x)$.

4. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f en justifiant avec soin le signe de $f'(x)$.

Partie C : Calcul d'une aire

Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

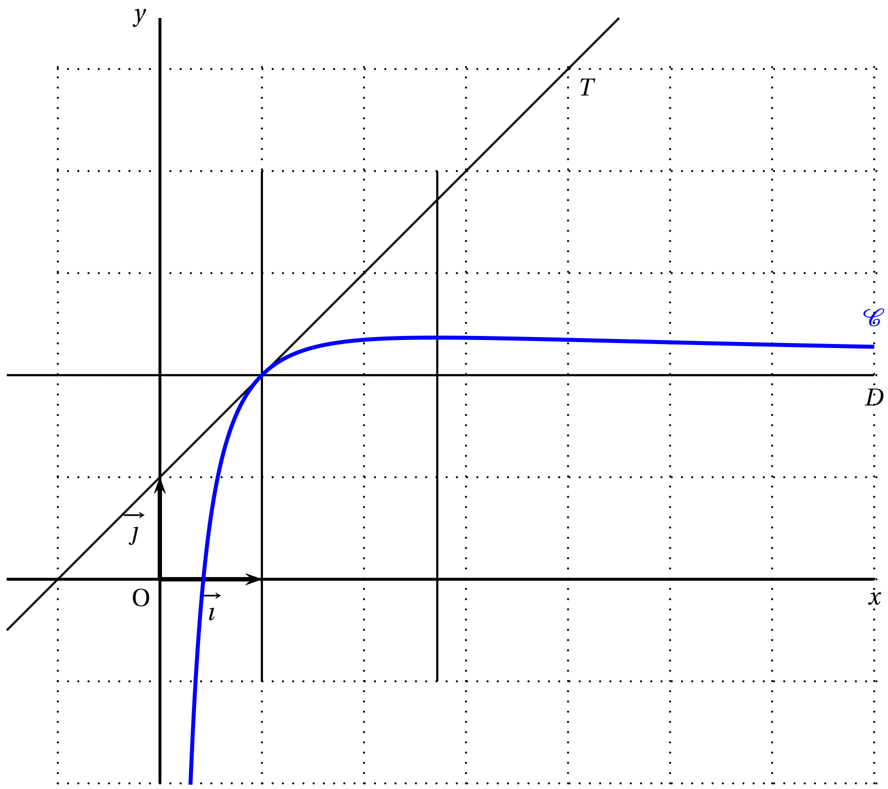
$$g(x) = (\ln x)^2$$

1. Calculer $g'(x)$, où g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.
En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. On considère le domaine du plan S délimité par la droite d'équation $x = 1$, la droite d'équation $x = \mathrm{e}$, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite D.
Calculer, en unités d'aire puis en cm^2, la mesure de l'aire du domaine S.

Feuille annexe

(à rendre avec la copie)



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole ∽
23 juin 2009

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **6 points**

Pour la construction d'une piscine privée, un architecte a imaginé la forme de la figure 1 (vue de dessus de la piscine), où $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ est un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm. Le périmètre de cette piscine est constitué de deux demi-cercles : $\overset{\frown}{\text{AB}}$ de centre O et de rayon 3, et $\overset{\frown}{\text{CD}}$ de centre O′ et de rayon 4, reliés par deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. L'axe des abscisses est un axe de symétrie de la figure.

La courbe $\mathscr{C}$ reliant les points A et D est la courbe représentative d'une fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~8]$.

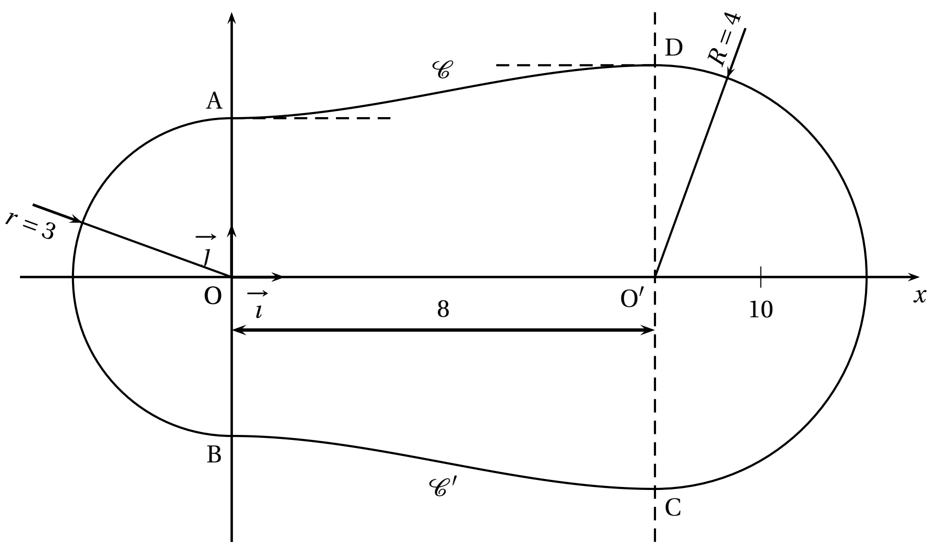


figure 1

1. **a.** En remarquant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A d'abscisse 0, le point D d'abscisse 8, et qu'en ces points elle admet une tangente horizontale, déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(8)$, $f'(0)$ et $f'(8)$.

   b. On suppose qu'il existe quatre nombres réels a, b, c et d tels que pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~8]$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
   Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a, b, c, d et x.

   c. Déduire des questions précédentes que $c = 0$ et $d = 3$ et que les réels a et b vérifient le système : $\left\{\begin{array}{rcl} 512a+64b &=& 1\\ 192a+16b &=& 0\end{array}\right.$.

   d. Résoudre le système précédent.

2. Par la suite, on admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~8]$,
   $f(x) = -\dfrac{1}{256}x^3 + \dfrac{3}{64}x^2 + 3$, et que f est strictement positive sur $[0~;~8]$.

Le but de cette question est de déterminer l'aire de la piscine, en m^2, sachant que la figure 1 est une représentation à l'échelle 1/100 de la réalité.

a. Expliquer une démarche qui permet d'obtenir l'aire demandée. On rappelle que toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, pourra être prise en compte.

b. Calculer, en m^2, la valeur exacte de l'aire de la piscine réelle. Donner également la valeur arrondie à 0,1 m^2 de cette aire.

3. La profondeur d'eau de cette piscine est constante, égale à 1,60 m. Calculer, en m^3, la valeur exacte du volume d'eau contenue dans cette piscine. Donner également la valeur arrondie au m^3 de ce volume.

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 5 cm.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1$ et $z_{\text{B}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\text{i})$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

1. a. Montrer que les points A et B appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

b. Déterminer un argument de z_{B}.

c. Tracer le cercle $\mathscr{C}$, et placer les points A et B.

d. Soit I le milieu du segment [AB] et z_{I} son affixe. Placer I sur la figure et prouver que $z_{\text{I}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\text{i}$.

2. a. Calculer la distance OI, et prouver que $\text{OI} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

b. Démontrer que la droite (OI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{AOB}}$. En déduire un argument de z_{I}.

c. Donner la forme trigonométrique de z_{I}.

3. Montrer à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes que la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ est $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

PROBLÈME **9 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées. On s'intéresse, dans ce problème, à la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \ln x - x^2.$$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$. En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B : étude de la fonction f

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement cette limite.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c. Justifier que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x+2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   d. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
2. **a.** Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$,
   $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b. Établir le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. **a.** Déterminer les coordonnées du point A de la courbe $\mathcal{C}$ tel que la tangente en ce point soit parallèle à l'asymptote $\mathcal{D}$.
   b. Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$, tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e.
   On rappelle que e est le nombre réel tel que $\ln \text{e} = 1$.
4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0\,;1[$.
   On appelle B le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse α.
   b. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α .
5. Dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, placer les points A et B puis tracer les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie juin 2009
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 - 7z^2 + 20z - 24.$$

   a. Vérifier que $P(3) = 0$.
   b. Déterminer deux nombres réels α et β tels que $P(z) = (z-3)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$.
   c. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. On note A, B et C les points du plan, d'affixes respectives $a = 3$, $b = 2 + 2\text{i}$ et $c = 2 - 2\text{i}$.
   a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
   b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe b.
   c. Déterminer le module et un argument du nombre complexe c.
   d. Démontrer que le triangle OBC est rectangle et isocèle.

3. On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que : $|z-3| = \sqrt{5}$.
   a. Montrer que les points B et C appartiennent à l'ensemble $\mathscr{E}$.
   b. Déterminer la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$ et représenter cet ensemble sur le dessin.

EXERCICE 2 **4 points**

On s'intéresse au jeu suivant :
Une urne (urne 1) contient trois boules portant les numéros 0, 5 et 10.
Une deuxième urne (urne 2) contient trois boules : une blanche (B), une jaune (J) et une rouge (R).
Le joueur tire successivement et au hasard une boule dans l'urne 1 puis une boule dans l'urne 2.
Un résultat possible est par exemple :
« la boule 1 porte le n° 5 et la boule 2 est jaune » que l'on codera (5 ; J).

1. Dresser la liste de tous les résultats possibles.
   Les gains ou les pertes associés à un résultat sont définis par les règles suivantes :
   - le joueur, pour pouvoir jouer, mise 5 € ;
   - suite au résultat obtenu à l'issue des deux tirages il gagne :
     — le montant inscrit sur la première boule multiplié par 0 si la deuxième boule est blanche ;
     — le montant inscrit sur la première boule multiplié par 1 si la deuxième boule est jaune ;
     — le montant inscrit sur la première boule multiplié par 3 si la deuxième boule est rouge.

   Le « gain réel » du joueur est donc la somme gagnée lors du jeu diminuée de la mise initiale.
   Par exemple le gain réel associé au résultat (5 ; R) est
   $5 \times 3 - 5 = 10$ euros.
   On note X la variable aléatoire qui à tout résultat associe le gain réel du joueur.

2. Quels sont les différents « gain réels » possibles du joueur ?
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
4. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
5. S'il effectue un très grand nombre de parties, un joueur va plutôt :
   - réponse A : être ruiné ?
   - réponse B : devenir riche ?
   - réponse C : ni l'un ni l"autre ?

   Quelle est ta bonne réponse ? Justifier.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : Étude sommaire d'une fonction *g*

On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$g(x) = \mathrm{e}^{x^3-x-5}.$$

La courbe représentative de la fonction g est notée $\mathscr{C}$ et est représentée sur la feuille annexe.
Le dessin suggère que g est croissante sur $\mathbb{R}$. On se propose dans cette partie de confirmer ou d'infirmer cette impression.

1. Déterminer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.
2. Étudier selon les valeurs du nombre réel x le signe de $P(x) = 3x^2 - 1$.
3. Justifier que $g'(x)$ et $P(x)$ sont de même signe pour tout nombre réel x.
4. En déduire le tableau de variations de g. (L'étude des limites n'est pas demandée.)
5. Que penser des variations de g suggérées par le dessin ?

Partie B : Étude de quelques propriétés d'une fonction *f*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = -x\ln x + \frac{1}{3}x + 1.$$

La courbe représentative de f est notée Γ, cette courbe est représentée sur la feuille annexe.

1. Étude des variations de f
   - **a.** Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = -\ln x - \dfrac{2}{3}$.
   - **b.** Résoudre dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$, l'inéquation $f'(x) > 0$.
   - **c.** Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. (On ne demande pas de calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.)
2. Calcul d'une aire
   - **a.** Hachurer sur la feuille annexe la partie du plan comprise entre la droite d'équation $x = 1$, la droite d'équation $x = 2$, l'axe des abscisses, et la courbe Γ.
   - **b.** On note H la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $H(x) = x^2\ln x - \dfrac{x^2}{2}$.
     Déterminer $H'(x)$ et en déduire une primitive de h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

c. Calculer l'aire de la partie du plan hachurée exprimée en unité d'aire.

Partie C ; Résolution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 2]$

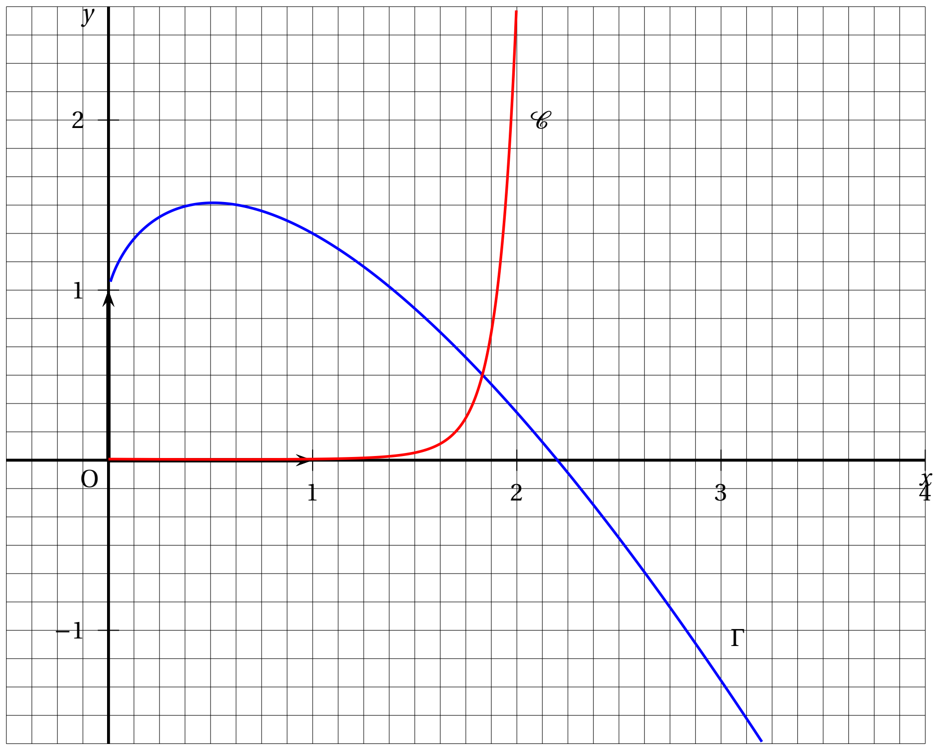
On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[1 ; 2]$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.

1. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; 2]$, $h'(x) > 0$.

2. En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, appartenant à l'intervalle $[1 ; 2]$.

3. Donner la valeur approchée arrondie au centième de cette solution.

Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie civil Métropole septembre 2009

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **4 points**

Ceci est un QCM. Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B, C, ou D est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
On ne demande *aucune justification.*
NOTATION : *Chaque réponse juste rapporte un point, une réponse fausse coûte* $0,25$ *point. Une absence de réponse ne rapporte ni ne coûte de point.*
Si la note globale de l'exercice est négative, elle est ramenée à zéro.

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

1. $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

Réponse A : $f(x) = \cos 3x + \sqrt{3}\sin 3x$ Réponse B : $f(x) = \sqrt{3}\cos\frac{1}{3}x + \sin\frac{1}{3}x$

Réponse C : $f(x) = \cos\frac{1}{9}x + \sqrt{3}\sin\frac{1}{9}x$ Réponse D : $f(x) = \cos\frac{1}{3}x + \sqrt{3}\sin\frac{1}{3}x$.

2. f est solution de l'équation différentielle :

Réponse A : $y'' - 9y = 0$ Réponse B : $9y'' + y = 0$

Réponse C : $y'' + 3y = 0$ Réponse D : $y'' + \frac{1}{3}y = 0$.

3. La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ est :

Réponse A : $\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ Réponse B : $\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$ Réponse C : $\dfrac{3}{\pi}$ Réponse D : $-\dfrac{\pi}{2}$.

4. La solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ est :

Réponse A : $\dfrac{5\pi}{6}$ Réponse B : $\dfrac{5\pi}{2}$ Réponse C : $\dfrac{\pi}{6}$ Réponse D : $-\dfrac{\pi}{2}$

EXERCICE 2 **4 points**

Dans une usine, le tableau de production de deux chaînes de montage est le suivant :

Mois	Productions mensuelles chaîne A	Productions mensuelles chaîne B	N^{o} de rang des productions
Janvier 2009	2 056	1 770	1
Février 2009	2 069	1 805	2
Mars 2009	2 082	1 840	3
Avril 2009	2 095	1 875	4

Les productions forment des suites arithmétiques.

1. **a.** Quelle est la raison de la suite pour la chaîne A ? Justifier.
   b. Quelle est la raison de la suite pour la chaîne B ? Justifier.
2. En supposant que l'une des productions mensuelles de la chaîne B soit 2 050, quel serait alors son numéro de rang ?
3. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par A_n et B_n les productions mensuelles respectives de rang n des chaînes A et B.
   a. Exprimer A_n en fonction de n et de A_1.
   b. Exprimer B_n en fonction de n et de B_1. Retrouver ainsi le résultat de la question 2.
   c. À partir de quelle date (mois et année), la production de la chaîne B sera-t-elle supérieure ou égale à celle de la chaîne A ?

PROBLÈME **12 points**

Les objectifs de ce problème sont :
— l'étude de quelques propriétés d'une fonction f et de sa courbe représentative,
— un calcul d'aire entre deux courbes.

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x^2 + x + \mathrm{e}^{-x}$,
où y est une fonction de la variable réelle x et y' sa dérivée.
Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = (x + k)\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x + 1,$$

où k désigne une constante réelle.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que la fonction f est solution de l'équation (E).
3. Déterminer le réel k pour que $f(0) = 1$.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - x + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et $\mathscr{P}$ la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

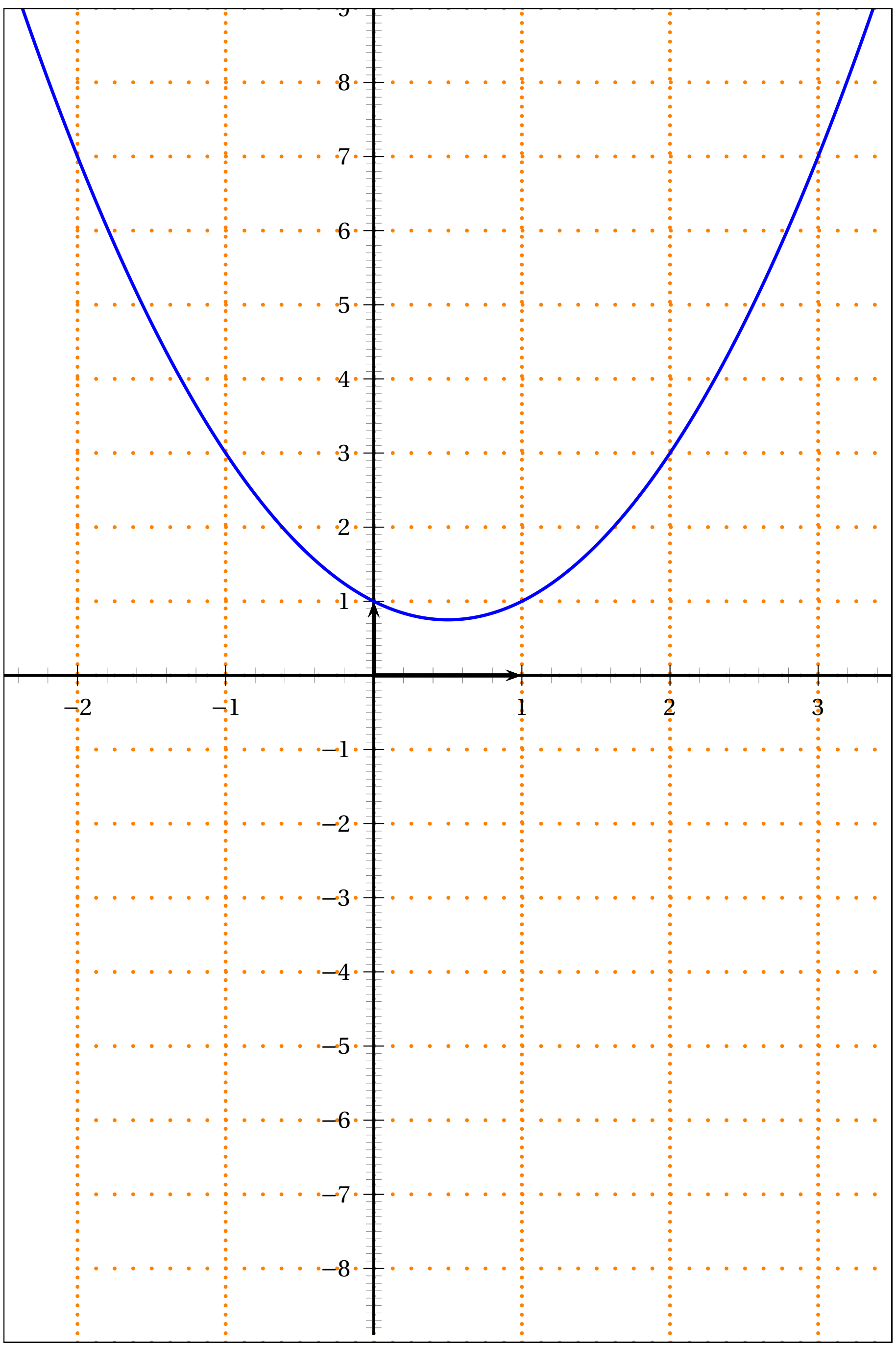
1. **a.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)]$. Interpréter graphiquement ce dernier résultat.
   c. Étudier sur $\mathbb{R}$ la position relative des deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1 - x) + 2x - 1$.
   b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.
3. Sur la feuille annexe :
   a. Compléter le tableau de valeurs arrondies au centième.
   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le cadre où a déjà été tracée la courbe $\mathscr{P}$.

Partie C

1. Démontrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
2. Soit A la partie du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$ où α est un nombre réel supérieur ou égal à 2.
   a. Colorier la partie A sur la feuille annexe dans le cas particulier où $\alpha = 2$.
   b. Pour $\alpha \geqslant 2$ quelconque, déterminer l'aire de la partie A en fonction de α, en unités d'aire puis en cm^2.
   c. Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \left(-\alpha\mathrm{e}^{-\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha} + 1\right)$.
   d. Quelle est la limite de l'aire de A en cm^2 lorsque α tend vers $+\infty$?

FEUILLE ANNEXE À RENDRE OBLIGATOIREMENT AVEC LA COPIE

x	-2	$-1,5$	$-1,1$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$												


8
7
6
5
4
3
2
1
−2
−1
1
2
3
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie septembre 2009
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit (E) l'équation d'inconnue complexe z : $z^2 - 8z + 41 = 0$.
   a. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
   b. On note z_1 la solution de l'équation (E) dont la partie imaginaire est positive et on note z_3 le nombre complexe défini par $z_3 = \dfrac{1}{8}\left(-z_1^2 - 25 + 16\text{i}\right)$. Démontrer que $z_3 = -2 - 3\text{i}\cdot$
2. On note A, B, C et K les points du plan d'affixes respectives : $a = 4 + 5\text{i}$, $b = -3 + 4\text{i}$, $c = -2 - 3\text{i}$ et $k = 1 + \text{i}$.
   a. Placer les points A, B, C et K dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
   b. Démontrer que K est le milieu du segment [AC].
   c. Calculer $|a - k|$ et $|b - k|$ puis en déduire que les points A, B et C appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Soit D le symétrique de B par rapport à K; on note d l'affixe du point D.
   a. Déterminer d et placer le point D dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
   b. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

EXERCICE 2 **4 points**

On note (E) l'équation différentielle

$$y'' + 4y = 0,$$

où y est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. On note f la solution particulière de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions :

   $$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2.$$

   Déterminer l'expression de la fonction f.
3. Démontrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.
4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0~;~\dfrac{\pi}{3}\right]$.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \text{e}^{-2x} + 4\text{e}^{-x} + 6x + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A : Étude des limites et recherche d'une asymptote

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Démontrer que $f(x) = \text{e}^{-x}\left(\text{e}^{-x} + 4 + 6x\text{e}^{x} + \text{e}^{x}\right)$. En déduire la limite de f en $-\infty$.
3. On note h la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par
$h(x) = f(x) - (6x + 1)$.
Déterminer la limite de h en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?
4. Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout nombre réel x et en déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 6x + 1$.

Partie B : Étude des variations de la fonction *f*

1. Démontrer que la fonction dérivée f' de f est définie pour tout nombre réel x par :

$$f'(x) = -2\left(\text{e}^{-x} + 3\right)\left(\text{e}^{-x} - 1\right).$$

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'inéquation $\text{e}^{-x} - 1 \geqslant 0$; en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Construire la droite $\mathscr{D}$ puis la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie C : Calcul d'aire

m étant un nombre réel strictement positif, on note $\mathscr{A}(m)$ l'aire, en unités d'aire, comprise entre la droite $\mathscr{D}$, la courbe $\mathscr{C}$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = m$.

1. Exprimer $\mathscr{A}(m)$ en fonction de m.
2. Calculer $\mathscr{A}(1)$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie au centième.
3. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation
$-4\text{e}^{-2x} - 32\text{e}^{-x} + 17 = 0$ (on pourra poser $X = \text{e}^{-x}$).
4. Déterminer le réel $m > 0$, tel que $\mathscr{A}(m) = \dfrac{19}{8}$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat Nouvelle-Calédonie STI novembre 2009
Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d' argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 + 2z^2 - 16.$$

1. Résolution de l'équation $P(z) = 0$.
   a. Calculer $P(2)$ et déterminer deux nombres réels α et β tels que $P(z) = (z-2)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$.
   b. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

   On désigne par A, B, et C les points d'affixes respectives :
   $a = 2$; $b = -2-2\text{i}$; $c = 4\text{i}$.
2. Étude du triangle ABC
   a. Placer les points A, B, et C dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
   b. Calculer les modules des nombres complexes $b-a$, $c-a$ et $c-b$.
   c. Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.
   d. Déterminer l'affixe d du point D tel que le quadrilatère ABDC soit un carré.
3. On note Ω le point du plan d'affixe $\omega = \sqrt{2}\text{e}^{\frac{3\text{i}\pi}{4}}$.
   a. Déterminer l'écriture algébrique de ω et placer le point Ω dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
   b. Démontrer que les points A, B, C, et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

-

EXERCICE 2 **4 points**

1. On note (x_n) la suite arithmétique de premier terme $x_0 = 10$ et de raison r.
   Sachant que $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, déterminer r et en déduire les valeurs de x_1, x_2, x_3 et x_4.
2. Un sac contient 100 boules indiscernables au toucher. Sur chacune de ces boules est inscrit l'un des numéros 0, 1, 2, 3 ou 4. Le nombre de boules portant chaque numéro est indiqué dans le tableau ci-dessous :

Numéro de la boule	0	1	2	3	4
Nombre de boules portant ce numéro	10	15	20	25	30

   Un joueur tire au hasard une boule dans le sac, et on admet que les tirages sont équiprobables.
   Pour chaque entier n compris entre 0 et 4, on note P_n la probabilité que le joueur tire une boule portant le numéro n.
   Déterminer les valeurs des nombres P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4.

3. On convient de la règle du jeu suivante :

- si le numéro n de la boule tirée est impair, le joueur perd n euros (son gain est donc égal à $-n$ euros) ;
- si le numéro n de la boule tirée est pair, le joueur gagne n euros (son gain est donc égal à $+n$ euros) .

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage d'une boule associe le gain du joueur.

a. Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire X.

b. Justifier que la probabilité de l'évènement $(X = 2)$ est égale à $0,2$.

c. Donner, dans un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X puis déterminer son espérance mathématique $\text{E}(X)$.

d. On modifie la règle du jeu de façon à ce que les numéros pairs soient perdants (le gain est égal à $-n$ euros) et les impairs gagnants (le gain est égal à $+n$ euros).

Calculer, selon cette nouvelle règle, l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y associée au gain du joueur.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : résolution d'une équation différentielle

Dans cette partie, on se propose de déterminer une solution particulière de l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad y' + 2y = x$$

où y désigne une fonction numérique de la variable x, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_2) : $\quad y' + 2y = 0$.

2. Vérifier que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, par $u(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$, est une solution de l'équation différentielle (E_1).

3. On admet que toute solution φ de l'équation (E_1) est de la forme $\varphi(x) = u(x) + C\text{e}^{-2x}$ où C est un nombre réel quelconque et u la fonction définie à la question 2.

Déterminer la solution φ_0 de l'équation (E_1) telle que : $\varphi_0(0) = \dfrac{3}{4}$.

Partie B : étude d'une fonction

medskip

On note f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \text{e}^{-2x}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$, d'unités 4 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

1. Étude des limites de la fonction f

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Justifier que $f(x) = \text{e}^{-2x}\left(\dfrac{1}{2}x\text{e}^{2x} - \dfrac{1}{4}\text{e}^{2x} + 1\right)$ et en déduire la limite de f en $-\infty$.

c. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$, et préciser la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

2. Étude des variations de la fonction f

a. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

b. Résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^{-2x} \leqslant \dfrac{1}{4}$ et en déduire le tableau des variations de la fonction f.

c. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

d. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ possède une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,2]$. Justifier avec précision et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

3. Tracer, dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$, puis tracer la courbe $\mathscr{C}$

Partie C : Calcul d'une aire

1. Soit m un nombre réel strictement supérieur à $\ln 2$. On note $\mathscr{A}(m)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = m$.

Déterminer $\mathscr{A}(m)$ en fonction de m.

2. Calculer la limite de $\mathscr{A}(m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI mars 2010 Nouvelle-Calédonie
Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Déterminer, sous forme algébrique, les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{rcr} z_1 + \mathrm{i}z_2 & = & 2+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}+1\right)\\ z_1 - \mathrm{i}z_2 & = & \mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right)\end{array}\right.$$

2. On note A, B, C les points d'affixes respectives $a = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = 1-\mathrm{i}$, $c = ab$.
   a. Donner la forme algébrique de c.
   b. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes a, b et c.
   c. Placer les points A, B, C dans le repère $\left(O~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
3. Déduire de la question précédente, la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
4. Soit M un point quelconque du plan complexe d'affixe z.
   a. Interpréter géométriquement les modules $\left|z-(1+\mathrm{i}\sqrt{3})\right|$ et $|z-(1-\mathrm{i})|$.
   b. Déterminer alors l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M tels que
   $\left|z-(1+\mathrm{i}\sqrt{3})\right| = |z-(1-\mathrm{i})|$.
   c. Représenter l'ensemble $\mathscr{D}$ dans le repère $\left(O~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère l'équation différentielle notée

$$(E) \quad 4y'' + 9y = 0$$

où y désigne une fonction numérique de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(2\pi) = \frac{3}{2}.$$

3. Démontrer que pour tout nombre réel t : $f(t) = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3}{2}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0~;~\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = -\mathrm{e}^{-x} + x^2 + x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie pour tout nombre réel x par : $g(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x + 1$. On note g' la fonction dérivée de g.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Déterminer le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire le sens de variation de g sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et dresser son tableau de variations. On précisera la valeur exacte de l'extremum de g.
4. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout nombre réel x.

Partie B : Étude de la fonction f

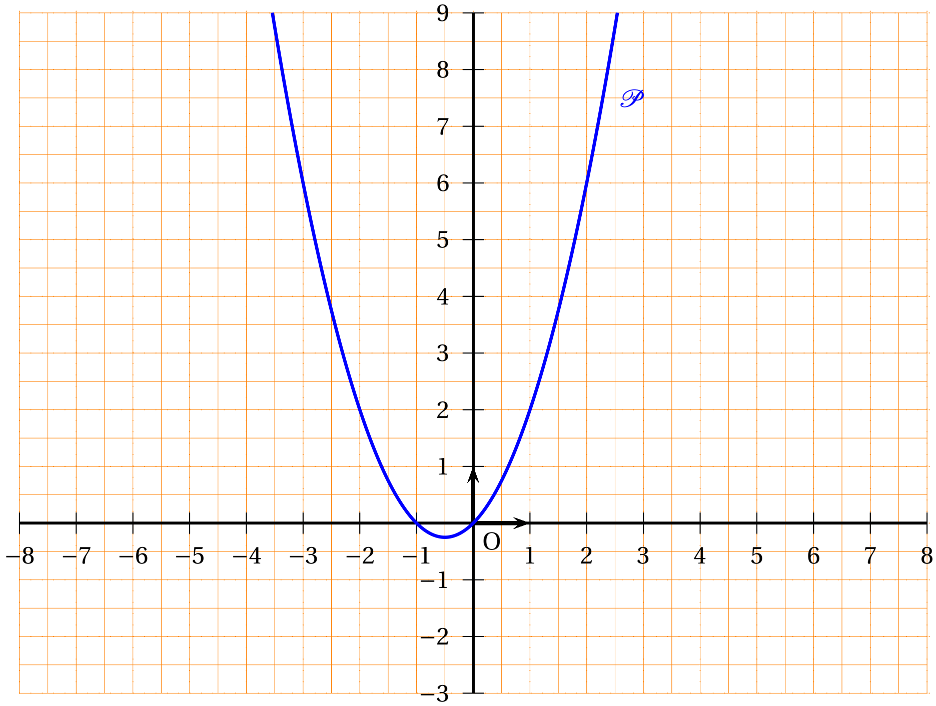
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. Étude des limites de f
   - **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   - **b.** Vérifier que $f(x) = x^2\left(\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{(-x)^2} + 1 + \dfrac{1}{x}\right)$ et déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Étude des variations de f
   - **a.** Montrer que pour tout nombre réel x : $f'(x) = g(x)$.
   - **b.** Déduire de la partie A le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f·
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. On considère la fonction p définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $p(x) = x^2 + x$.
   Sa courbe représentative notée $\mathscr{P}$ est représentée sur la feuille annexe.
   - **a.** Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{P}$.
   - **b.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}[f(x) - p(x)]$.
5. Construire dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille annexe en tenant compte des précédents résultats.

Partie C : Calcul d'une aire

1. Soit β un nombre réel strictement supérieur à 1. Calculer en unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}(\beta)$ du domaine plan compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ d'une part, les droites d'équations $x = 1$ et $x = \beta$ d'autre part.
2. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\beta)$ quand β tend vers $+\infty$.

Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2009 ∼
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **4 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On considère le polynôme P de la variable complexe z défini de la façon suivante :

$$P(z) = 9z^3 - 21z^2 + 17z - 5.$$

1. Calculer $P(1)$.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que $P(z) = (z-1)\left(az^2 + bz + c\right)$.
3. Résoudre dans l'ensemble des complexes l'équation : $P(z) = 0$.
4. On munit le plan d'un repère direct orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 6 cm.
   Soient A, B et C les points d'affixes respectives :
   $$z_{\text{A}} = 1,\ z_{\text{B}} = \frac{1}{3}(2+\text{i}) \text{ et } z_{\text{C}} = \frac{1}{3}(2-\text{i}).$$
   a. Placer les points A, B et C (on utilisera une des feuilles de papier millimétré fournies).
   b. Calculer les modules suivants : $|z_{\text{B}} - z_{\text{A}}|$, $|z_{\text{A}} - z_{\text{C}}|$ et $|z_{\text{B}} - z_{\text{C}}|$; en déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.
5. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a. Déterminer l'affixe du centre Ω de $\mathscr{C}$ et son rayon r en cm.
   b. Placer Ω et tracer le cercle $\mathscr{C}$ sur la figure.

EXERCICE 2 **5 points**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A - Effet de réponses au hasard à un exercice de type vrai/faux.

On imagine un exercice vrai/faux à quatre questions dont la règle de notation serait la suivante : chaque réponse correcte rapporte un point. Chaque réponse incorrecte fait perdre un demi-point. Un total négatif pour ce vrai/faux est ramené à zéro.

On suppose qu'un élève répond au hasard à chacune des quatre questions par « vrai » ou « faux » et qu'il ne laisse aucune question sans réponse.

1. Indiquer dans un tableau tous les totaux de points possibles en fonction du nombre de réponses correctes fournies.
2. Compléter l'arbre des choix de la feuille annexe avec les mots « correct » et « incorrect », puis indiquer, dans la dernière colonne, le nombre de points obtenus pour chacune des 16 éventualités.
3. On suppose que chacune des 16 éventualités a la même probabilité d'être obtenue. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque éventualité, associe le nombre de points correspondant.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de X.

c. Calculer $\text{E}(X)$, l'espérance mathématique de X.

Partie B - Un exercice de type vrai-faux.

Cette partie B est un exercice de type vrai/faux qui doit être traité effectivement par le candidat.

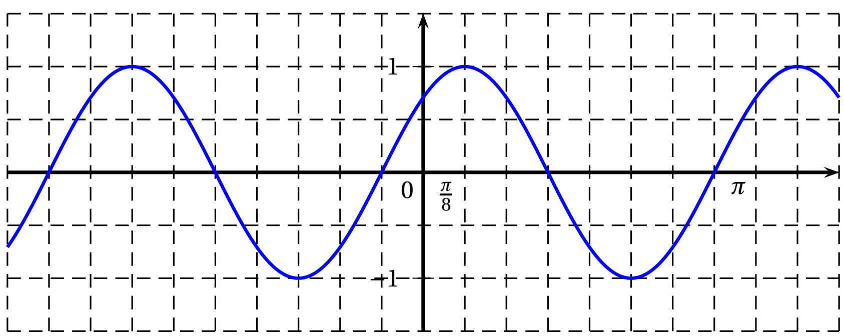
La règle de notation est la suivante : à chaque bonne réponse est attribué 0,5 point. Toute réponse incorrecte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'enlève aucun point. En cas de total négatif, la note attribuée à cette partie sera 0.

Le texte ci-dessous comporte quatre affirmations, numérotées de 1 à 4.
Pour chacune d'elles, indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse. On ne demande aucune justification.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels par

$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Une partie de la courbe représentative de la fonction f est tracée ci-dessous :



Affirmation 1 : L'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution dans $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$.

Affirmation 2 : $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{8}} f(x)\,\text{d}x = \frac{1-\sqrt{2}}{4}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 3\sin(2x)$.

Affirmation 3 : g est une solution de l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$.

Affirmation 4 : La valeur moyenne de g sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ vaut $\frac{12}{\pi}$.

PROBLÈME **11 points**

Partie I

On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = x - 1 + \text{e}^{2x}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan. On prend comme unité graphique 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 1$.
   a. Démontrer que $\mathcal{D}$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$.
   b. Étudier les positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Soit g' la fonction dérivée de g.
   a. Calculer, pour tout x réel, $g'(x)$ et montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   b. Dresser le tableau de variations de g.
4. Calculer $g(O)$ puis justifier l'affirmation suivante : « si $x < 0$, alors $g(x) < 0$; si $x > 0$, alors $g(x) > 0$ ».
5. Construire dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}_g$. (On utilisera une feuille de papier millimétré.)

Partie II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2 + \text{e}^{2x}.$$

1. Soit f' la fonction dérivée de f. Démontrer que, pour tout x réel, $f'(x) = 2g(x)$.
2. En utilisant la question I. 4., dresser le tableau de variation de la fonction f (les limites ne sont pas demandées).
3. En déduire la valeur de x pour laquelle la fonction f admet un minimum et déterminer ce minimum.

Partie III - *Application à un problème de distance minimale*

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

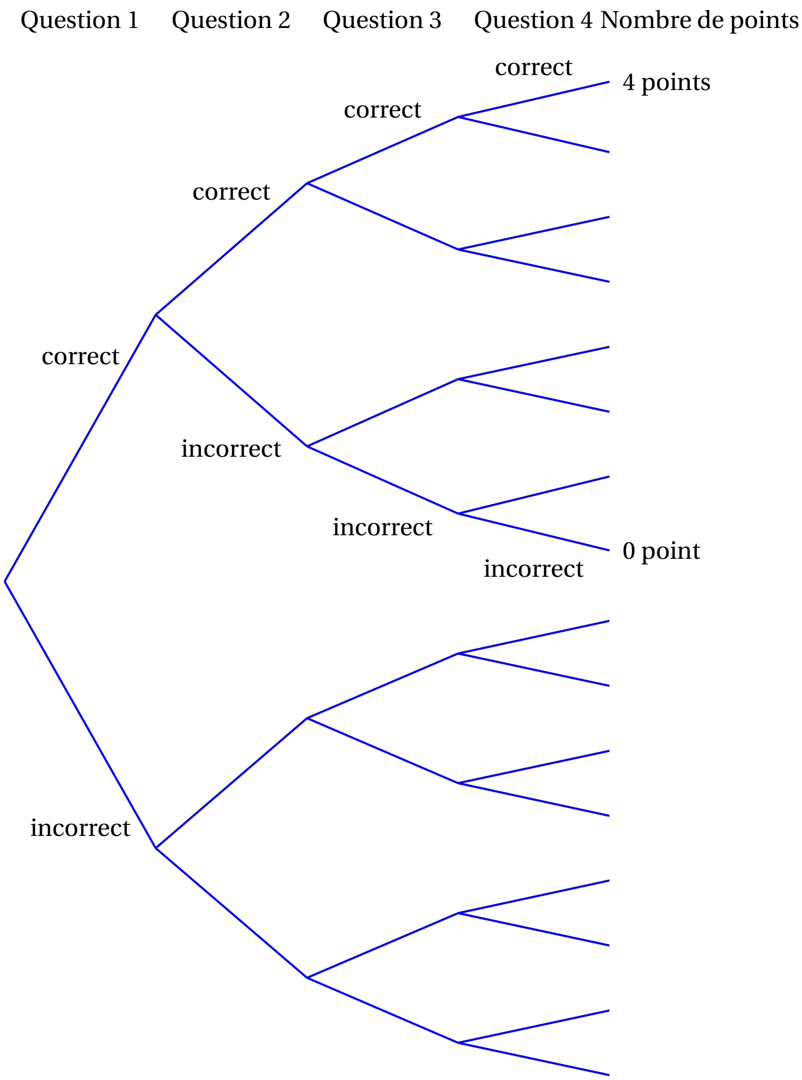
$$h(x) = \text{e}^x.$$

On donne en annexe la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction h dans un repère orthonormal d'origine Ω. On a également représenté le point P de coordonnées $(1 ; 0)$.

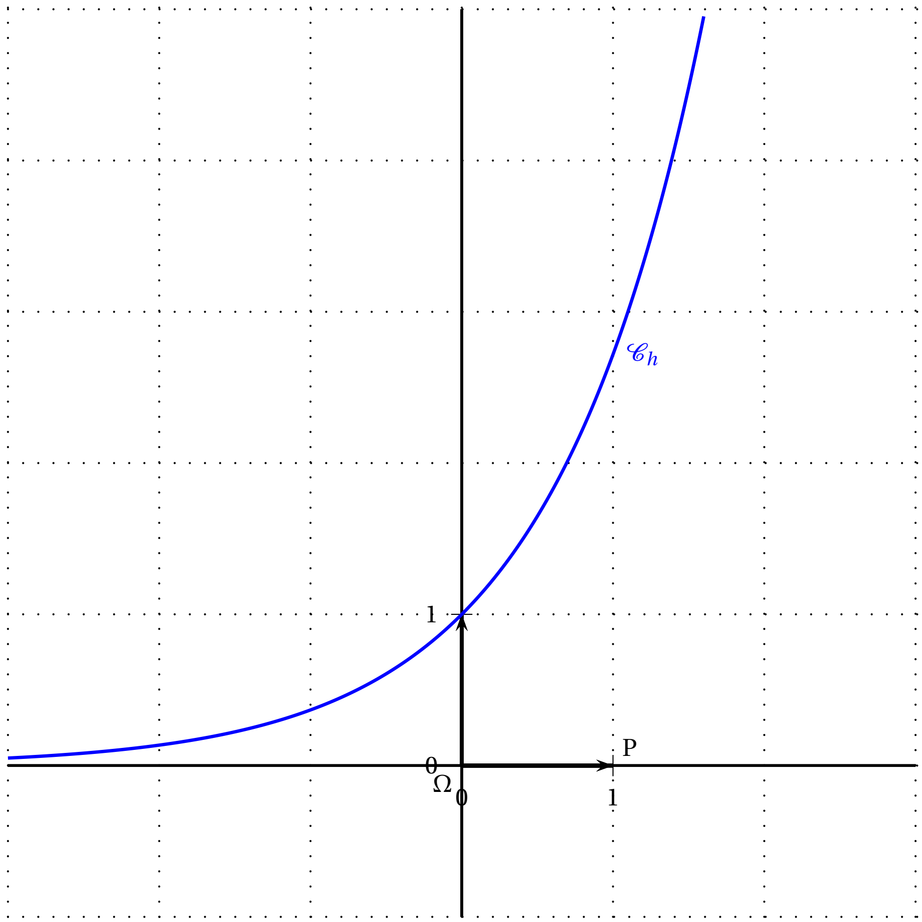
On rappelle que, dans un repère orthonormal, le carré de la distance entre les points $\text{A}\left(x_\text{A},\ y_\text{A}\right)$ et $\text{B}\left(x_\text{B},\ y_\text{B}\right)$ est donné par : $\text{AB}^2 = (x_\text{B} - x_\text{A})^2 + \left(y_\text{B} - y_\text{A}\right)^2$.

1. **a.** Placer, dans le repère donné en annexe, les points $\text{A}\left(-1 ; \text{e}^{-1}\right)$ et $\text{B}(1 ; \text{e})$
   b. Calculer PA^2 et PB^2.
2. On considère, pour un réel x, le point M de $\mathcal{C}_h$ d'abscisse x, c'est-à-dire le point $M(x ; \text{e}^x)$.
   a. Montrer que $\text{P}M^2 = f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la partie II.
   b. En déduire les coordonnées du point de la courbe $\mathcal{C}_h$ le plus proche du point P. *Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Feuille annexe à rendre agrafée à la copie



Problème : partie II



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Métropole 23 juin 2009
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = 1 + \text{i}\sqrt{3}$.

a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_{A}.

b. Écrire le nombre complexe z_{A} sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

c. Placer le point A dans le repère $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ en prenant comme unité graphique 2 cm.

2. Soit B l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On appelle z_{B} l'affixe du point B.

a. Déterminer l'écriture du nombre complexe z_{B} sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π).

b. Écrire le nombre complexe z_{B} sous forme algébrique.

c. Placer le point B dans le repère $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

3. Montrer que le triangle AOB est équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $z_{\text{C}} = z_{\text{A}}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

a. Par quelle transformation géométrique le point C est-il l'image du point A ? Préciser les éléments caractéristiques de cette transformation.

b. Placer le point C dans le repère $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

c. Écrire le nombre complexe z_{C} sous forme trigonométrique.

d. Établir que $z_{\text{C}} = z_{\text{A}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

En déduire l'écriture du nombre complexe z_{C} sous forme algébrique.

e. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

EXERCICE 2 **5 points**

On propose à un candidat au baccalauréat un exercice qui comporte trois questions auxquelles il doit répondre par vrai ou faux.
Une bonne réponse rapporte 2 points, une mauvaise réponse enlève 1 point, l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.
On appelle :

- A l'évènement : « le candidat n'a pas répondu à la question » ;
- B l'évènement : « le candidat a donné la bonne réponse à la question » ;

- C l'évènement : « le candidat a donné la mauvaise réponse à la question ».

Si, par exemple, le candidat a donné les bonnes réponses aux questions 1 et 2, et la mauvaise réponse à la question 3, le résultat obtenu se note (B, B, C).

Un candidat qui ne sait répondre à aucune question hésite entre deux stratégies :
— soit il répond au hasard aux trois questions;
— soit il décide de ne pas répondre à une question, par exemple la première, et répond au hasard aux deux autres questions.

I. Première stratégie : le candidat choisit de ne pas laisser de questions sans réponse.
Il répond donc au hasard et de façon équiprobable aux trois questions.

1. Combien de triplets différents peut-on obtenir? (On pourra utiliser un arbre.)
2. Calculer la probabilité que le candidat n'ait fait aucune faute. .
3. Montrer que la probabilité que le candidat ait fait une faute et une seule, est égale à $0,375$.
4. On note X la variable aléatoire qui à chaque triplet associe la note obtenue à l'exercice.
   a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

II. Deuxième stratégie : le candidat choisit de ne pas répondre à la première question, et répond au hasard et de façon équiprobable aux deux autres questions.

1. Combien de triplets différents peut-on obtenir?
2. On note Y la variable aléatoire qui à chaque triplet associe la note obtenue à l'exercice.
   a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.
   b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
   c. Calculer l'espérance mathématique E(Y) de la variable aléatoire Y.

III. Comparaison des stratégies : parmi les deux stratégies, quelle est la plus favorable au candidat?

PROBLÈME — 10 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2\text{e}^{x} + 2x + 3.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   Les limites ne sont pas demandées.
2. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2~;~-1]$.
   b. Donner l'arrondi au dixième de α.
   c. En déduire, selon les valeurs du nombre réel x, le signe de $g(x)$.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{x} + x^2 + 3x.$$

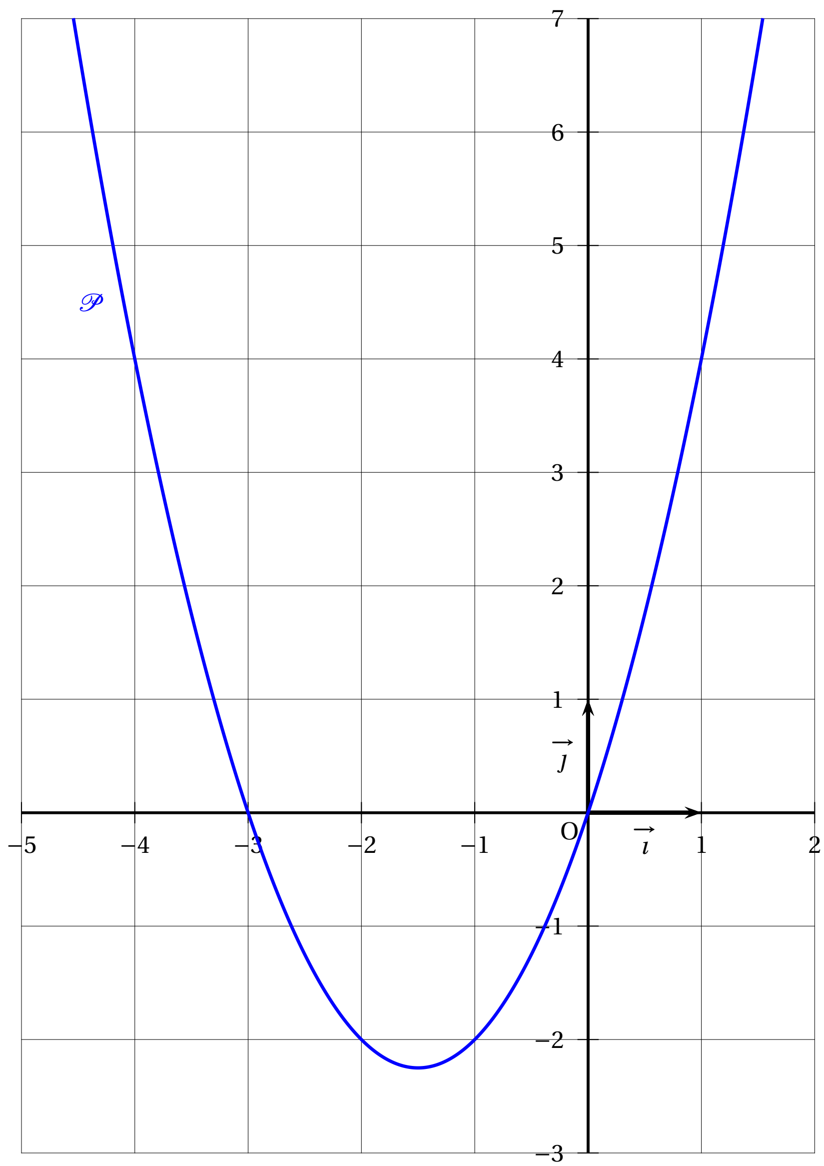
1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
3. Soit $\mathscr{P}$ la parabole d' équation $y = x^2 + 3x$.
   - **a.** Déterminer la limite de $f(x) - \left(x^2 + 3x\right)$ quand x tend vers $-\infty$.
   - **b.** Que peut-on en déduire graphiquement ?
   - **c.** Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la parabole $\mathscr{P}$.
4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   - **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
   - **b.** En utilisant la question 2. c. de la partie A, dresser le tableau de variations de la fonction f.
   - **c.** Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
6. Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la parabole $\mathscr{P}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, en prenant comme unité graphique 2 cm.
   Tracer sur cette feuille annexe la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Hachurer sur la feuille annexe la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$.
2. **a.** Calculer la mesure exacte, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan hachurée précédemment.
   - **b.** En déduire, en cm^2, la mesure arrondie au centième de l'aire $\mathscr{A}$.

ANNEXE

Cette feuille est à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat STI Polynésie juin 2009 ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
Le nombre i désigne le nombre complexe de module 1 d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation, d'inconnue z :

$$z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0.$$

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_B = \overline{z_A}$.

 a. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_A et z_B.

 b. Construire le cercle de centre O et de rayon 4 cm, puis placer les points A et B dans le repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ précisé ci-dessus.

3. On désigne par R la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z' = iz$.

 a. Indiquer la nature de la transformation R et préciser ses éléments caractéristiques.

 b. Le point C est l'image du point A par la transformation R.
 Déterminer la forme algébrique de l'affixe z_C du point C. Placer ce point C dans le repère précédent.

 c. Montrer que le point C est le symétrique du point B par rapport au point O.

 Dans cette question, toute rédaction, même partielle, sera prise en compte dans l'évaluation.

4. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **4 points**

Un sac contient 4 boules indiscernables au toucher : une jaune, une rouge, une verte et une noire notées respectivement : J, R, V et N.

Dans une fête foraine, un jeu est organisé de la manière suivante :
On tire au hasard une première boule du sac ; on note sa couleur et on la remet dans le sac. On effectue ensuite un deuxième tirage au hasard, indépendant du premier, dont on note également la couleur. Ces tirages sont équiprobables.

On appelle résultat un couple dont le premier élément est la couleur de la boule obtenue au premier tirage et le second élément est celle de la boule obtenue au second tirage.
Exemple : Le résultat du tirage de la boule rouge suivie de la boule verte se note (R ; V).

1. Déterminer l'ensemble des résultats possibles.

2. Calculer la probabilité du résultat (N ; N).

3. Pour jouer, on doit miser 20 euros.

Une boule jaune rapporte 20 euros, une boule rouge 12 euros, une boule verte 5 euros et une boule noire ne rapporte rien.

On appelle X la variable aléatoire qui à chaque résultat associe le bénéfice ou la perte réalisé par le joueur, un bénéfice étant compté positivement et une perte négativement.

Exemple : le résultat (R; V) rapporte au joueur 17 euros. Il perd dans ce cas 20 - 17 = 3 euros. La valeur de X correspondant à ce cas est donc -3.

a. Montrer que pour le résultat (J ; R), la variable aléatoire X prend la valeur 12.

b. Indiquer dans un tableau les résultats obtenus dans la question 1 en y mentionnant les valeurs prises par la variable aléatoire X.

c. Montrer que la probabilité que X prenne la valeur 12 est égale à $\dfrac{1}{8}$.

d. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

e. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} + 4.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées).

PARTIE A : Étude de la fonction f

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote D dont on précisera une équation.

b. Montrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = \mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - 5) + 4$. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. a. Soit f'la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout nombre réel x, calculer $f'(x)$.
Montrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{x}(2\mathrm{e}^{x} - 5)$.

b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels l'équation $2\mathrm{e}^{x} - 5 = 0$.
Résoudre ensuite dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2\mathrm{e}^{x} - 5 > 0$.

c. En déduire les variations de la fonction f. Indiquer la valeur exacte de $f\left(\ln \dfrac{1}{2}\right)$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur l'intervalle $[1 ; 2]$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

4. a. Montrer que le point O appartient à la courbe $\mathscr{C}$.

b. Déterminer le coefficient directeur de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point O.

5. Tracer dans le repère $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ l'asymptote D la droite Δ et, sur l'intervalle $[-2,5 ; 2]$, la courbe $\mathscr{C}$.

PARTIE B : Calcul d'aire

1. Quel est le signe de la fonction f sur l'intervalle $\left[\ln \frac{1}{2}\ ;\ 0\right]$?
2. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite d'équation $x = \ln \frac{1}{2}$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   a. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique précédent.
   b. Calculer l'aire exacte du domaine $\mathscr{D}$ en cm^2, puis donner une valeur approchée au centième de cette aire.

∽ Baccalauréat STI Antilles–Guyane septembre 2009 ∾
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **4 points**

Dans cet exercice, les quatre questions sont **indépendantes**.
Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

1. On considère le nombre complexe $z = -1 + \text{i}\sqrt{3}$.
   Écrire z sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
2. Soit A le point du plan d'affixe ${}_{\text{A}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$ et A$'$ l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe de A$'$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
3. On considère les points B, C et D du plan d'affixes respectives :
   $$z_{\text{B}} = 1 + 2\text{i},~ z_{\text{C}} = 4 - \text{i},~ z_{\text{D}} = -1 - 3\text{i}.$$
   Calculer les distances DB et DC. Donner une interprétation géométrique du résultat.
4. Déterminer le réel c pour que le nombre complexe $-4 + 2\text{i}$ soit solution de l'équation :
   $$z^2 + 8z + c = 0.$$
   Résoudre ensuite cette équation dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

EXERCICE 2 **4 points**

Une personne possède un téléphone portable dont le code comporte quatre chiffres. Elle ne se souvient plus de ce code et dispose seulement des informations suivantes :
— les quatre chiffres sont pris parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6 et sont tous différents;
— le deuxième chiffre est un 2 et le quatrième est un 5.
La situation peut être schématisée de la façon suivante :

?	2	?	5

En tenant compte de toutes ces informations, cette personne saisit un code en choisissant au hasard les deux chiffres manquants.

1. Écrire la liste des douze codes de quatre chiffres qui sont alors possibles.
2. Sachant que ces douze codes sont équiprobables et que le bon code est :

3	2	6	5

   déterminer les probabilités respectives $p_1,~ p_2$ et p_3 des évènements suivants :

   a. « Le code saisi est correct ».
   b. « Le code saisi ne comporte aucun chiffre exact bien placé à part les deux déjà connus ».

c. « Le code saisi comporte au moins un chiffre exact bien placé en plus des deux chiffres déjà connus ».

3. On définit la variable aléatoire X qui, à chaque code saisi, associe le nombre total de chiffres exacts bien placés (y compris ceux déjà connus au départ).

a. Déterminer la probabilité de l'évènement « X = 3 ».

b. Donner les trois valeurs prises par la variable aléatoire X.

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

PROBLÈME — 12 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A : Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$f(x) = 1 + \ln(2x+1)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée en annexe pour aider le candidat et lui permettre de vérifier ses réponses.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\dfrac{1}{2}$ et en donner une interprétation graphique.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

c. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a $f(x) \geqslant 1$.

3. a. Résoudre dans l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ l'équation : $1 + \ln(2x+1) = 0$.

b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.

Partie B : Étude d'une fonction g

Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = (x+1)\text{e}^{-x}.$$

On note Γ la courbe représentative de g dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. a. Déterminer la limite de g en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$. Donner une interprétation graphique de cette limite.

2. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

a. Démontrer que, pour tout réel x, $g'(x) = -x\text{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs du réel x et dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. Vérifier que, pour tout réel x, on a $g(x) \leqslant 1$.

4. Tracer la courbe Γ dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}$ sur la feuille donnée en annexe.

Partie C : Calcul d'aire

1. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$F(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln(2x+1).$$

a. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

b. Calculer l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

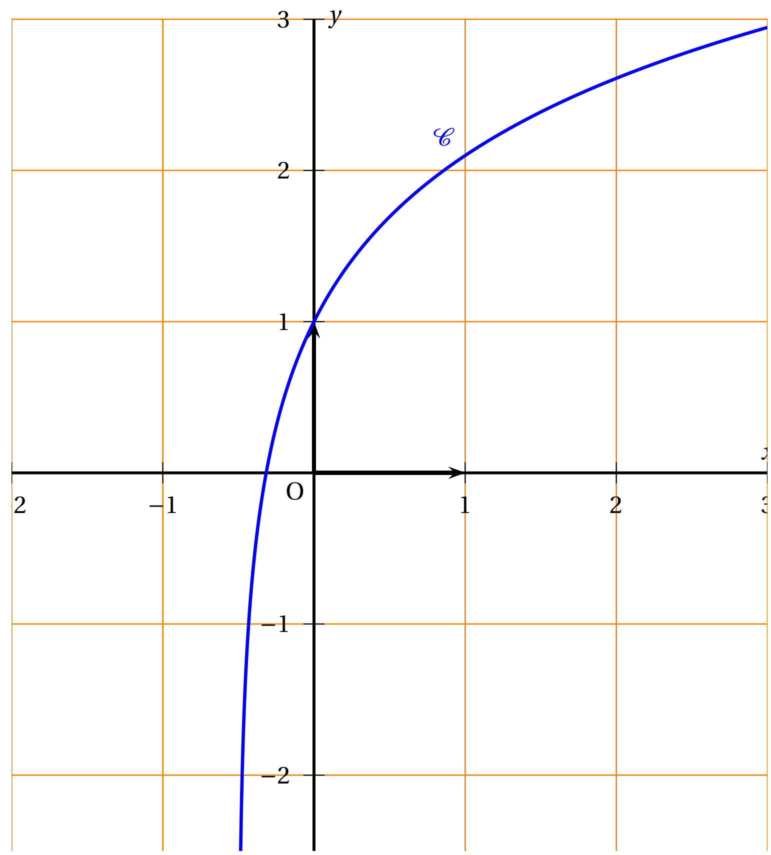
2. On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :
$G(x) = (-x-2)\mathrm{e}^{-x}$.
On admet que la fonction G est une primitive de g sur $[0~;~+\infty[$.
Calculer l'intégrale $I_2 = \displaystyle\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$.

3. a. Démontrer, en utilisant des résultats établis dans les parties A et B, que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la courbe Γ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

b. Hachurer sur le graphique la partie $\mathscr{P}$ du plan délimitée par la courbe Γ, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

c. Déduire de ce qui précède la valeur exacte de l'aire de la partie $\mathscr{P}$ exprimée en unités d'aire.

Annexe : À rendre avec la copie



∽ Baccalauréat STI Métropole & La Réunion septembre 2009 ∾
Génie électronique, électrotechnique et optique

Exercice 1 **6 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. Soit z_0 le nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{6}$.
   Calculer le module et un argument du nombre complexe z_0^3.
   En déduire la forme algébrique de z_0^3.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 8\text{i},\ z_{\text{B}} = 4\sqrt{3} + 4\text{i} \text{ et } z_{\text{C}} = \overline{z_{\text{B}}}$$

où $\overline{z_{\text{B}}}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_{B}.

1. Calculer le module et déterminer un argument de z_{B} puis de z_{C}
2. Vérifier que $z_{\text{A}} = 8\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$.
3. On appelle z_{D} l'affixe du point D, image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   a. Déterminer z_{D} et l'écrire sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
   b. En déduire que $z_{\text{D}} = -4\sqrt{3} + 4\text{i}$.
4. **a.** Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ en prenant comme unité graphique 1 cm.
   b. Démontrer que le triangle OAD est équilatéral.
   c. Démontrer que le point O est le milieu du segment [CD].
   d. Déterminer la nature du triangle ACD.

Exercice 2 **4 points**

Pour un jeu de hasard, on place dans un sac opaque cinq jetons numérotés de 1 à 5, indiscernables au toucher.

1. Lors d'une partie, un joueur pioche au hasard dans le sac un jeton qu'il place devant lui. Il pioche ensuite au hasard un second jeton qu'il place à droite du premier, formant ainsi un nombre de deux chiffres. Le premier jeton tiré indique donc le chiffre des dizaines et le second celui des unités.
   a. À l'aide d'un arbre, écrire les 20 nombres qu'il est possible d'obtenir.

b. Soit M_2 l'évènement « le nombre obtenu est un multiple de 2 » et M_3 l'évènement « le nombre obtenu est un multiple de 3 ».

Démontrer que $P(M_2) = P(M_3)$.

c. Déterminer la probabilité de l'évènement A : « le nombre obtenu est un multiple de 3 qui n'est ni un multiple de 2 ni un multiple de 5 ».

2. Un joueur doit miser 3 euros pour faire une partie.

Si le nombre obtenu est un multiple de 2, le joueur perçoit 2 euros.

Si le nombre obtenu est un multiple de 3, le joueur perçoit 3 euros.

Si le nombre obtenu est un multiple de 5, le joueur perçoit 5 euros.

Les sommes perçues sont cumulatives. (*Par exemple, si le joueur obtient le nombre* 45 *qui est à la fois un multiple de* 3 *et de* 5*, il perçoit* 8 *euros*).

On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain (positif ou négatif) finalement réalisé par le joueur en tenant compte de la mise initiale. (*Par exemple, si le joueur obtient le nombre* 45*, la variable aléatoire X prend la valeur* $8 - 3 = 5$).

a. Démontrer que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont -3 ; -1 ; 0 ; 2 et 5.

b. Démontrer que $P(X = 0) = \dfrac{1}{10}$.

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

3. **a.** Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

b. Le jeu est-il équitable ?

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Détermination d'une fonction g

On désigne par (E) l'équation différentielle

$$2y' + y = 0,$$

dans laquelle y désigne une fonction de la variable x définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. y' désigne la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Soit f la solution particulière de l'équation différentielle (E) vérifiant $f(2) = \mathrm{e}$.

Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{2-\frac{1}{2}x}$.

3. Pour tout nombre réel x, on pose $g(x) = (2x+1)[f(x)]^2 - 9$.

Montrer que $g(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{4-x} - 9$.

Partie B : Étude de la fonction g

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

2. **a.** Montrer, que pour tout nombre réel x, $g(x) = 2\mathrm{e}^4 x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^4\mathrm{e}^{-x} - 9$.

b. Utiliser cette expression pour déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

c. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

3. **a.** On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g. Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = (1-2x)\mathrm{e}^{4-x}$.

b. Déterminer le sens des variations de g et dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

4. **a.** Calculer la valeur exacte des nombres $g(-1)$ et $g(0)$.
   b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.
   c. Donner l'arrondi au centième de α.
5. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4.
6. **a.** Compléter le tableau de valeurs de g qui se trouve sur la feuille annexe à rendre avec la copie.
   On arrondira les valeurs à l'unité.
   b. Tracer la droite Δ, la droite $\mathscr{D}$, puis la courbe $\mathscr{C}$, dans le repère figurant sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

Partie C : Calcul d'aire

1. Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = (-2x-3)\mathrm{e}^{4-x} - 9x$$

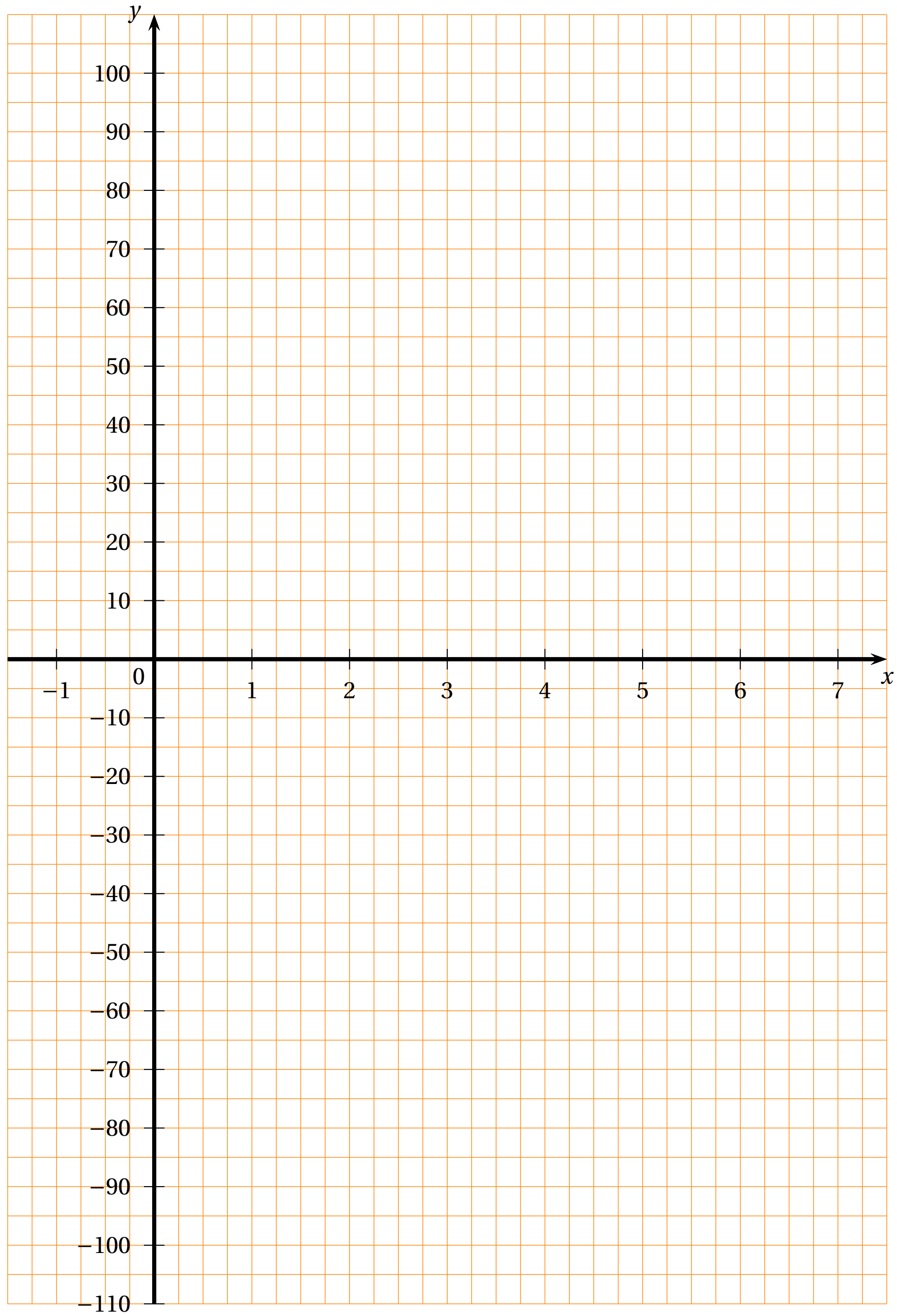
   est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.
2. **a.** Hachurer la partie $\mathscr{H}$ du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.
   b. Calculer en unités d'aire la mesure exacte de l'aire de la partie $\mathscr{H}$ du plan.
   c. En déduire en cm^2 la valeur arrondie au centième de l'aire de de $\mathscr{H}$.
   On rappelle que les unités graphiques sont : 2 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnée.

Annexe du problème à rendre avec la copie

Tableau des valeurs de la fonction g (valeurs arrondies à l'unité)

x	$-0,75$	$-0,5$	$-0,25$	0	0,5	1	2	3	4	5	6
$g(x)$											

Repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour 1 unité en abscisse et 1 cm pour 10 unités en ordonnée



∽ Baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie novembre 2009 ∾
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **4 points**

Le nombre i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Partie I

Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

Partie II

Le plan complexe est muni du repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$d'unité graphique 1 cm.
Soit A le point d'affixe $z_\text{A} = 3 + \text{i}\sqrt{3}$.

1. Déterminer le module et un argument de z_A. Placer le point A dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
2. Soit R la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \left(\text{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)z$.
   - **a.** Quelle est cette transformation R ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   - **b.** On appelle B l'image du point A par la transformation R. On note z_B l'affixe du point B. Calculer la forme algébrique de z_B. Placer le point B dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
   - **c.** Quelle est la nature du triangle OAB ? Justifier la réponse.
3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{w}} = -2\sqrt{3}\text{i}$.
   - **a.** On appelle C l'image du point A par la transformation T. On note z_C l'affixe du point C. Calculer la forme algébrique de z_C. Placer le point C dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
   - **b.** *Dans cette question, toute rédaction, même partielle, sera prise en compte.*
     Quelle est la nature du quadrilatère OCAB ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 4y = 0.$$

   où y est une fonction de la variable x, deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie : $f(0) = \dfrac{1}{4}$ et $f'(0) = 0$.
3. Montrer que la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $g(x) = 3\sin x$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
4. Pour tout nombre réel x, on définit la fonction h par :

$$h(x) = 3\sin x + \frac{1}{4}\cos 2x.$$

   Calculer $h'(x)$ pour tout nombre réel x.

5. Questionnaire à choix multiples :
pour chaque question, il y a une seule réponse exacte; recopier la réponse exacte sur la copie. Chaque réponse exacte rapporte 0,5 *point. Aucune justification n'est demandée.*

a. Quelle est la valeur de $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

$\triangleright$ 3 $\triangleright$ $-\frac{1}{4}$ $\triangleright$ $\frac{11}{4}$

b. Quelle est la valeur moyenne de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$?

$\triangleright$ $-\frac{3}{\pi}$ $\triangleright$ 0 $\triangleright$ $\frac{6}{\pi}$

c. Combien l'équation $h(x) = 0$ admet-elle de solutions dans l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$?

$\triangleright$ 0 $\triangleright$ 1 $\triangleright$ 2

PROBLÈME **11 points**

Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}$ tracée sur l'annexe ci-jointe est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en O et au point A de coordonnées $\left(\frac{3}{2}\ ;\ 0\right)$.
On admet que les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses $\frac{1}{2}$ et 3 sont parallèles à l'axe des abscisses.
La droite Δ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point O et passe par le point B de coordonnées $(-1\ ;\ 3)$.

Partie I Exploitation graphique de la courbe $\mathscr{C}$

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{7}{2}\right]$.

2. Donner le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{7}{2}\right]$.

3. Donner les valeurs $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'(3)$.

4. Donner une équation de la tangente Δ. En déduire $f'(0)$.

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{7}{2}\right]$.

Partie II Étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \left(2x^2 - 3x\right)\text{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Justifier la réponse.

2. Justifier que pour tout nombre réel x, $f(x) = \frac{2x^2}{\text{e}^x} - \frac{3x}{\text{e}^x}$ puis déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

3. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ puis montrer que $f'(x) = \left(-2x^2 + 7x - 3\right) \text{e}^{-x}$.

4. Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

Partie III Calcul d'aire

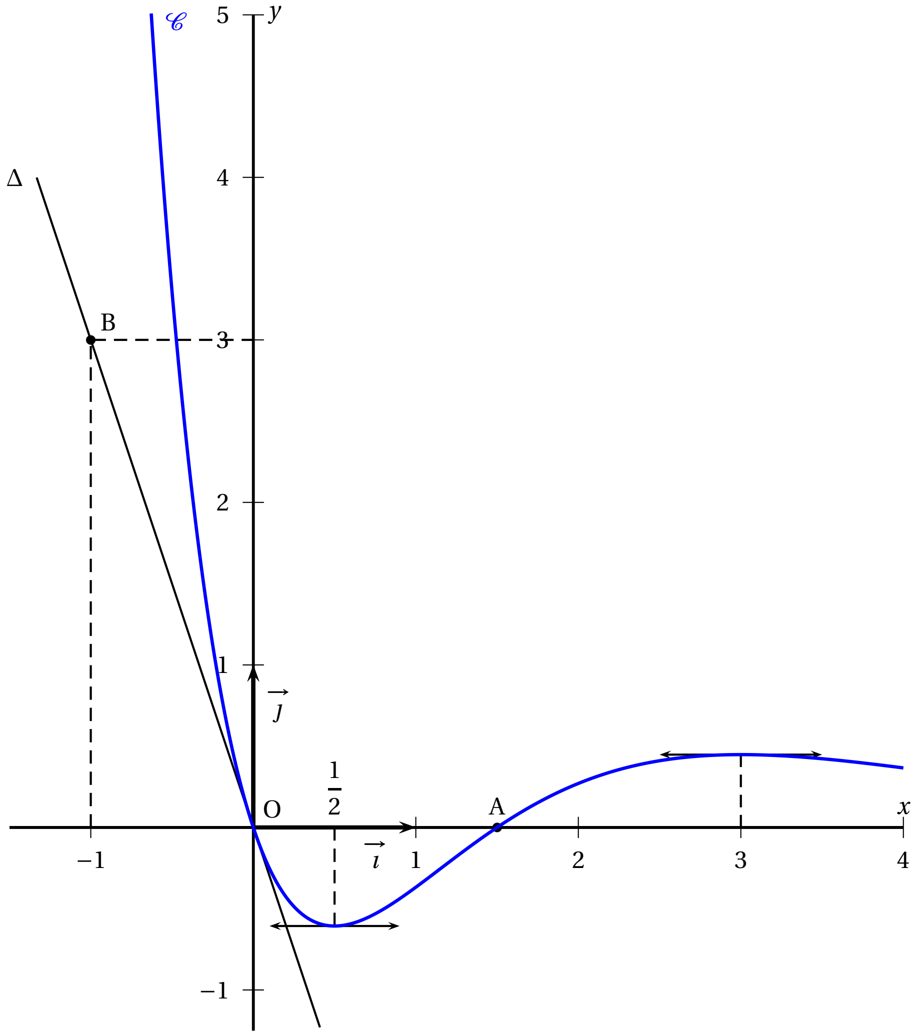
1. Calculer $f(2)$. Montrer que la fonction f est positive sur l'intervalle $[2\,;\,3]$.

2. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(-2x^2 - x - 1\right) \text{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

3. Soit $\mathscr{D}$ le domaine du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

a. Sur l'annexe, hachurer le domaine $\mathscr{D}$.

b. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathscr{D}$, puis donner une valeur approchée au centième de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.



$\mathscr{C}$
y
5
4
3
2
1
-1
Δ
B
$\overrightarrow{\jmath}$
O
$\frac{1}{2}$
A
x
$\overrightarrow{\imath}$
-1
1
2
3
4

∽ Baccalauréat STI Antilles–Guyane juin 2009 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **4 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Le plan complexe est muni du repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante (E) :

$$(E)\quad :\quad (z-2)\left(\text{i}z+\text{i}+\sqrt{3}\right)=0.$$

   On donnera la forme algébrique des solutions.

2. Les points A et B ont pour affixes respectives : $z_{\text{A}}=2,~z_{\text{B}}=-1+\sqrt{3}\text{i}$.
   a. Calculer le module et un argument de z_{A}.
   b. Déterminer la forme trigonométrique de z_{B}.
   c. Expliquer pourquoi les points A et B sont sur le même cercle Ω de centre O et de rayon 2,
   d. On considère le point C d'affixe $z_{\text{C}}=-1+\lambda\text{i}$ où λ est un nombre réel négatif.
   Déterminer le nombre λ tel que le point C soit sur le cercle Ω.
   Que représente le nombre complexe z_{C} par rapport au nombre complexe z_{B} ?
   e. Sur la feuille annexe 1, placer avec soin les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
   (On laissera apparents les traits de construction à la règle et au compas. Ces traits seront pris en compte dans l'évaluation de la question.)
   f. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

EXERCICE 2 **5 points**

Un objet produit en série a un coût de production de 95 euros.
Un objet défectueux à l'issue de sa fabrication peut présenter seulement le défaut A, seulement le défaut B, ou les deux défauts A et B simultanément.
La garantie permet d'effectuer les réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants :

— 10 euros pour le seul défaut A,
— 15 euros pour le seul défaut B,
— 25 euros pour les deux défauts A et B.

1. Sur un lot L de 200 objets prélevés sur l'ensemble de la production, on constate que 16 objets ont au moins le défaut A, 12 objets ont au moins le défaut B et 180 objets n'ont aucun des deux défauts.
   a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

Nombre d'objets du lot L	Avec le défaut A	Sans le défaut A	Total
Avec le défaut B			
Sans le défaut B			
Total			

b. On prélève au hasard un objet parmi les 200 objets du lot L, décrits précédemment.
Calculer la probabilité p_1 que cet objet ne présente aucun défaut. On donnera la valeur décimale de p_1.

c. On prélève au hasard un objet parmi les 200 objets du lot L, décrits précédemment.
Calculer la probabilité p_2 que cet objet présente seulement le défaut A. On donnera la valeur décimale de p_2.

2. *Pour la suite de l'exercice. on admettra que, sur l'ensemble de la production,* 90 % *des objets n'ont aucun défaut,* 4 % *des objets ont le seul défaut A.* 2 % *des objets ont le seul défaut B et* 4 % *des objets ont les deux défauts A et B.*

On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard sur l'ensemble de la production, associe son prix de revient, c'est-à-dire le coût de production augmenté éventuellement du coût de réparation.

a. Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. (On pourra présenter cette loi sous la forme d'un tableau,)

c. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$ de cette variable aléatoire X. Que représente-t-elle pour l'usine ?
On admet pour la suite de l'exercice que tous les objets produits sont vendus.

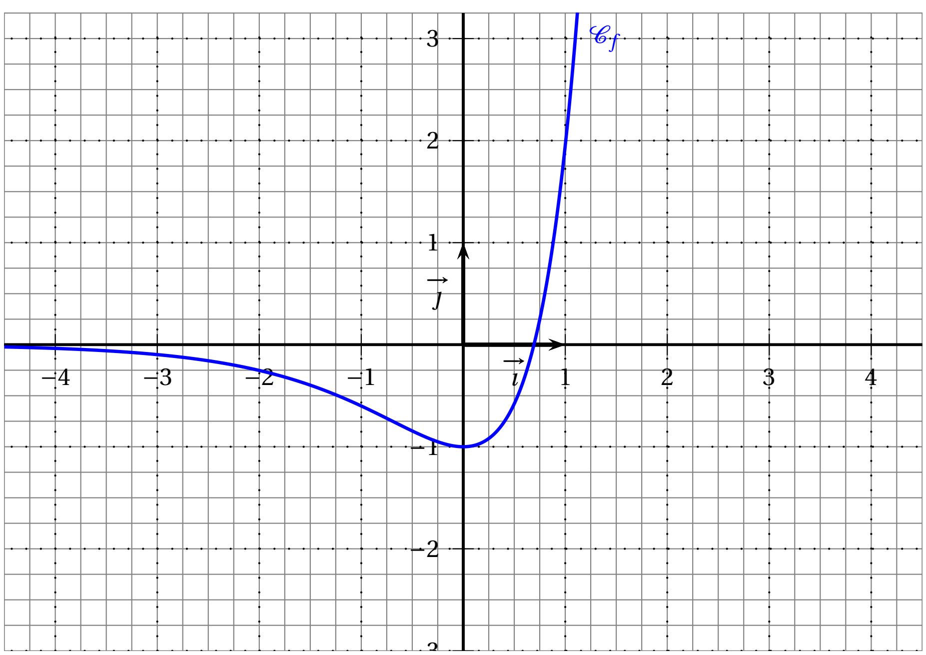
d. L'usine peut-elle espérer faire des bénéfices en vendant 96 euros chaque objet produit ?

e. L'usine veut faire un bénéfice moyen de 10 euros par objet.
Expliquer comment on doit alors choisir le prix de vente d'un objet produit.

PROBLÈME **11 points**

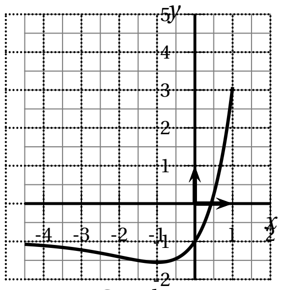
Partie A

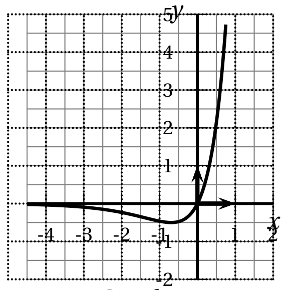
f est une fonction définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
La courbe représentative de cette fonction f, notée $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

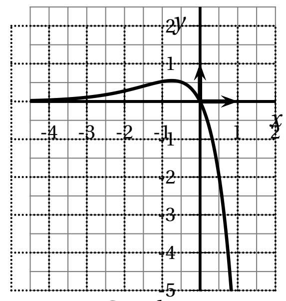


Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Parmi les trois courbes données ci-dessous se trouve la représentation graphique de la fonction f', où f' désigne la fonction dérivée de f. Indiquez de quelle courbe il s'agit en justifiant votre choix.


Courbe 1


Courbe 2


Courbe 3

2. La fonction f est définie par

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} - 2\mathrm{e}^{x}, \text{ où } \alpha \text{ est un nombre réel.}$$

Sachant que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $(0\ ;\ -1)$ est horizontale, déterminer le nombre α. On détaillera le raisonnement et les calculs.

Partie B

La fonction f est la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x}.$$

La fonction f' est la fonction dérivée de la fonction f.

1. Déterminer, en justifiant par des calculs, la limite de $f(x)$ en $+\infty$ (on pourra factoriser par e^{x}).
2. Déterminer, en justifiant par des calculs, la limite de $f(x)$ en $-\infty$. Interpréter graphiquement.
3. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f'(x) = 2\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.
   Dresser le tableau de variations complet de la fonction f (on justifiera soigneusement le signe de $f'(x)$).

Partie C

Soit g la fonction définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{x} + 4.$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

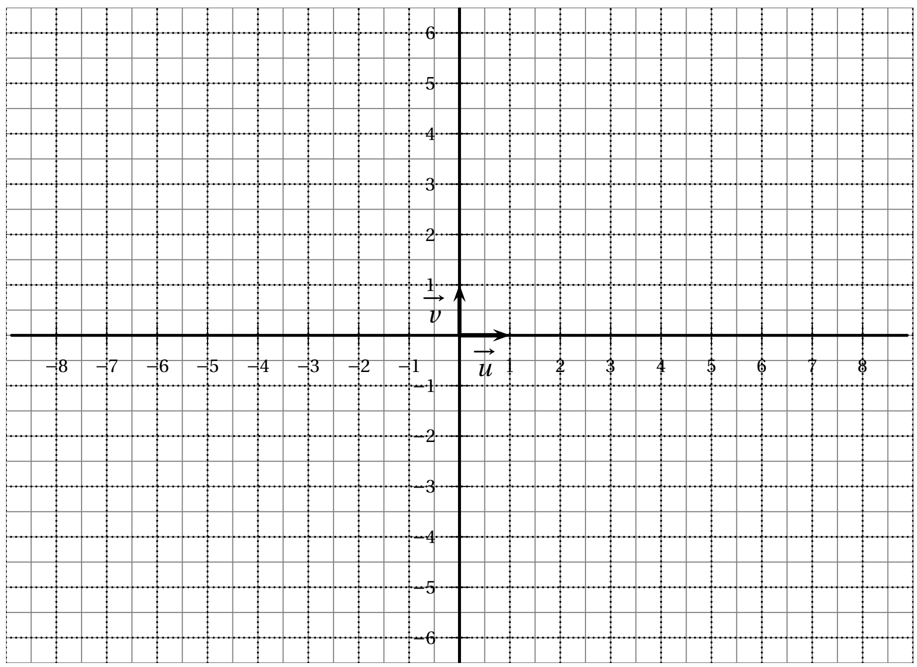
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $X^2 - 3X - 4 = 0$.
2. En déduire les coordonnées du (ou des) points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données en annexe 2, dans le même repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan. L'unité est 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

   On note S le domaine du plan délimité par la droite d'équation $x = 0$, la droite d'équation $x = 1$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.

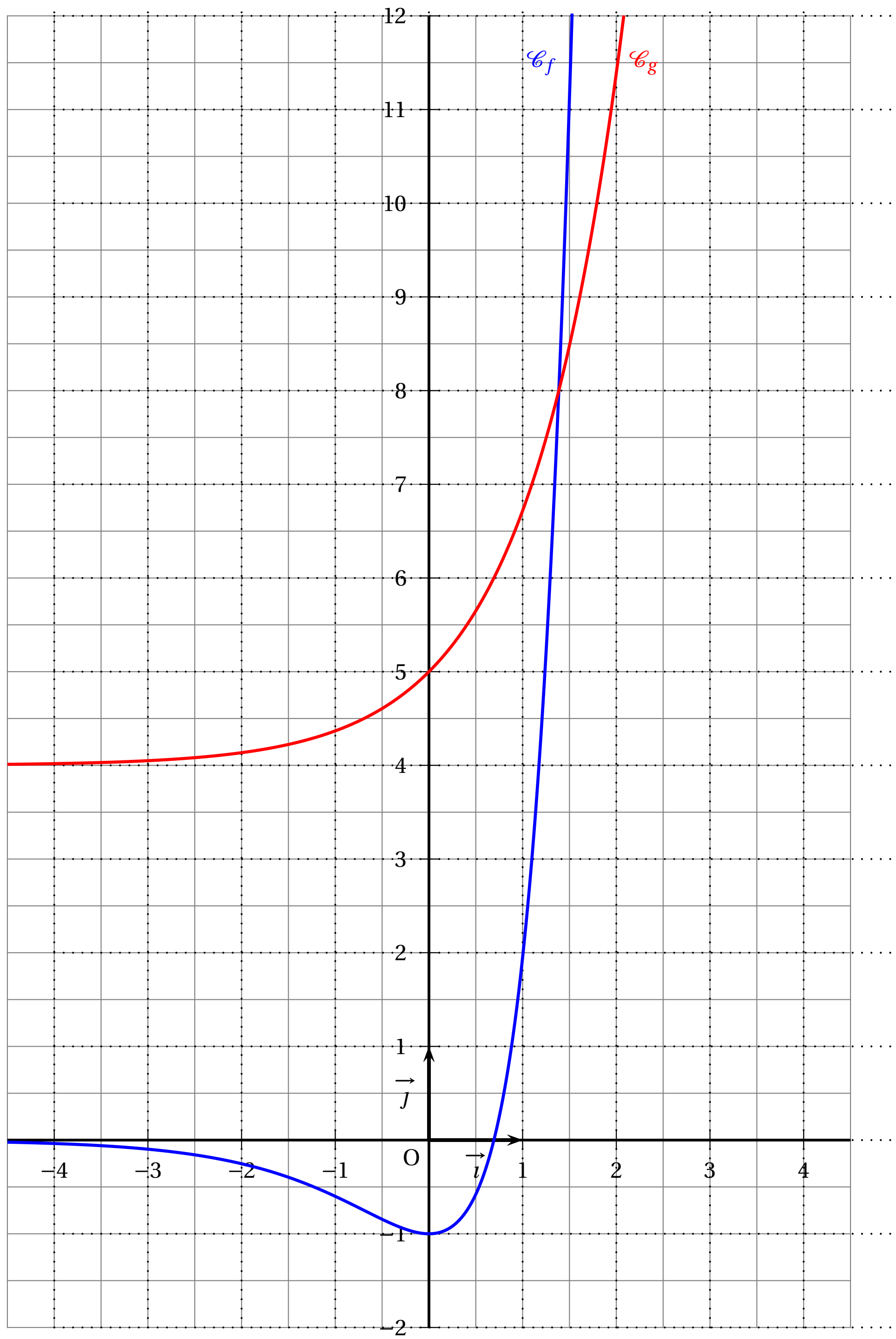
a. Hachurer sur la feuille **annexe 2** le domaine S.

b. Calculer, en unités d'aire puis en cm^2, la mesure de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine S.

Annexe 1 (à rendre avec la copie)



Annexe 2 (à rendre avec la copie)



∽ Baccalauréat STI France 23 juin 2009 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$4y'' + y = 0, \qquad \text{(E)}$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et ou y'' désigne sa dérivée seconde.

2. Le but de cette question est de trouver la solution particulière de (E), appelée f, dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est fournie en annexe. On note f' la fonction dérivée de f.
   - **a.** La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0\,;\,1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$. En déduire les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
   - **b.** Montrer que la solution particulière f de l'équation (E) est définie sur $\mathbb{R}$ par :

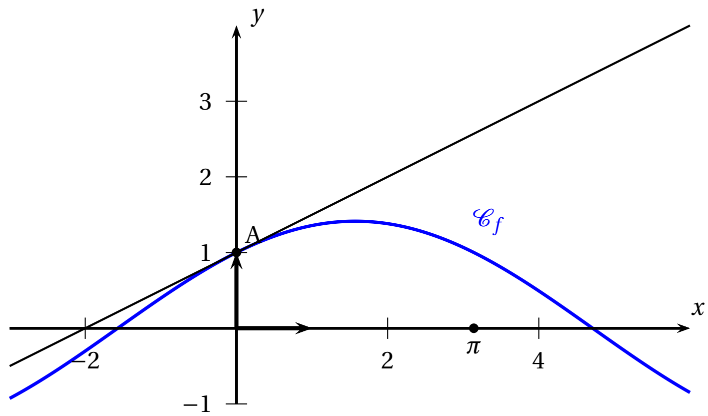
$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

3. Soit D le domaine du plan délimité par :
— l'axe des abscisses ;
— l'axe des ordonnées ;
— la droite d'équation $x = \pi$,
— la courbe $\mathscr{C}_f$.
Hachurer le domaine D sur la feuille annexe.

4. Montrer que $[f(x)]^2 = 1 + \sin(x)$.

5. On considère le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses.
Calculer la valeur exacte, en unité de volume, du volume V de ce solide.
On rappelle que $V = \pi \displaystyle\int_0^{\pi} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Annexe de l'exercice 1 à rendre avec la copie



EXERCICE 2 — 5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
On désigne par i le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$(z+4)\left(z^2-4z+16\right)=0.$$

2. On considère les nombres complexes définis par :

$$z_A=2+2\text{i}\sqrt{3} \qquad z_B=2-2\text{i}\sqrt{3} \qquad z_c=-4.$$

Calculer le module et un argument de z_A.
En prenant comme unité graphique 1 cm, placer dans le plan complexe (en utilisant une feuille de papier millimétré) le point A d'affixe z_A, le point B d'affixe z_B et le point C d'affixe z_C.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   a. Démontrer que les points A, B, C appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   b. Placer le point D milieu du segment $[AC]$.
   c. Déterminer la nature du triangle BDA.

PROBLÈME — 10 points

Soit la fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression

$$f(x)=\text{e}^x-\frac{5}{2}+\frac{1}{\text{e}^x}.$$

On note f' sa fonction dérivée.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x + 1)}{\mathrm{e}^x}.$$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   c. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 5X + 2 = 0$ d'inconnue X.

   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $2(\mathrm{e}^x)^2 - 5\mathrm{e}^x + 2 = 0$.

   c. En utilisant la question a., résoudre l'équation $2(\mathrm{e}^x)^2 - 5\mathrm{e}^x + 2 = 0$.

   d. Quelles sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses ?

   e. En utilisant les résultats des questions 2. c. et 3. d. déterminer le signe de $f(x)$sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse ln(2).
5. En utilisant une feuille de papier millimétré, tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{T}$: unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.
6. Soit la fonction F, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression $F(x) = \mathrm{e}^x - \frac{5}{2}x - \frac{1}{\mathrm{e}^x}$.

   a. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_{\ln(2)}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   c. Hachurer sur le graphique la partie du plan dont l'intégrale l donne la valeur de l'aire A en unité d'aire.

   d. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de l'aire A de la partie hachurée, exprimée en cm². On donnera ensuite une valeur approchée de A à 0,1 cm² près.

∽ Baccalauréat STI Antilles–Guyane septembre 2009 ∾
Génie des matériaux, mécanique B, C, D, E

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. Toutes les constructions demandées seront à faire sur le même graphique.
Soit A le point d'affixe $z_A = -5i$.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 25 = 0$.
   On note z_B la solution de cette équation dont la partie imaginaire est positive.
   b. Placer dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B.
2. **a.** Montrer que les points A et B appartiennent à un même cercle (C) de centre O.
   b. Construire le cercle (C).

   Dans la suite de l'exercice, on note I, J et K les points d'affixes respectives z_I, z_J et z_K telles que :
   - $z_I = 1 + i\sqrt{3}$,
   - z_J est le nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{5\pi}{6}$,
   - $z_K = -z_J$.
3. **a.** Déterminer la forme algébrique de z_J.
   b. Comparer les modules des nombres z_I, z_J et z_K.
4. **Pour la question 4., toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.**
   a. Placer avec soin les points I, J et K et tracer le cercle $\left(C'\right)$ circonscrit au triangle IJK dans le plan complexe **en laissant apparents les traits de construction**.
   Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifier cette réponse.
   b. Soit (E) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation : $2 < |z| < 5$.
   Représenter l'ensemble (E) sur le graphique précédent à l'aide de hachures, en expliquant la démarche mise en œuvre.

EXERCICE 2 **4 points**

Un bâtiment industriel est équipé d'une alarme qui se déclenche, en principe, lorsqu'il y a un dégât des eaux.
Il arrive cependant que ce système d'alarme soit mis en défaut.
On suppose qu'il ne peut pas y avoir plus d'un dégât des eaux par jour et qu'il ne peut pas y avoir plus d'un déclenchement d'alarme par jour.
Une étude portant sur 500 journées montre qu'il y a eu :

— 5 jours où il y a eu un dégât des eaux.
— 1 jour où il y a eu un dégât des eaux sans que l'alarme se déclenche.
— 10 jours où l'alarme s'est déclenchée sans qu'il y ait un dégât des eaux.

1. À l'aide des données de l'énoncé, recopier et compléter le tableau suivant.

	Nombre de jours où il y a un dégât des eaux	Nombre de jours où il n'y a pas de dégât des eaux	TOTAL
Nombre de jours où l'alarme se déclenche			
Nombre de jours où l'alarme ne se déclenche pas			
TOTAL			500

2. On choisit un jour au hasard parmi les 500 journées étudiées.
On considère les évènements suivants :
E : « Ce jour-là il y a un dégât des eaux »
A : « Ce jour-là l'alarme se déclenche »
Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

a. Calculer la probabilité $p(A)$ de l'évènement A.

b. Soit B l'évènement : « le système d'alarme est mis en défaut ».
Calculer la probabilité $p(B)$ de l'évènement B.

c. Sachant que ce jour-là, l'alarme s'est déclenchée, quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un dégât des eaux ?

3. On admet que les probabilités calculées au 2. restent valables si on choisit n'importe quel jour au hasard, quelle que soit sa date.
Pour une journée donnée, on peut se trouver dans l'une des quatre situations suivantes :

— il y a un dégât des eaux et l'alarme se déclenche,
— il y a un dégât des eaux et l'alarme ne se déclenche pas,
— l'alarme se déclenche sans qu'il y ait un dégât des eaux,
— rien ne se passe.

Les assureurs estiment les coûts suivants pour le bâtiment :

— 1 000 euros pour un dégât des eaux lorsque l'alarme fonctionne.
— 3 000 euros pour un dégât des eaux lorsque l'alarme ne fonctionne pas.
— 150 euros lorsque l'alarme se déclenche par erreur.

On note X la variable aléatoire représentant le coût journalier pour le bâtiment industriel.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Quel est le coût moyen journalier de cette assurance ?

PROBLÈME **11 points**

PARTIE A : étude graphique d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 5}.$$

On a représenté en annexe la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OI}},\ \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$ (avec OI = OJ = 2 cm).
La tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point B$(0\ ;\ -1)$ passe par le point M$(-1\ ;\ 0)$.

1. a. Montrer que pour tout réel x : $f(x) = \dfrac{2 - 4\mathrm{e}^{-x}}{1 - 4\mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{-2x}}$.
En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe $(\mathscr{C})$, et compléter le graphique en annexe.

b. Montrer que le point A(ln 2 ; 0) est un point de la courbe ($\mathscr{C}$).

2. Par lecture graphique, en justifiant :

a. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

b. Déterminer la valeur de $f'(0)$.

PARTIE B : étude d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 5\right).$$

Soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OI}},\ \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$.

1. Étudier la limite de la fonction F en $-\infty$.
Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe (Γ).

2. **a.** Montrer que pour tout réel x : $F(x) = 2x + \ln\left(1 - 4\mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{-2x}\right)$.

b. Calculer la limite de la fonction F en $+\infty$ et la limite de $F(x) - 2x$ en $+\infty$.

c. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe (Γ).

3. **a.** Démontrer que la fonction f est la fonction dérivée de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

b. Vérifier que $F(\ln 2) = 0$.

c. Déduire de la partie A le tableau de variations de la fonction F.

4. Reproduire et compléter le tableau suivant avec des valeurs approchées à 10^{-2} près :

x	-2	-1	0	0,5	1	2
$F(x)$						

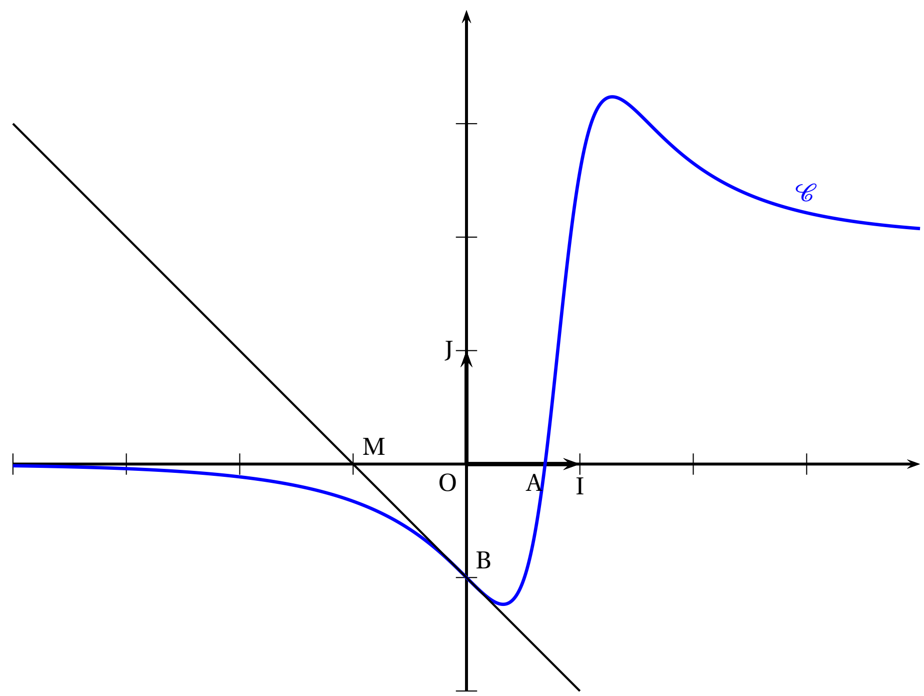
5. Tracer la courbe (Γ) dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OI}},\ \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$ en faisant apparaitre les interprétations graphiques des questions 1. et 2. c.

PARTIE C : calcul d'une aire

1. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\ln 2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. De quel domaine le calcul précédent permet-il de calculer l'aire ?
Hachurer sur le graphique de la feuille annexe ce domaine, et déterminer une valeur approchée de la mesure, en cm^2, de son aire (on exprimera la réponse à 0,01 cm^2 près).

ANNEXE à rendre avec la copie



∽ Baccalauréat STI Métropole septembre 2009 ∾
Génie des matériaux, mécanique

EXERCICE 1

1. Soit (E) l'équation différentielle : $y' + y = 0$, où y est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a. Résoudre l'équation (E).
   b. Montrer que la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ est la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
2. **a.** Calculer la valeur moyenne de f sur $[2\,;\,3]$.
   b. Déterminer, en fonction de n, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n\,;\,n+1]$.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right)\mathrm{e}^{-n}$, pour tout n entier positif ou nul.
   Quelle est la nature de cette suite ?

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ orthonormal direct.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$z^3 - 12z^2 + 48z = 0.$$

2. Soient A et B les points du plan d'affixes respectives z_{A} et z_{B} telles que
   $z_{\mathrm{A}} = 6 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{B}} = 6 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   a. En prenant comme unité graphique 1 cm, placer les points A et B dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
   (On utilisera une feuille de papier millimétré fournie avec le sujet)
   b. Calculer le module et un argument de z_{A}.
   c. Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.
   d. Soit Ω le point d'affixe 4. Démontrer que le points O, A et B se trouvent sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω dont on précisera le rayon en cm.

PROBLÈME

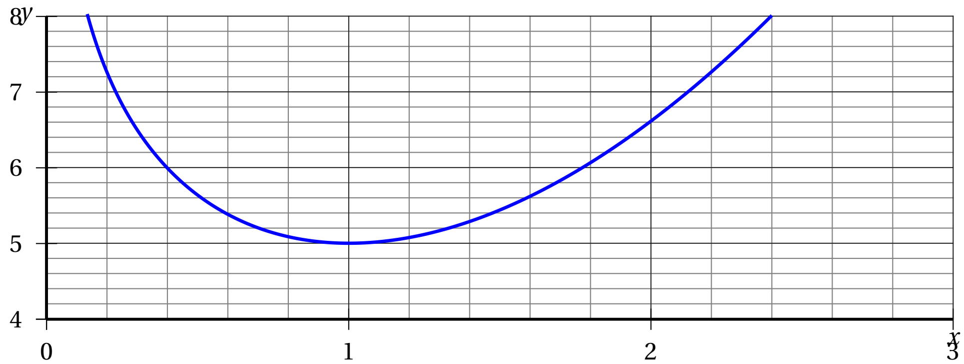
Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 - 2\ln(x) + 4$$

et dont la représentation graphique est donnée ci-après.

1. Soit g' la dérivée de g sur l'intervalle I. Montrer que $g'(x) = 2\dfrac{x^2-1}{x}$.
2. Dresser le tableau de variations de g sur I
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur I.



Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I, par

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{\ln(x) - 1}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Étudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   b. Étudier la limite de f en $+\infty$ en remarquant que $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$.

2. On note f' la dérivée de f.

   a. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

   b. En utilisant la partie A donner le signe de $f'(x)$. En déduire que la fonction f est croissante sur I.

   c. Calculer $f(1)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur I.

3. Construire sur une feuille de papier millimétré, la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ en prenant comme unité graphique 2 cm.

Partie C

On considère la fonction F, définie et dérivable sur l'intervalle I, d'expression :

$$F(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}[\ln(x) - 1]^2.$$

1. Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f définie à la partie B.
2. Dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = \text{e}$.
   Hachurer la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et délimitée par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.
3. Que représente le nombre $A = 4[F(\text{e}) - F(1)]$.
   Calculer la valeur exacte de A, puis sa valeur arrondie au centième .