∽ Baccalauréat STI 2010 ∽

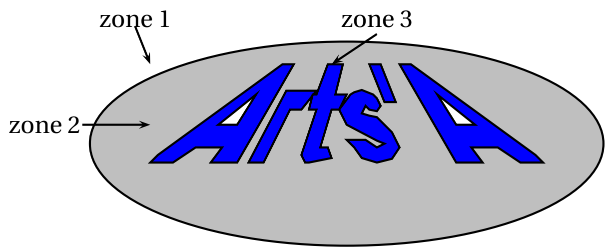
L'intégrale de mars à novembre 2010

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat STI Arts appliqués Antilles-Guyane juin 2010

EXERCICE 1 **8 points**

Un patron de PME souhaite un logo pour son entreprise. Celui qu'il a choisi est rectangulaire et une ellipse est inscrite dans le rectangle. Le nom de son entreprise sera placé à l'intérieur de l'ellipse.



Partie A Coloriage du logo

Ce logo délimite trois zones à colorier : Le fond rectangulaire (zone 1), l'intérieur de l'ellipse (zone 2) et le nom de l'entreprise composé de lettres d'une même couleur (zone 3). Pour colorier ces trois zones, on utilise deux ou trois des couleurs suivantes : le jaune, le noir et le rouge. Deux zones voisines doivent être de couleurs différentes : la zone 1 a donc une couleur différente de la zone 2 qui, elle-même, a une couleur différente de la zone 3.

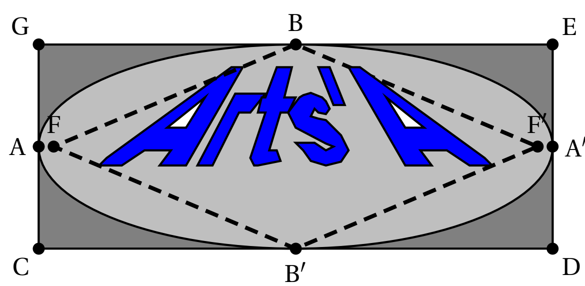
1. Montrer qu'il y a douze façons de colorier le logo.
   On pourra utiliser un arbre de dénombrement.
2. On choisit un des douze coloriages au hasard. En supposant l'équiprobabilité dans le choix des couleurs, déterminer la probabilité des événements suivants :

   A : « Le nom de l'entreprise est en rouge »
   B : « Le fond rectangulaire et le nom de l'entreprise sont de la même couleur »

   On donnera tous les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Partie B

L'ellipse de sommets A, A', B et B' et de foyers F et F' est inscrite dans le rectangle CDEG. La taille des lettres et leur position sont telles que le nom de l'entreprise « Arts' A » est entièrement contenu dans le losange $BFB'F'$qui a pour sommets B, B' et les deux foyers F et F' de l'ellipse.



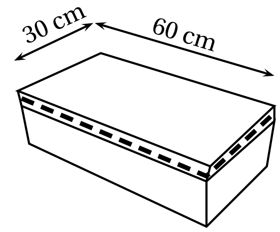
Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O, l'ellipse a pour équation cartésienne :

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$$

1. Déterminer les dimensions du rectangle CDEG ainsi que les coordonnées des foyers F et F'.
2. Calculer l'aire du losange (qui est la partie réservée à l'inscription du nom de l'entreprise) en unités d'aires.
   On rappelle que l'aire d'un losange dont les diagonales ont pour mesures respectives ℓ et L est égale à $\frac{\ell \times L}{2}$.

PROBLÈME **12 points**

Sur l'ensemble des 4 rebords rectangulaires d'un couvercle de boîte ayant 60 cm de long, 30 cm de large et 3 cm de haut, on veut peindre une frise continue par juxtaposition d'un même motif.



Les parties A et B ont pour objet la construction du motif de cette frise et la partie C porte sur le calcul de l'aire de la frise à peindre.

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = 0,5x^2 - 2\mathrm{e}^x + 3.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unités graphiques 5 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

1. Calculer la dérivée $f'(x)$. Étudier son signe et donner le tableau des variations de f.
2. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

PARTIE B

On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$g(x) = 4x - 2\mathrm{e}^x + 5.$$

Soit (Γ) sa représentation graphique dans le repère orthogonal défini à la partie A.

1. **a.** Calculer $g'(x)$ où g', est la fonction dérivée de g.
   b. Résoudre l'équation $g'(x) = 0$.
   c. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et en déduire le tableau des variations de g. On donnera la valeur exacte du maximum de g.
2. **a.** Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous (arrondir au centième).

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$g(x)$						

   b. Tracer (Γ) dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

PARTIE C

1. On admet que l'aire de la partie P_1 du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C})$, (Γ) et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à : $\displaystyle\int_0^1 [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$ (en unités d'aire).
2. Colorier P_1 sur le dessin et, en utilisant les parties A et B, donner la valeur exacte de son aire en cm^2 puis une valeur approchée au mm^2 près.
3. Dessiner la partie P_2 du plan, symétrique de P_1 par rapport à la droite d'équation $x = 1$. Le motif de la frise est la réunion de P_1 et P_2.
   Donner une valeur approchée en cm^2, arrondie à 10^{-1}, de l'aire de ce motif.
4. Donner une valeur approchée en cm^2, arrondie au cm^2, de l'aire de la frise à réaliser sur le couvercle de la boîte.

∽ Baccalauréat STI Arts appliqués – Métropole–La Réunion ∾
21 juin 2010

EXERCICE 1 **8 points**

Partie A

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine O, on considère l'ellipse (E) d'équation :

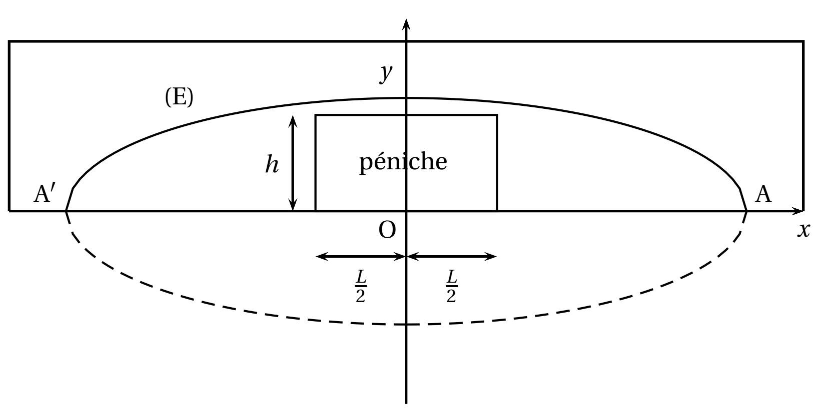
$$x^2 + 9y^2 = 900.$$

1. Déterminer les coordonnées de ses sommets A, A′, B, B′ (A et A′ étant les sommets situés sur le grand axe de l'ellipse).
2. Dans le repère joint en annexe 1, les quatre points marqués. D, G, H, K sont des points de (E). Construire (E) dans ce repère.
3. Tracer dans ce repère la droite d'équation $y = 9$. Elle coupe l'ellipse (E) en deux points C et C′.
   a. Lire les abscisses de ces points, avec la précision permise par le dessin.
   b. Résoudre l'équation : $x^2 + 9^3 = 900$.
   En déduire les valeurs exactes des abscisses des points C et C′.
4. Tracer la droite d'équation $x = 8$. Elle coupe l'ellipse (E) en deux points J et J′.
   a. Lire les ordonnées de ces points, avec la précision permise par le dessin.
   b. Résoudre l'équation : $8^2 + 9y^2 = 900$.
   En déduire les valeurs exactes des ordonnées des points J et J′.

Partie B

L'ellipse (E) définie dans la partie A est la réunion de deux demi-ellipses. La demi-ellipse située au dessus de l'axe des abscisses représente une arche de pont au dessus d'une rivière (unité graphique du repère de l'annexe 1 : 1 carreau pour 1 m). Le segment [AA′] représente la surface de l'eau.

1. Donner en mètres, la largeur AA′ de la rivière et la hauteur OB sous le pont.
2. Une péniche de section rectangulaire, de largeur L et de hauteur h doit passer sous cette arche. (Voir schéma ci-dessous).
   a. Si la péniche fait 9 m de haut. quelle peut être sa largeur maximale à 0,1 m près ?
   b. Si la péniche fait 16 m de large. quelle peut être sa hauteur maximale à 0,1 m près ?



EXERCICE 2 **12 points**

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \ln(x+2).$$

1. Soit f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$; étudier son signe et en déduire les variations de f.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Recopier et compléter le tableau suivant puis tracer la courbe $(\mathscr{C})$ représentant la fonction f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm. Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies au dixième.

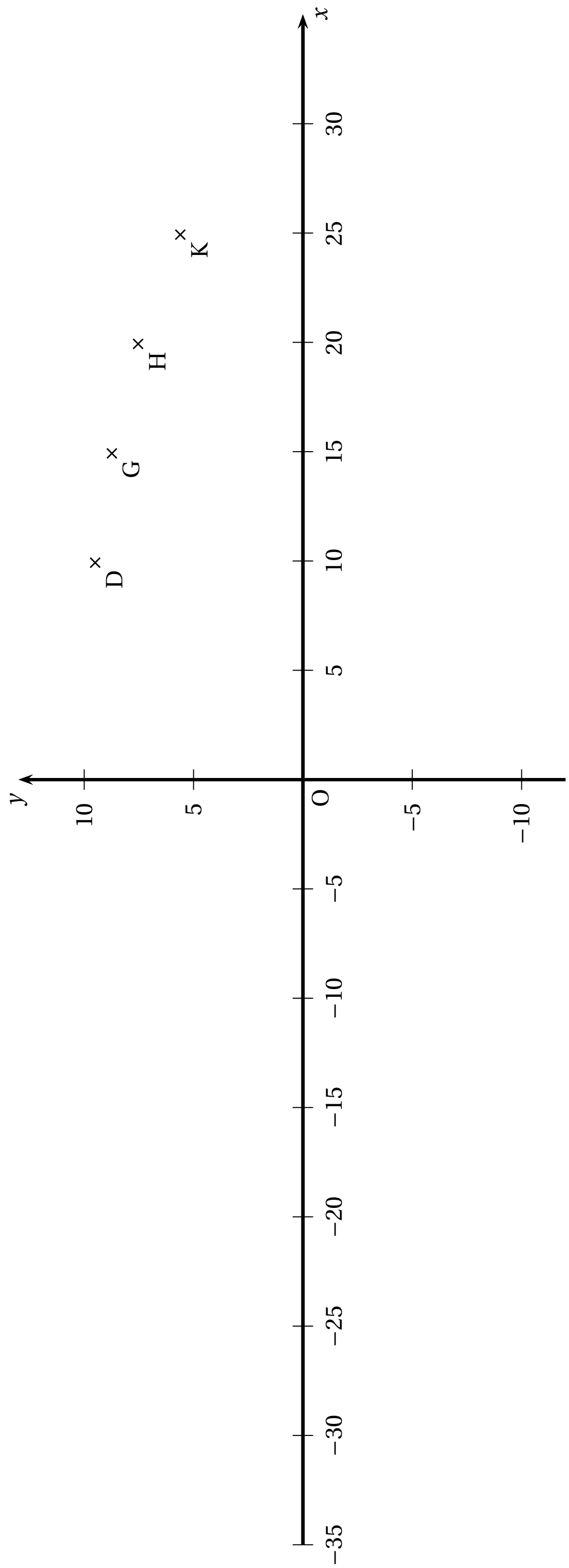
x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$						

4. On considère la fonction g définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = (x+2)\ln(x+2).$$

   Vérifier que g est une primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.
5. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine plan délimité par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 5$.
   En déduire une valeur approchée de cette aire en cm^2 à 1 mm^2 près.
6. Ce domaine représente à l'échelle $\dfrac{1}{40}$ l'un des deux battants d'un portail.
   Quelle est l'aire totale de ce portail en m^2 à 1 cm^2 près ?

Annexe à l'exercice 1



Baccalauréat STI Arts appliqués – Métropole septembre 2010

EXERCICE **8 points**

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples. Pour chaque question, une seule des affirmations proposées est exacte. On indiquera pour chaque question la réponse correcte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse correcte rapporte un point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$ et P la parabole représentant la fonction f dans un repère orthogonal.

a. Si $f(x) = 0$, alors $x = 1,5$;

b. P a pour sommet le point S de coordonnées $\left(\dfrac{5}{4}\ ;\ \dfrac{5}{40}\right)$

c. Pour tout x réel, $f(x) = (x-1)(2x-3)$;

d. $f(-1) = 6$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+1}$ et f' la dérivée de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Alors, pour tout réel x positif ou nul :

a. $f'(x) = -\dfrac{7}{(3x+1)^2}$; **b.** $f'(x) = \dfrac{11}{(3x+1)^2}$; **c.** $f'(x) = \dfrac{2}{3}$; **d.** $f'(x) = \dfrac{11}{3x+1}$

3. Une solution de l'équation $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 2 = 0$ est :

a. -1 ; **b.** 0 ; **c.** e^2 ; **d.** $\ln(2)$

4. Pour tout x réel, $\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^{-1+x}}$ est égal à :

a. 1 ; **b.** e^2 ; **c.** $\mathrm{e}^{x+1} \times \mathrm{e}^{-(x+1)}$; **d.** e^{2x}

5. Soit F et F$'$ deux points distincts du plan. Alors l'ensemble des points M du plan tels que $\left|M\mathrm{F} - M\mathrm{F}'\right| = 8$ est :

a. l'ensemble vide ; **b.** une hyperbole ; **c.** une ellipse ; **d.** un cercle.

6. Dans un plan rapporté à un repère orthonormal, on considère l'ellipse E d'équation cartésienne $x^2 + 2y^2 = 16$. On appelle F et F$'$ les deux foyers de E. Alors :

a. un de ses sommets a pour coordonnées $(0\ ;\ 4)$;

b. $\mathrm{FF}' = 8$;

c. un des foyers a pour coordonnées $\left(0\ ;\ 2\sqrt{2}\right)$;

d. Pour tout point M de E : $M\mathrm{F} + M\mathrm{F}' = 8$.

7. Dans une classe de 40 élèves, on sait que 10 élèves écoutent uniquement du rap, que 17 élèves écoutent uniquement de la techno et que 4 élèves écoutent à la fois du rap et de la techno. On interroge un élève au hasard. La probabilité qu'il n'écoute ni rap ni techno est :

a. $\dfrac{13}{40}$; **b.** $\dfrac{9}{40}$; **c.** $\dfrac{14}{40}$; $\dfrac{1}{10}$.

8. Une urne contient trois boules bleues et deux boules vertes.

   On tire au hasard une boule que l'on remet dans l'urne après avoir noté sa couleur, puis on tire une deuxième boule au hasard. La probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est :

   a. $\dfrac{12}{5}$; **b.** $\dfrac{12}{25}$; **c.** $\dfrac{6}{25}$; $\dfrac{1}{5}$.

PROBLÈME **12 points**

Première partie

La courbe ($\mathscr{C}$) donnée en annexe est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1 ; 3]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O.
On désigne par f' la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 3]$.
La courbe ($\mathscr{C}$) passe par les points A, B et D d'abscisses respectives 1, 2 et 3. Les points A, A$'$, B$'$ et D$'$ ont des coordonnées entières.
La droite (BE), parallèle à l'axe des abscisses, est tangente en B à la courbe ($\mathscr{C}$). La droite (AB') est tangente en A à la courbe ($\mathscr{C}$). On répondra aux questions ci-dessous par une lecture graphique. De ce fait, certains résultats seront donnés en valeurs approchées à 0,1 près.

1. Déterminer $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$.
2. **a.** Déterminer une équation de la droite (AB').

   b. Déterminer $f'(1)$ et $f'(2)$.
3. Dresser le tableau des variations de la fonction f et préciser le signe de sa dérivée f'.
4. Calculer l'aire du triangle AA$'$B$'$ en unités d'aires.

Deuxième partie

La fonction représentée dans la première partie est définie sur l'intervalle $[1 ; 3]$ par :

$$f(x) = x - 2\ln(x).$$

1. Vérifier que $f(3) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^3}{9}\right)$.
2. Soit F la fonction définie sur $[1 ; 3]$ par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 2x\ln x.$$

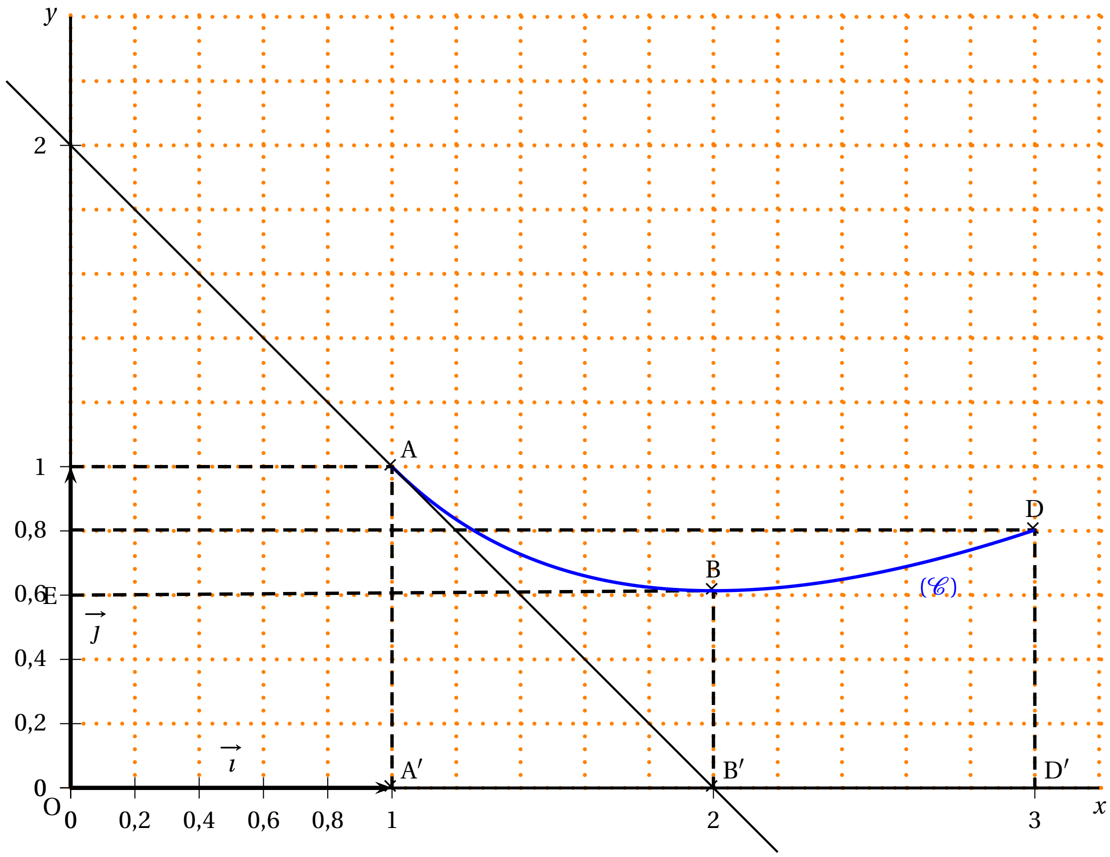
   a. Vérifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $[1 ; 3]$.

   b. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ et en donner une interprétation graphique.
3. Soit ($\mathscr{P}$) la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses, la droite (AB$'$) et la droite (DD$'$).

   a. Hachurer ($\mathscr{P}$).

   b. Le domaine ($\mathscr{P}$) représente la maquette du logo d'une société. Une unité sur le graphique représente 10 cm en réalité.
   Calculer l'aire en cm^2 de ce logo en grandeur réelle, arrondie au cm^2.

Annexe au problème



Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Antilles–Guyane ∾ juin 2010

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z suivantes :
   a. $z^2 = -1$;
   b. $z^2 - 4z + 13 = 0$;
   c. $z - 3i = -2iz + 4$.
2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_A = i,\ z_B = 2 + 3i \quad \text{et} \quad z_C = \frac{4+3i}{1+2i}.$$

   a. Placer les points A et B dans le repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   b. Calculer la distance AB.
   c. Montrer que $z_C = 2 - i$.
3. **a.** Calculer le module et un argument de $z_C - z_A$.
   b. En déduire l'écriture exponentielle de $z_C - z_A$.
   c. Déterminer géométriquement l'ensemble E des points M d'affixe z du plan qui vérifient $|z - z_A| = 2\sqrt{2}$.
   d. Justifier que les points B et C appartiennent à l'ensemble E puis tracer cet ensemble dans le plan.

EXERCICE 2 **5 points**

Un concessionnaire propose à ses clients, au moment d'acheter un véhicule neuf, d'équiper celui-ci avec des options :
— La peinture métallique (option A) pour un coût de 500 euros
— La climatisation (option B) pour un coût de 1 000 euros
— Un système GPS embarqué (option C) pour un coût de 1 500 euros
Le client est libre de choisir zéro, une ou plusieurs options parmi les trois proposées.

1. Déterminer le nombre de combinaisons d'options qu'il est possible de faire.
2. N'ayant aucune information sur le choix des clients, le concessionnaire suppose les combinaisons d'options équiprobables.
   a. Calculer la probabilité qu'un client équipe son véhicule en choisissant au moins une option.

b. Calculer la probabilité qu'un client équipe son véhicule en choisissant au moins l'option B.

3. On note X la variable aléatoire associée au coût total (en euros) des options que peut choisir un client qui achète un véhicule chez ce concessionnaire.

a. Recopier puis compléter le tableau suivant :

k	0	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000
$p(X=k)$							

b. Calculer la probabilité qu'un client achète pour plus de 1 500 euros d'options.

c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X, qui représente le coût moyen (en euros) d'une combinaison d'options pour un véhicule.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Le concessionnaire propose la promotion : « l'option C au prix de l'option B ».
Calculer le pourcentage de baisse de son chiffre d'affaire moyen sur la vente des combinaisons d'options pour un véhicule.
(Comme à la question 2., on supposera les combinaisons d'options équiprobables.)

PROBLÈME **10 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} + 2x.$$

1. Soit h la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = 1 - \ln x + 2x^2.$$

a. On note h' la fonction dérivée de h.
Montrer que $h'(x) = \dfrac{4x^2-1}{x}$ puis déterminer le signe de $h'(x)$ pour x dans $]0~;~+\infty[$.

b. Calculer $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$ puis dresser le tableau de variations de h.
On ne déterminera pas les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

c. En déduire le signe de $h(x)$ pour x dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. a. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0 x>0} f(x)$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ puis dresser le tableau de variations de f.

3. a. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.

b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.

4. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$, et les droites $\mathscr{T}$ et Δ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

6. Soit G la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $G(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

a. Démontrer que G est une primitive de la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

b. Hachurer la partie du plan délimitée par les droites d'équation $x = 1$,
$x = \text{e}$, la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.

c. Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de cette partie hachurée.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie mécanique, civil Métropole ∽ 22 juin 2010

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

En 2008, les ateliers Ouest et Est d'une même entreprise produisent respectivement 1 100 et 900 pièces d'un unique modèle chaque jour.
On estime que 2 % de la production de l'atelier Ouest est défectueuse ainsi que 3 % de la production de l'atelier Est.

1. Compléter sur l'annexe à rendre avec la copie, le tableau suivant :

	Pièces défectueuses	Pièces non défectueuses	Total
Ouest	22		
Est			
Total			2 000

2. On prélève, au hasard, une pièce dans la production totale. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.
   a. On définit les évènements suivants :
   — E : « la pièce prélevée est produite dans l'atelier Est »,
   — D : « la pièce prélevée est défectueuse ».
   On note $p(E)$ la probabilité de l'évènement E.
   Calculer $p(E)$, $p(D)$, $p(E \cap D)$ puis $p(E \cup D)$.
   b. On a prélevé au hasard une pièce dans la production de l'entreprise. Elle est défectueuse.
   Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'atelier Ouest.

Partie B

En 2009, la production journalière est la suivante :

	Pièces défectueuses	Pièces non défectueuses	Total
Ouest	20	980	1 000
Est	24	776	800
Total	44	1 756	1 800

Chaque pièce coûte 7 € à produire et est testée.
La réparation d'une pièce défectueuse produite dans l'atelier Ouest coûte 3 € et celle d'une pièce défectueuse produite dans l'atelier Est 5 €.
Chaque pièce est ensuite vendue 10 €. Ainsi, par exemple, une pièce défectueuse produite par l'atelier Ouest rapporte : $10 - 7 - 3$ soit 0 € à l'entreprise.
On appelle B le gain journalier de l'entreprise.

1. Calculer le gain journalier B de l'entreprise.
2. Durant l'année, les ateliers fonctionnent 300 jours. Estimer le gain annuel, exprimé en euros, de l'entreprise.
3. Le chef d'entreprise envisage d'éliminer les pièces défectueuses avant réparation pour ne vendre que les pièces non défectueuses. Cette stratégie lui coûte 100 000 € par an compte tenu du recyclage. Cette stratégie est-elle rentable pour l'entreprise ?

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ orthonormal direct d'unité graphique 2 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z + 8.$$

   a. Vérifier que $P(-1) = 0$.

   b. Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout nombre complexe z,

$$P(z) = (z+1)\left(z^2 + az + b\right).$$

   c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

2. On note A, B et C les points du plan, d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -1$, $z_{\text{B}} = 2 + 2\text{i}$ et $z_{\text{C}} = 2 - 2\text{i}$.

   a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

   b. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_{A}, z_{B} et z_{C}. En déduire une écriture exponentielle de ces trois nombres.

   c. Déterminer l'aire en cm^2 du triangle ABC.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

On considère l'équation différentielle notée (E) :

$$y' + 0,1y = 3$$

où y désigne une fonction inconnue de la variable réelle t, dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. Résoudre l'équation différentielle notée (F) :

$$z' + 0,1z = 0$$

   où z désigne une fonction inconnue de la variable réelle t, dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. On pose, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
   $y(t) = z(t) + 30$, où la fonction z est solution de l'équation différentielle (F).

   a. Démontrer que la fonction y est solution de l'équation différentielle (E).

   b. Parmi les fonctions précédentes, déterminer celle vérifiant $y(0) = 20$.

Partie B

La température en degrés Celsius (°C) du lubrifiant d'un moteur varie en fonction du temps t de fonctionnement exprimé en heures.
La fonction f est définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = 30 - 10\mathrm{e}^{-0,1t}.$$

1. Déterminer la température du lubrifiant :
   a. À l'arrêt.
   b. Au bout de vingt quatre heures.
2. On s'intéresse au comportement de la fonction f en $+\infty$.
   a. Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t)$.
   b. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
   c. Donner une signification concrète de ce résultat pour le lubrifiant.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a. Calculer $f'(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. Construire la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans le repère orthogonal $[0\ ;\ +\infty[$ de l'annexe qu'on rendra avec la copie.
   c. À quel instant la température du lubrifiant est-elle de 28 °C ? Donner une valeur approchée à l'heure près puis à la minute près du résultat.
   d. Calculer la température moyenne du lubrifiant entre la cinquième et la dixième heure de fonctionnement.

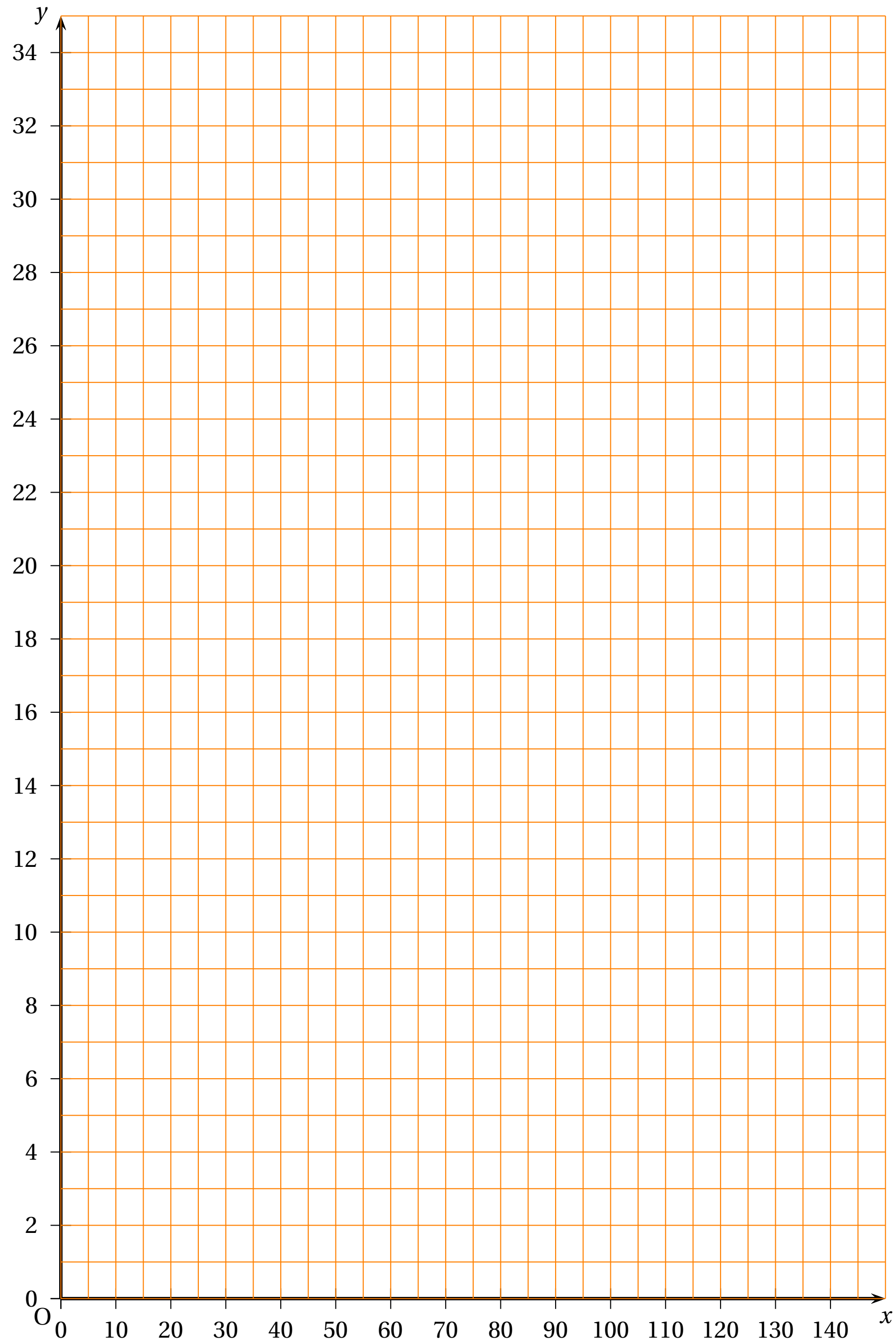
   On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction g dérivable sur [a ; b] est :

$$V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Annexe (à rendre avec la copie)

Exercice 1

	Pièces défectueuses	Pièces non défectueuses	Total
Ouest	22		
Est			
Total			2 000


y
34
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
O
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
x

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie juin 2010 ∾
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit (E) l'équation de la variable complexe z :

$$z^2 - 4z + 8 = 0.$$

Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
On considère les points A, B, C, D et K d'affixes respectives :

$$a = 2 + 2\text{i}, \quad b = 1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad c = 2 - 2\text{i}, \quad d = 3 - \text{i}\sqrt{3} \text{ et } k = 2.$$

2. Construction du quadrilatère ABCD.

a. Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes a et b.

b. Démontrer que le point K est le milieu du segment [AC] et le milieu du segment [BD].

c. Placer les points A, C et K, puis construire les points B et D.

3. Nature du quadrilatère ABCD.

a. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

EXERCICE 2 **4 points**

Une urne contient 100 boules. Chacune de ces boules porte l'un des numéros 1, 2, 3, 4 ou 5.
La répartition des boules suivant leur numéro est donnée par le tableau ci-dessous :

Numéro inscrit sur la boule	1	2	3	4	5
Nombre de boules	15	25	15	35	10

Un joueur tire au hasard une boule dans cette urne. On admet que tous les tirages sont équiprobables.

1. Pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant 5$, on note p_n la probabilité de tirer une boule numérotée n.
Déterminer $p_1,~p_2,~p_3,~p_4$ et p_5.

2. On considère les évènements suivants :

- A : « La boule tirée porte un numéro inférieur ou égal à 3 » ;
- B : « La boule tirée porte un numéro pair ».

Déterminer les probabilités des évènements $A,~B,~A \cap B$ et $A \cup B$.

3. Un jeu est défini de la façon suivante : un joueur mise 6 € puis il tire une boule de l'urne.

- Si le numéro de la boule est impair il reçoit une somme de 11 € ;
- si le numéro de la boule tirée est pair il ne reçoit rien.

On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le gain (éventuellement négatif) du joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

b. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

c. On modifie la règle du jeu, la mise reste identique.

- Si le numéro de la boule tirée est impair il reçoit la somme de a euros;
- si le numéro de la boule tirée est pair il ne reçoit rien.

Déterminer la valeur du nombre a pour que le jeu soit équitable.

PROBLÈME **11 points**

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x} - 2x + 4.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
L'unité graphique est 2 cm sur chacun des axes.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \ln x - x^2$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ (les limites ne sont pas demandées).

2. Étude du signe de g

a. Calculer $g(1)$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. Étude des limites

a. Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on déduire graphiquement pour la courbe $\mathscr{C}$?

b. Déterminer la limite de f en ∞.

2. Étude d'une asymptote

a. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x+4$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

b. Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

3. On désigne par f' la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, puis démontrer que : $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^2}$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$,

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

4. Démontrer qu'il existe une tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ qui est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.

5. Construire dans le repère $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ les droites $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}$, puis la courbe $\mathcal{C}$.

Partie C : Calcul d'une aire

1. Calculer $f(2)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1~;~2]$.
2. On note F la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$F(x) = (\ln x)^2 - x^2 + 4x.$$

   a. Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   b. On note $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.
   Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$ puis en donner la valeur arrondie au mm^2.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Génie civil Métropole 16 septembre 2010

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée pour cette épreuve.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Soit le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 - 27.$$

a. Calculer $P(3)$; en déduire une factorisation de $P(z)$.

b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 3z + 9 = 0.$$

c. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de $P(z) = 0$.

2. Soient M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes respectives :

$$z_1 = 3, \quad z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i} \quad \text{et} \quad z_3 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}.$$

a. On propose dans le tableau ci-dessous trois écritures sous forme exponentielle des nombres complexes z_2 et z_3.

Écriture 1	Écriture 2	Écriture 3
$z_2 = 3\text{e}^{\frac{\pi}{6}\text{i}}$ et $z_3 = 3\text{e}^{-\frac{\pi}{6}\text{i}}$	$z_2 = 3\text{e}^{-\frac{2\pi}{3}\text{i}}$ et $z_3 = 3\text{e}^{\frac{2\pi}{3}\text{i}}$	$z_2 = 3\text{e}^{\frac{2\pi}{3}\text{i}}$ et $z_3 = 3\text{e}^{-\frac{2\pi}{3}\text{i}}$

Déterminer celle qui convient en justifiant votre réponse.

b. Placer de façon précise les points M_1, M_2 et M_3 dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ défini précédemment. (*On laissera apparents les traits de construction.*)

c. Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant votre choix à chaque proposition suivante :
Proposition 1 : Les distances M_1M_2 et M_1M_3 sont différentes.
Proposition 2 : L'aire du triangle $M_1M_2M_1$ est $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

EXERCICE 2 **6 points**

Une entreprise fabrique des pots de peinture cylindriques en fer, dont l'étanchéité est assurée par un joint de caoutchouc. Tous les jours, le chef d'équipe prélève un échantillon au hasard dans la production, contrôle les dimensions de chaque pot et l'épaisseur du caoutchouc.

Partie A - Échantillon du lundi

Ce lundi, le chef d'équipe prélève 250 pots au hasard. Il les contrôle tous et il constate que :

- 232 pots ne présentent pas de défaut;
- 5 pots présentent au moins un défaut de dimension;
- 2 pots exactement présentent à la fois un défaut de dimension et un défaut d'épaisseur de caoutchouc.

1. Compléter sur l'annexe (à rendre avec la copie), le tableau d'effectifs suivant :

Tableau du lundi	Pièces présentant un défaut de dimension	Pièces ne présentant pas de défaut de dimension	Total
Pièces présentant un défaut d'épaisseur de caoutchouc			
Pièces ne présentant pas de défaut d'épaisseur de caoutchouc			
Total	5		250

2. En déduire le pourcentage de pièces dans l'échantillon du lundi ne présentant pas de défaut d'épaisseur de caoutchouc.

Partie B - Échantillon du mardi

Le lendemain mardi, le chef d'équipe prélève 200 pots au hasard dans la production et il les contrôle tous; la répartition des pièces suivant les défauts est donnée dans le tableau ci-dessous :

Tableau du mardi	Pièces présentant un défaut de dimension	Pièces ne présentant pas de défaut de dimension	Total
Pièces présentant un défaut d'épaisseur de caoutchouc	1	10	11
Pièces ne présentant pas de défaut d'épaisseur de caoutchouc	2	187	
Total	3	197	200

On admet que cette répartition reflète l'ensemble de la production de ce mardi, et que chaque pot a la même probabilité d'être prélevé. On prélève au hasard un pot de peinture produit ce jour, et on considère les événements suivants :

D : « le pot prélevé présente un défaut de dimension »;

E : « le pot prélevé ne présente pas de défaut d'épaisseur de caoutchouc ».

1. **a.** Calculer la probabilité de chacun des événements D et E.

b. Définir en une phrase chacun des événements $D \cap E$ et $D \cup E$, puis calculer sa probabilité.

On admet désormais que cette répartition du mardi reflète parfaitement l'ensemble de la production journalière.

Sachant que :

— tout pot avec le seul défaut d'épaisseur de caoutchouc est réparé avec un surcoût de 0,15 euro,

— tout pot avec un défaut de dimension est invendable,

le tableau ci-dessous récapitule le coût de production et le prix de vente des pots suivant les défauts constatés :

	Pot sans défaut	Pot avec le seul défaut d'épaisseur de caoutchouc	Pot avec un défaut de dimension (au moins)
Coût de production	1,30 euros	1,45 euros (car 0,15 euro de surcoût pour corriger le défaut)	1,30 euros
Prix de vente	1,50 euros	1,50 euros	0 euro (invendable)

On note X la variable aléatoire associant à chaque pot, le gain net en euros (différence entre le prix de vente et le coût de production) réalisé par l'entreprise lors de sa vente.

2. **a.** Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

b. Vérifier que la probabilité pour que le gain net soit égal à 0,05 euro est :

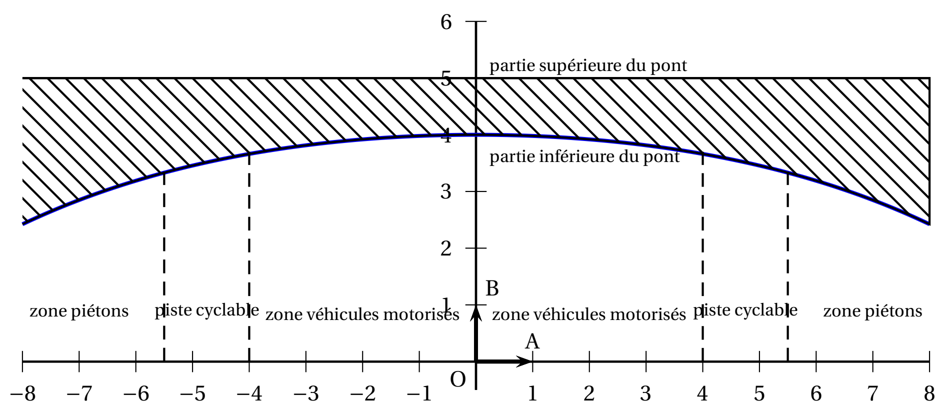
$$p(X = 0,05) = \frac{1}{20}$$

c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

d. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ; interpréter le résultat obtenu.

PROBLÈME **9 points**

Un pont à une seule arche d'une longueur de 16 mètres, enjambe une route à double circulation. Dans un repère orthonormé, la figure ci-dessous représente à l'échelle 1/100 une vue de l'une des deux façades de ce pont.
La partie supérieure du pont est à une hauteur de 5 mètres au dessus de la route.
La partie de l'axe des abscisses comprises entre −8 et +8 représente la chaussée sur laquelle sont délimitées les zones de circulation des piétons, des cyclistes et des véhicules motorisés.



Partie 1 - Étude de la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}$

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8 ; 8]$ par :

$$f(x) = a - \frac{\mathrm{e}^{0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x}}{2}$$

où a désigne un nombre entier naturel.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative donnée ci-dessus dans le repère orthonormé (O, A, B).

1. Déterminer graphiquement $f(0)$. En déduire que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8 ; 8]$,

$$f(x) = 5 - \frac{\mathrm{e}^{0,2x} + \mathrm{e}^{-0,2x}}{2}$$

2. Comparer $f(-x)$ et $f(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8 ; 8]$.
Que peut-on en déduire graphiquement ?

3. Montrer que la fonction f', fonction dérivée de la fonction f, est définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8 ; 8]$ par :

$$f'(x) = \frac{1}{10}\text{e}^{-0,2x}\left(1-\text{e}^{0,4x}\right).$$

4. Calculer $f'(0)$. En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
5. Résoudre algébriquement, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8 ; 8]$, l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
6. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-8 ; 8]$.
7. Reproduire et compléter avec une précision de 10^{-2} par défaut le tableau suivant :

x	4	5,5	8
$f(x)$			

En déduire la hauteur maximale d'un véhicule motorisé pour qu'il puisse passer sous ce pont en tenant compte du fait que l'on doit laisser une hauteur de sécurité de 50 cm au dessus du véhicule.

Partie 2 - Calcul d'aire

On veut peindre les deux façades de l'armature du pont à arche. On appelle $\mathcal{A}$ l' aire de la partie hachurée sur la figure donnée au début du problème.

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-8}^{8}\left(\text{e}^{0,2x}+\text{e}^{-0,2x}\right)\,\text{d}x$.
2. Calculer $\mathcal{A}$ l'aire (exprimée en m^2) de la partie hachurée sur la figure donnée au début du problème.
3. En déduire que l'aire de la surface totale à peindre est égale à $10\left(\text{e}^{1,6}-\text{e}^{-1,6}\right)\ \text{m}^2$, soit environ $47,52\ \text{m}^2$.
4. La peinture utilisée pour peindre les façades du pont est vendue par bidon de 30 litres. Sachant que cette peinture a une propriété de recouvrement de 0,3 mètre carré par litre, combien de bidons sont nécessaires pour recouvrir les deux faces de cette construction ?

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 2

Tableau du lundi	Pièces présentant un défaut de dimension	Pièces ne présentant pas de défaut de dimension	Total
Pièces présentant un défaut d'épaisseur de caoutchouc			
Pièces ne présentant pas de défaut d'épaisseur de caoutchouc			
Total	5		250

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Nouvelle-Calédonie novembre 2010
Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 + \left(2\sqrt{3}-2\right)z^2 + \left(4-4\sqrt{3}\right)z - 8$.

1. Résolution de l'équation $P(z) = 0$
   - **a.** Calculer $P(2)$.
   - **b.** Déterminer les deux nombres réels α et β tels que, pour tout nombre complexe z :

$$P(z) = (z-2)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right).$$

   - **c.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.
2. On considère les points A, B, C, d'affixes respectives :
   $a = 2,~ b = -\sqrt{3} + \text{i},~ c = -\sqrt{3} - \text{i}.$
   - **a.** Déterminer le module et un argument des nombres complexes b et c.
   - **b.** En déduire que les points A, B, et C appartiennent à un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.
   - **c.** Placer les points A, B, C dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ et tracer le cercle $\mathscr{C}$.
   - **d.** Démontrer que le triangle OBC est équilatéral.
   - **e.** En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OB}},~\overrightarrow{\text{OC}}\right)$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AB}},~\overrightarrow{\text{AC}}\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**

On dispose d'un échantillon d'os fossile contenant initialement une masse de 10 grammes de carbone 14. Le but de l'exercice est d'étudier l'évolution de cette masse au fil des siècles, par deux méthodes différentes.

Partie A : Première méthode

On considère que la masse de carbone 14 dans un tel échantillon diminue à raison de 1,2 % par siècle.

1. Quelle masse de carbone 14 contiendra l'échantillon :
   - **a.** un siècle plus tard ?
   - **b.** deux siècles plus tard ?
2. On note M_n la masse de carbone 14 contenue dans l'échantillon au bout de n siècles, où n est un entier naturel.
   - **a.** Démontrer que la suite (M_n) est une suite géométrique de raison $0,988$.
   - **b.** Exprimer M_n en fonction de n.
3. Déterminer au bout de combien de siècles, la masse de carbone 14 contenue dans l'échantillon sera inférieure à 5 g.

Partie B : Seconde méthode

On note $m(t)$ la masse en gramme de carbone 14 contenue dans l'échantillon à l'instant t (en siècle). On admet que la fonction m est solution de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad : \quad y' + 1,21 \cdot 10^{-2}\, y = 0.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle (E), qui vérifie : $m(0) = 10$.
3. Déterminer au bout de combien de siècles, la masse de carbone 14 contenue dans l'échantillon sera inférieure à 5 grammes.

PROBLÈME **11 points**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.
On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = x\text{e}^{-x} - 2x + 3.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$g(x) = \text{e}^{-x}(1 - x) - 2.$$

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$, puis en $+\infty$.
2. Étude des variations de la fonction g
   a. Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
   b. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. Étude du signe de la fonction g
   a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que cette solution, notée α , appartient à l'intervalle $[-1~;~0]$.
   b. Donner la valeur approchée de α arrondie au centième.
   c. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ en fonction des valeurs de x.

Partie B : Étude de la fonction f

1. Étude des limites
   a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. En remarquant que, pour tout réel x, $f(x) = x\left(\text{e}^{-x} - 2\right) + 3$, déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Étude d'une asymptote
   a. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x + 3$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   b. Étudier la position relative de la droite $\mathscr{D}$ et de la courbe $\mathscr{C}$.
3. Étude des variations de la fonction f
   a. Vérifier que pour tout nombre réel x, $f'(x) = g(x)$ où g est la fonction définie dans la partie A et où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   b. En utilisant le signe de la fonction g, obtenu précédemment, dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (On prendra : $f(\alpha) \approx 3,2$)
4. Construire la droite $\mathscr{D}$ puis la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie C : Calcul d'aire

1. On note H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = (-x - 1)\text{e}^{-x}.$$

   a. Calculer $H'(x)$ où H' désigne la fonction dérivée de la fonction H.
   b. En déduire une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$ du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$. On donnera une valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis la valeur arrondie au mm^2.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI mars 2011 Nouvelle-Calédonie
Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation

$$(\mathrm{E}) : \quad z^3 - 2\left(1+\sqrt{3}\right)z^2 + 4\left(1+\sqrt{3}\right)z - 8 = 0.$$

a. Vérifier que le nombre 2 est une solution de l'équation (E).

b. En déduire qu'il existe deux nombres réels α et β, que l'on déterminera, tels que l'équation (E) soit équivalente à l'équation :
$(z-2)\left(z^2+\alpha z+\beta\right) = 0$.

c. Résoudre l'équation $z^2+\alpha z+\beta = 0$, puis déterminer le module et un argument de chacune de ses solutions.

On désigne par A et B les points du plan complexe d'affixes respectives :
$a = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $b = 2$.
On désigne par C le milieu du segment [AB], et on note c l'affixe du point C.

2. On se propose dans cette question de déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

a. Placer les points A, B, C dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ et démontrer que le triangle OAB est isocèle.

b. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,;\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$.

c. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe c.

d. Calculer le module de c et démontrer que $|c| = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

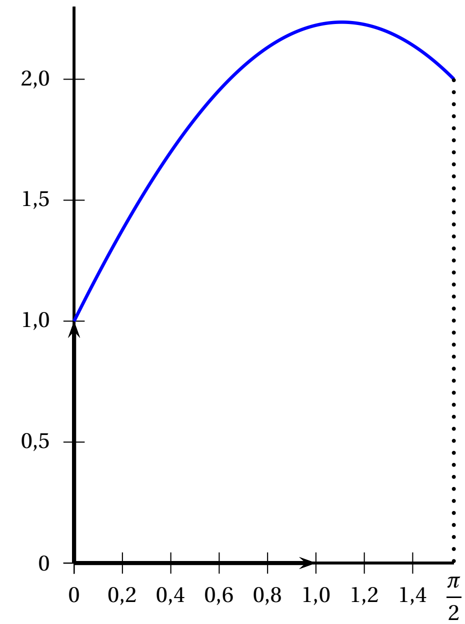
e. Démontrer que $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

EXERCICE 2 **5 points**

On note f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0\,;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \cos x + 2\sin x.$$

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f est tracée ci-contre, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On note $\mathcal{D}$ le domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d' équations $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.
Le but de cet exercice est de déterminer la mesure $\mathcal{V}$, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}\right)$.



1. Calcul de deux intégrales

On note I et J les deux intégrales : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

a. En simplifiant l'écriture de $I + J$, démontrer que $I + J = \dfrac{\pi}{2}$.

b. Démontrer de même que $I - J = 0$.

c. Déduire des questions a. et b. les valeurs de I et J.

2. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ cherché est donné par la formule : $\mathcal{V} = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Démontrer que $f^2(x) = \cos^2 x + 2\sin 2x + 4\sin^2 x$.

b. Déduire des questions précédentes, la valeur exacte de $\mathcal{V}$.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = -\mathrm{e}^x$.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' - y = 0$.

2. Vérifier que toute fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x) = -x\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x$, où C est une constante, est une solution de l'équation différentielle (E).

3. Parmi ces solutions, déterminer celle qui vérifie la condition initiale : $u(0) = 2$.

Partie B : Étude d'une fonction

On note f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

1. Étude des limites de la fonction f

a. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale et en donner une équation.

2. Étude des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$
   a. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de la fonction f.
3. Tracé de la courbe $\mathscr{C}$
   a. Déterminer l'équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.
   b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes du repère.
   c. Tracer, dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, la droite T_0 et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : Calcul d'une aire plane

1. Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (3 - x)\mathrm{e}^{x}$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Soit α un nombre réel strictement inférieur à 2.
   On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 2$.
   a. Calculer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de α.
   b. Déterminer la limite éventuelle de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI La Réunion juin 2010
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 4z + 13 = 0.$$

2. Dans le plan complexe $\mathscr{P}$, on considère les points A, B et C d' affixes respectives

$$z_\text{A} = -2 - 3\text{i},\ z_\text{B} = -2 + 3\text{i} \quad \text{et} \ z_\text{C} = 3 - 2\text{i}.$$

   a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   b. Écrire $\dfrac{z_\text{C}}{z_\text{A}}$ sous forme algébrique.
   c. En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z_\text{C}}{z_\text{A}}$.
   d. En justifiant, donner la nature du triangle OAC.

3. On désigne par D l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   a. Construire à la règle et au compas le point D dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   On laissera apparents les traits de construction.
   b. Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe z_D du point D.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Les points A, B, C et D semblent appartenir à une même figure géométrique. Laquelle ? On justifiera la réponse.

EXERCICE 2 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
Chaque bonne réponse rapporte 1 *point et chaque mauvaise réponse enlève* 0,5 *point. Une absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.
On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.

Partie A

Dans une entreprise qui fabrique des pièces pour l'horlogerie, on souhaite étudier la conformité d'un type de pièce ayant la forme d'une roue dentée. Deux machines produisent ce type de pièce. Sur chacune des machines, on prélève 200 unités sortant de la chaîne de fabrication et on mesure avec précision le diamètre des roues dentées. On rassemble les résultats dans le tableau suivant :

Diamètre en mm	3,45	3,5	3,55	3,6
Nombre de pièces issues de la machine A	5	184	10	1
Nombre de pièces issues de la machine B	9	173	15	3

Une pièce est dite conforme lorsqu'elle a un diamètre de 3,5 mm.

1. On tire au hasard une pièce dans le lot issu de la machine A. La probabilité que cette pièce soit conforme est de :

   a. 0,8925 **b.** 0,92 **c.** 0,865 **d.** 1,02

2. On tire au hasard une pièce parmi les 400 qui ont été prélevées dans la production.
   La probabilité que le diamètre de cette pièce soit supérieur ou égal à 3,5 mm est de :

   a. 0,035 **b.** 0,8925 **c.** 0,0725 **d.** 0,965

3. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce mesurée, associe l'écart par rapport à la dimension théorique de 3,5 mm. Le tableau suivant donne la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

x_i	$-0,05$	0	0,05	0,1
$P\left(X = x_i\right)$	0,035	0,892 5	0,062 5	0,01

   L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est de :

   a. 0,2375 **b.** 2,375 **c.** 0,002 375 **d.** 0,005 875

Partie B

1. Une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 3y = 6x + 5$ est :

   a. $x \longmapsto e^{-3x}$ **b.** $x \longmapsto e^{-3x} + 2x + 1$
   c. $x \longmapsto e^{3x} + 2x + 1$ **d.** $x \longmapsto e^{-3x} + 2x + 3$

2. Une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$ est :

   a. $x \longmapsto 2\cos(9x) + 5\sin(3x)$ **b.** $x \longmapsto 2\cos(3x) + 5\sin(3x)$
   c. $x \longmapsto 2\cos(9x)$ **d.** $x \longmapsto 2\cos(9x) + 5\sin(9x)$

PROBLÈME **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, en prenant pour unité graphique 2 cm.
Sur la **feuille annexe jointe, à rendre avec la copie**, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = a\ln x + \frac{b}{x} + c,$$

où a, b et c désignent trois nombres réels.
On a également placé les points A et B de coordonnées respectives $(0 ; \ln 2 - 2)$ et $(-4\ln 2 + 8 ; 0)$ dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. **a.** Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.

   b. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2, calculer $f'(2)$.

2. **a.** Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et b.

   b. Montrer que a, b et c sont solutions du système $\left\{\begin{array}{rcr} b+c &=& -1\\ a-b &=& 0\\ 2a-b &=& 1\end{array}\right.$.

   c. Calculer a, b et c. En déduire l'expression de $f(x)$.

Partie B

Dans toute la suite du problème, on admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 2.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. La courbe $\mathscr{C}$ semble couper l'axe des abscisses sur l'intervalle $[6\,;\,7]$.
   Prouver ce résultat, puis donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de l'abscisse du point d'intersection.

Partie C

On désigne par Γ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

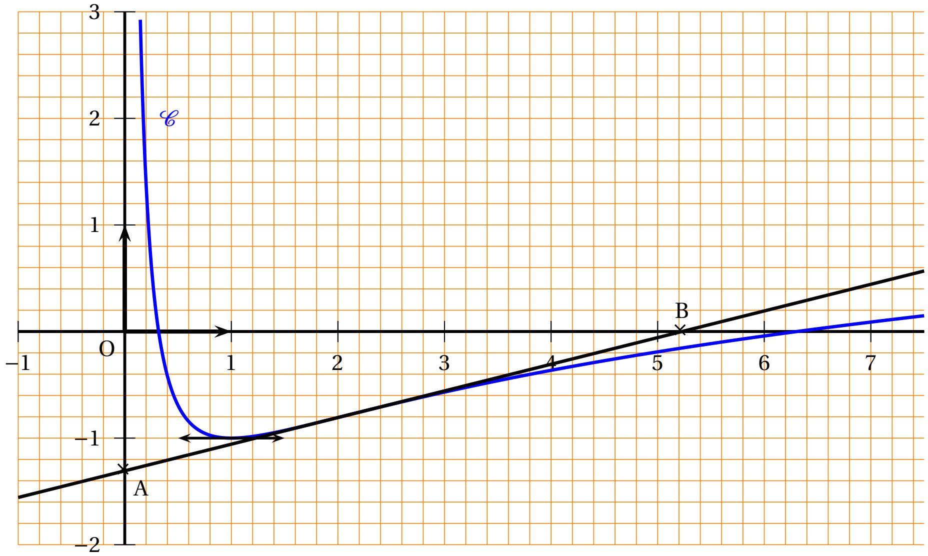
1. Déterminer les coordonnées du (ou des) pointes) d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.
2. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.
3. Tracer la courbe Γ sur la feuille annexe, à rendre avec la copie.
4. **a.** Hachurer la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}$, Γ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

   b. Calculer la mesure exacte, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie hachurée.

   c. En déduire, en cm^2, la mesure arrondie au centième de l'aire $\mathscr{A}$.

Problème

Annexe, à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Métropole 22 juin 2010
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$

1. Soit $P(z) = z^3 - 27$, où z désigne un nombre complexe.
   a. Vérifier que $P(z) = (z-3)\left(z^2+3z+9\right)$.
   b. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation
   $P(z) = 0$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$$z_{\text{A}} = 3, \quad z_{\text{B}} = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}.$$
   a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{B} et z_{C}.
   b. Écrire le nombre complexe z_{C} sous la forme $r\text{e}^{\text{i}\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.
   c. Justifier que les points A, B et C sont sur un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.
   d. Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
3. Le point D est l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. On appelle z_{D} l'affixe du point D.
   Montrer que $z_{\text{D}} = -3$, puis placer le point D sur la figure précédente.
4. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité : $|z+3| = 3$.
   a. Vérifier que les points O, B et C appartiennent à l'ensemble $\mathscr{F}$.
   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   L'ensemble $\mathscr{F}$ est l'image du cercle Γ par certaines transformations du plan.
   En citer une et préciser ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
Chaque bonne réponse rapporte 1 *point et chaque mauvaise réponse enlève* 0,5 *point. Une absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à* 0.
On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.

Partie A

Deux machines A et B produisent un même type de pièce. On a prélevé 3 000 unités sortant de la machine A et 2 000 de la machine B.
Ces pièces peuvent présenter deux types de défauts : un défaut de couleur, noté C, et un défaut de taille, noté T.

Pour la machine A, 2 % des pièces présentent uniquement le défaut C, 5 % uniquement le défaut T et 1 % les deux défauts.
Pour la machine B, 3 % présentent le seul défaut C, 4 % le seul défaut T et 2 % les deux défauts.
On pourra éventuellement se servir du tableau ci-dessous

	C seul	T seul	C et T	ni C ni T	Total
A			30		3 000
B	60				2 000
Total					5 000

On prend au hasard une pièce parmi les 5 000 prélevées ; toutes les pièces ont la même chance d'être choisies.

1. La probabilité que la pièce soit fabriquée par la machine A est :

a. $\frac{2}{3}$ **b.** $\frac{3}{5}$ **c.** $\frac{3}{2}$ **d.** $\frac{2}{5}$

2. La probabilité que la pièce présente uniquement le défaut C est :

a. $0,024$ **b.** $0,02$ **c.** $0,03$ **d.** 120

3. La probabilité que la pièce présente le défaut T est :

a. $\frac{23}{500}$ **b.** $\frac{3}{50}$ **c.** $\frac{7}{500}$ **d.** $\frac{1}{20}$

4. La probabilité que la pièce présente au moins l'un des deux défauts est :

a. $0,014$ **b.** $0,06$ **c.** $0,038$ **d.** $0,084$

Partie B

L'entreprise décide de commercialiser les 5 000 pièces prélevées :

- les pièces présentant les deux défauts sont invendables et sont détruites ;
- les pièces présentant uniquement un défaut de taille sont bradées au prix de 10 € chacune ;
- celles présentant uniquement un défaut de couleur sont soldées au prix de 25 € chacune ;
- enfin les pièces correctes sont vendues au prix de 30 € chacune.

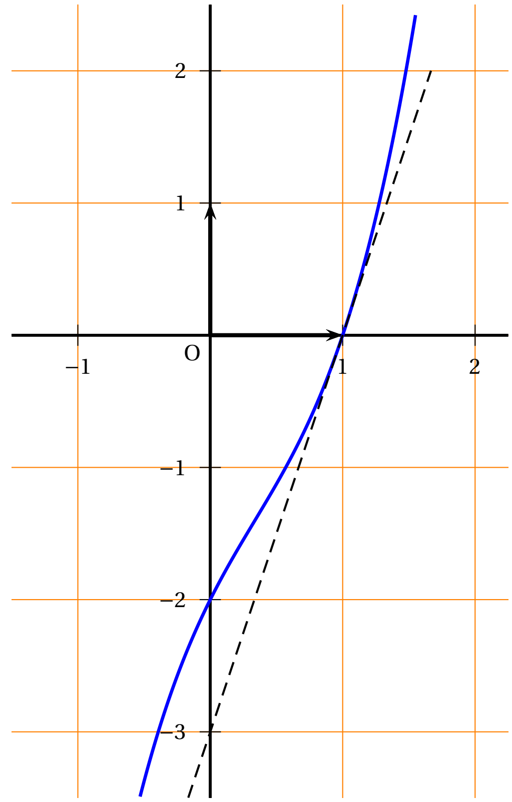
Sachant que le coût de fabrication d'une pièce est de 10 €, on considère la variable aléatoire X égale au bénéfice fait par l'entreprise sur chaque pièce, exprimé en euros.

5. L'entreprise peut espérer un bénéfice moyen, exprimé en euros, de :

a $18,68$ **b** $18,54$ **c** $18,89$ **d** $18,75$

PROBLÈME **10 points**

Partie A : exploitation d'un graphique



La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ où a et b désignent deux nombres réels.
On suppose g strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Cette courbe coupe les axes de coordonnées aux points A$(1\,;\,0)$ et B$(0\,;\,-2)$.
La droite en pointillés est la tangente à la courbe au point d'abscisse 1. Elle coupe l'axe des ordonnées au point C$(0\,;\,-3)$.

1. Lire $g(1)$ sur le graphique.
   En déduire une relation entre a et b.
2. Donner la valeur de $g'(1)$.
   Écrire alors une relation vérifiée par a.
3. À l'aide des deux premières questions, déterminer les valeurs de a et b.
4. Donner le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite, on admettra que : $g(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$.

Partie B : étude d'une fonction

On considère maintenant la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,5]$ par :

$$f(x) = 4\ln x + x^2 - 2x + 1 + \frac{4}{x}.$$

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.
   En remarquant que, pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,5]$,
   $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(4x\ln x + x^3 - 2x^2 + x + 4\right)$, déterminer la limite de la fonction f en zéro et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,5]$, $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x^2}$ où g est la fonction définie dans la partie A.
   En déduire le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

Partie C : position relative de deux courbes

Dans la question 1. on demande de conjecturer des résultats à partir de la calculatrice ; dans la question 2. on demande de prouver ces résultats.

1. Sur l'écran de la calculatrice, on fera apparaître la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f, ainsi que l'hyperbole Γ d'équation $y = \dfrac{4}{x}$.
   Les résultats attendus dans cette question seront obtenus à partir de la lecture d'écran.
   a. Faire un schéma reproduisant l'écran obtenu en précisant la fenêtre utilisée.

b. Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ semblent avoir un point commun. Donner ses coordonnées.

c. Préciser la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Γ.

2. On considère la fonction d définie sur l'intervalle $]0~;~5]$ par :

$$d(x) = f(x) - \frac{4}{x}.$$

a. À l'aide de la question précédente, proposer une solution de l'équation $d(x) = 0$ et, à l'aide d'un calcul, opérer une vérification.

b. Calculer $d'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction d.

c. En déduire le signe de $d(x)$ sur l'intervalle $]0~;~5]$.

d. La position de $\mathscr{C}$ par rapport à Γ précisée à la question 1. c. est-elle confirmée ?

Partie D : calcul d'aire

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0~;~5]$ par : $H(x) = x\ln x - x$.
Montrer que H est une primitive de la fonction ln sur l'intervalle $]0~;~5]$.

2. Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la courbe Γ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$. Le résultat sera donné en unités d'aire.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie juin 2010
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 centimètres. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre l'équation $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes.

2. On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} + \text{i} \quad ; \quad z_2 = \sqrt{3} - \text{i} \quad \text{et } z_3 = 2\text{i}$$

a. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

b. Placer les points A B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

c. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{z_3}{z_2}$.

d. En déduire que le point C est l'image du point B par une rotation R de centre O dont on précisera l'angle.

3. Soit E le symétrique du point A par rapport à l'origine O du repère.

a. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point E.

b. Montrer que le point E est l'image du point C par la rotation R.

4. Démontrer que le triangle BEC est équilatéral.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$9y'' + y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable x et y'' la dérivée seconde de la fonction y.

2. On désigne par f la solution de (E) vérifiant $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

a. Déterminer la fonction f.

b. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

3. La valeur efficace de la fonction f est le réel positif E défini par
$E^2 = \dfrac{1}{6\pi}\displaystyle\int_0^{6\pi} \left[f(x)\right]^2\,\text{d}x$.

a. Montrer que, pour tout réel x, $\left[f(x)\right]^2 = \dfrac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\dfrac{2x}{3} + \dfrac{5\pi}{3}\right)\right]$.

b. Calculer le réel E.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

On donne en annexe la courbe représentative Γ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et sa tangente Δ au point d'abscisse 0.

1. Par lecture graphique, donner les valeurs entières de $g(0)$ et de $g'(0)$.
2. On admet qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x,
   $g(x) = \mathrm{e}^x + ax + b$.
   On note g' la dérivée de la fonction g.
   a. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.
   b. À l'aide des résultats des deux questions précédentes calculer les valeurs de a et de b.
3. Dans la suite du problème on admet que, pour tout réel x, $g(x) = \mathrm{e}^x - 2x + 2$.
   a. Étudier le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variations dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum (les limites ne sont pas demandées).
   b. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.
   c. Comment ce résultat se traduit-il graphiquement ?

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\left(1 + 2\mathrm{e}^{-x}\right)$$

On note f' la dérivée de la fonction f et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 2 centimètres en abscisse et 1 centimètre en ordonnée.

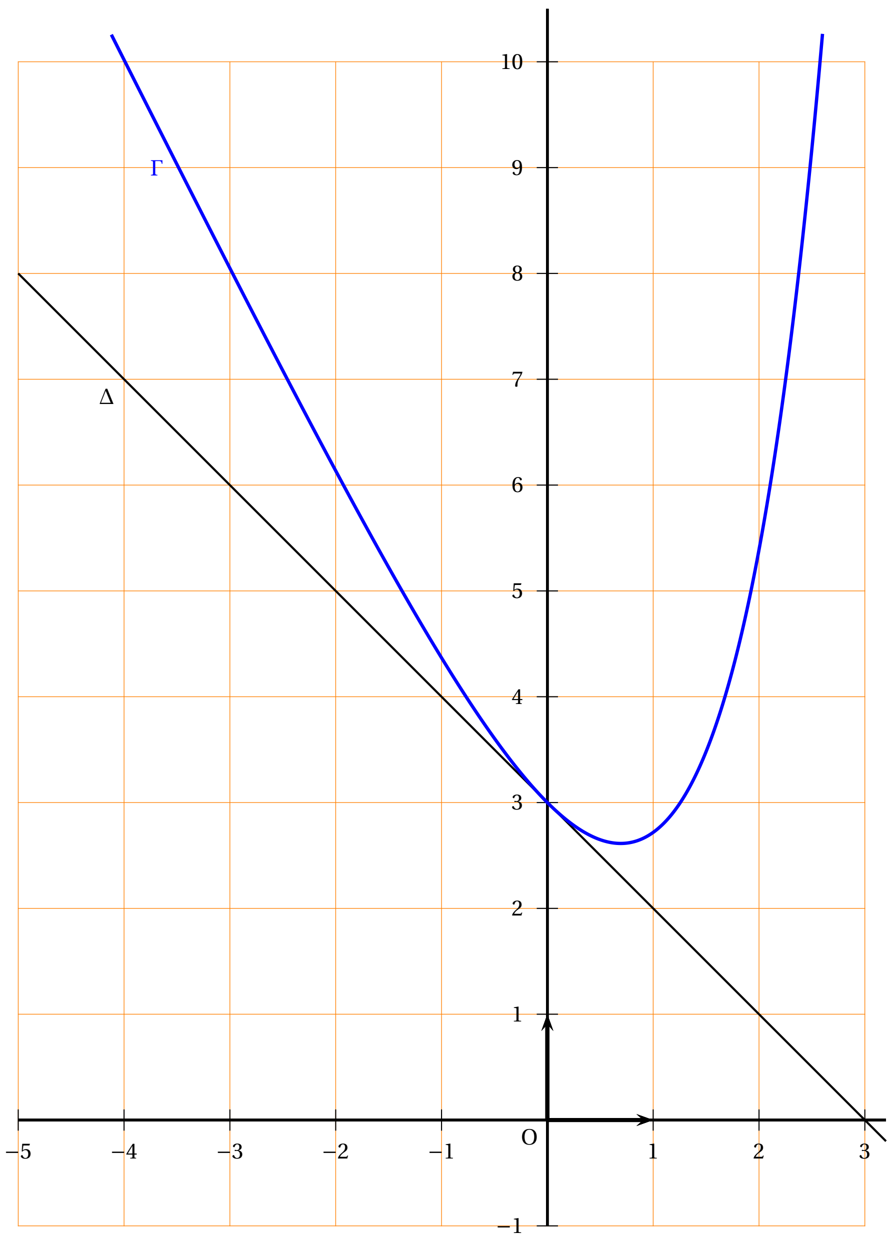
1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote en $+\infty$ la droite D d'équation $y = x$.
   c. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite D. On précisera leur point d'intersection.
3. **a.** Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout réel, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}g(x)$.
   b. En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.
5. Sur une feuille de papier millimétré qui vous sera fournie, tracer les droites D et T ainsi que la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B

On note $\mathscr{A}$ la mesure, exprimée en centimètres carrés, de l'aire du domaine du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$ la droite D l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

1. Hachurer le domaine ainsi défini.
2. Soient h et H les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$ et
   $H(x) = 2(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
   Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis en donner une valeur arrondie au millimètre carré près.

Annexe (problème - partie A)



Baccalauréat STI Métropole & La Réunion 16 septembre 2010
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **6 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.
Chaque bonne réponse rapporte 1 point et chaque mauvaise réponse enlève 0,5 point. Une absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.
On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

	A	B	C
1. Le nombre complexe solution de l'équation $(1+\text{i})z-3+\text{i}=0$ est :	$1-2\text{i}$	$2-\text{i}$	$2-2\text{i}$
2. On considère le nombre complexe z_0 de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. Le nombre complexe z_0^{2010} est :	un réel positif	un imaginaire pur	un réel négatif
3. L'écriture exponentielle du nombre complexe $-1+\text{i}$ est :	$\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$	$\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$	$\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$
4. Si $z_1=2\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2=\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$, alors l'écriture exponentielle de $\dfrac{z_1}{z_2}$ est :	$\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{12}}$	$\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{11\pi}{12}}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{11\pi}{12}}$
5. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, l'image du point M d'affixe $z=-1+\text{i}\sqrt{3}$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ est le point M' d'affixe z' :	$z'=-\sqrt{3}+\text{i}$	$z'=\sqrt{3}+\text{i}$	$z'=\sqrt{3}-\text{i}$
6. Si les points A, B, C ont pour affixes respectives $z_{\text{A}}=3+\text{i}\sqrt{3}$, $z_{\text{B}}=1+\text{i}\sqrt{3}$ et $z_{\text{C}}=1-\text{i}\sqrt{3}$, alors le triangle ABC est :	rectangle	isocèle	équilatéral

EXERCICE 2 **4 points**

Une urne contient 10 boules. Sur chacune d'elles, on a inscrit un nombre suivant le tableau ci-dessous.

Nombre inscrit sur la boule	5	6	10	11	12	13	14
Nombre de boules	1	2	1	3	1	1	1

Un joueur mise 10 €, tire une boule au hasard dans l'urne et reçoit en euros la somme inscrite sur la boule.

1. Le joueur joue une fois : on appelle p_1 la probabilité qu'il perde de l'argent (c'est-à-dire que le nombre inscrit sur la boule soit inférieur à 10) et p_2 la probabilité qu'il ait un gain positif ou nul.
   Calculer p_1 et p_2.
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre le « gain » du joueur (une perte est un gain négatif).
   Par exemple : si le joueur tire le nombre 12 son gain est de $+2$; s'il tire le nombre 6 son gain est de -4.
   a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

b. Présenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X dans un tableau.

c. Calculer l'espérance mathématique, notée $\mathrm{E}(X)$, de la variable aléatoire X.
Que représente $\mathrm{E}(X)$ pour le joueur ?

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
On souhaite, en changeant le nombre inscrit sur UNE boule et une seule, rendre le jeu équitable. Proposer une solution.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$ (E).
2. Déterminer la fonction g, solution particulière de (E), vérifiant $g'(0) = -1$.

Partie B

La courbe fournie sur le **document annexe** représente la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = a\mathrm{e}^{bx}$ où a et b désignent deux nombres réels.
Les points K et F ont pour coordonnées respectives (0 ; 3) et (1 ; 6). La droite (KF) est tangente à la courbe au point K.

1. Déterminer le coefficient directeur de la droite (KF).
2. À l'aide des coordonnées du point K et du coefficient directeur trouvé, déterminer les valeurs des nombres réels a et b.

Partie C

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$ par :

$$f(x) = 3\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.
2. **a.** Calculer $f'(x)$.
   b. Vérifier que, pour tout x de l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$: $f'(x) = \mathrm{e}^{x}\left(3 - \mathrm{e}^{x}\right)$.
   c. Étudier le signe de $f'(x)$.
   En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$.
3. Déterminer le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.
4. Déterminer les coordonnées du point B, intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
5. Tracer la tangente (T) et la courbe $\mathscr{C}$, après avoir placé les points A et B.
6. **a.** Hachurer la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln 6$.
   b. Calculer en unités d'aire, puis en cm^2, l'aire de la partie hachurée.
7. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

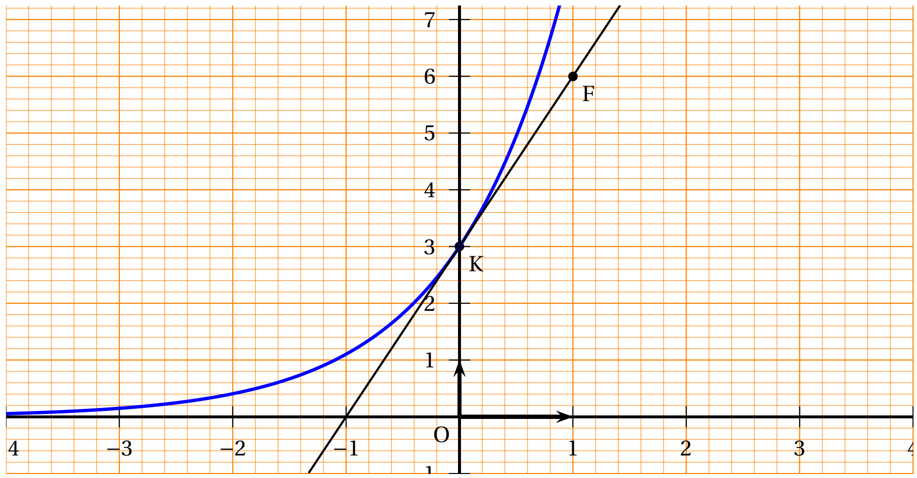
   Pour tout nombre réel α inférieur à $\ln 6$, on désigne par $\mathscr{A}(\alpha)$, l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que : $\left\{\begin{array}{ccccc}\alpha & \leqslant & x & \leqslant & \ln 6\\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x)\end{array}\right.$

   On admet que : $\mathscr{A}(\alpha) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} - 3\right)^2$ unités d'aire.

   Peut-on obtenir une aire de 8 cm^2 ?

Problème, partie B

Document annexe



∽ Baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie novembre 2010 ∽
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 3 centimètres. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0.$$

2. Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = \frac{\sqrt{3}+\text{i}}{2} \quad \text{et} \quad z_{\text{B}} = \frac{\sqrt{3}-\text{i}}{2}$$

   a. Déterminer le module et un argument de z_{A} et de z_{B}.

   b. Écrire z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.

   c. Placer les points A et B dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

   a. Construire le point C, image du point B par la rotation r.

   b. Calculer l'affixe z_{C} du point C. On donnera d'abord la forme exponentielle de z_{C} puis sa forme algébrique.

4. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AO}}$.

   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{AO}}$ a pour affixe $-\dfrac{\sqrt{3}+\text{i}}{2}$.

   b. En déduire l'affixe z_{D} du point D, image du point B par la translation t.

   c. Construire le point D.

5. Montrer que le triangle OBD est équilatéral.
6. Montrer que le triangle BCD est rectangle.

EXERCICE 2 **4 points**

Une entreprise fabrique des pièces en grande série. Une pièce est considérée conforme si elle répond aux critères de diamètre et d'épaisseur exigés. Afin de vérifier la conformité de ces pièces, on procède à deux tests : un test sur le diamètre et un test sur l'épaisseur.
On effectue les deux tests sur 500 pièces et on observe que :
— 18 pièces ont un défaut de diamètre ;
— 15 pièces ont un défaut d'épaisseur ;
— 5 pièces ont les deux défauts.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Pièces ayant un défaut de diamètre	Pièces n'ayant pas un défaut de diamètre	Total
Pièce ayant un défaut d'épaisseur			
Pièce n'ayant pas un défaut d'épaisseur			
Total	18		500

2. On prélève au hasard une pièce parmi les 500 pièces testées. Elles ont toutes la même probabilité d'être choisies. Quelle est la probabilité que la pièce prélevée présente les deux défauts ?

3. On prélève au hasard une pièce parmi celles qui présentent un défaut de diamètre. Elles ont toutes la même probabilité d'être choisies. Quelle est la probabilité, à 10^{-2} près, que la pièce prélevée présente également un défaut d'épaisseur ?

4. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée, associe le nombre de défauts de conformité de la pièce.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance de X.

PROBLÈME **11 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : Détermination d'une fonction *f*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)\text{e}^x + c$$

où a, b et c désignent trois réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie. On note f' la dérivée de la fonction f.

Sur le graphique de l'annexe, à rendre avec la copie, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 1 centimètre en abscisse et 0,25 centimètre en ordonnée.

La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 3.

La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A(0 ; 7) et la droite T est tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$. Le point B$(-2\,;\ 1)$ appartient à la droite T.

1. À l'aide des données précédentes et du graphique, donner sans justification les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(3)$.

2. Exprimer $f(0)$ en fonction de b et de c.

3. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (ax+a+b)\text{e}^x$.

b. En déduire les expressions de $f'(0)$ et de $f'(3)$ en fonction de a et de b.

4. **a.** En utilisant les résultats des questions 1., 2. et 3.b, montrer que a, b et c vérifient le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b+c &=& 7\\ a+b &=& 3\\ 4a+b &=& 0\end{array}\right.$$

b. Déterminer les valeurs de a, b et c puis donner l'expression de $f(x)$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

Dans la suite du problème, on admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-x+4)\text{e}^x + 3$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. En remarquant que, pour tout réel x, $f(x) = -x\text{e}^x + 4\text{e}^x + 3$, calculer la limite de la fonction f en $-\infty$ (on rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\text{e}^x = 0$).

Interpréter graphiquement la limite trouvée.

3. **a.** Déterminer la dérivée de la fonction f et étudier son signe.

b. Donner le tableau de variations de la fonction f.

Partie C : Calcul d'aire

1. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = (-x+5)\mathrm{e}^{x} + 3x.$$

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

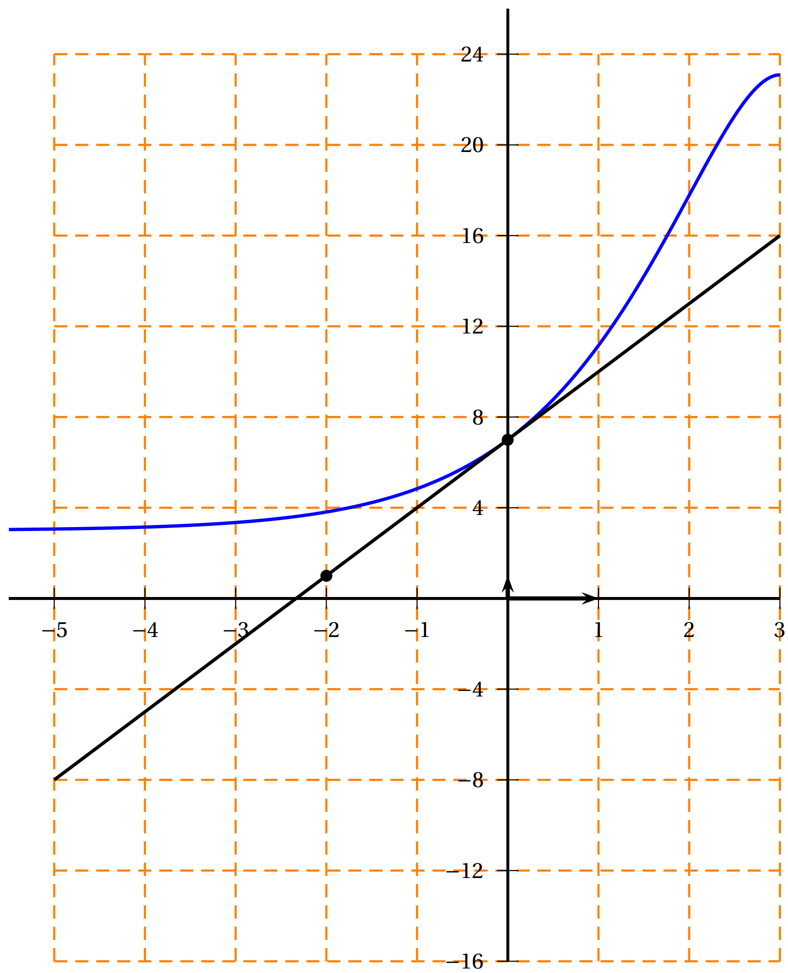
2. **a.** Soit D le domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite T d'équation $y = 3x + 7$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$.

Hachurer le domaine D sur le graphique de l'annexe.

b. Calculer, en centimètres carrés, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine D.

On donnera la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis une valeur arrondie à 10^{-2} près.

Annexe (problème) à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Métropole juin 2010 ∾
Génie mécanique, génie des matériaux

Le candidat est invité à faire figurer sur sa copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$4y'' = -y$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et où y'' désigne sa dérivée seconde.

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right).$$

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, puis vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

2. **a.** Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E).

b. Déterminer la solution particulière g de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative passe par les points A(0 ; 1) et B$\left(\pi\,;\ -\sqrt{3}\right)$.

c. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $g(x) = f(x)$.

EXERCICE 2 **6 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$;

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes l'équation :

$$(z-2)\left(z^2 - 2z + 4\right) = 0.$$

2. On considère les points A, B, C, D, E d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 2\ ;\ z_{\text{B}} = 1 + \text{i}\sqrt{3}\ ;\ z_{\text{C}} = \overline{z_{\text{B}}}\ ;\ z_{\text{D}} = 2\text{e}^{2\text{i}\frac{\pi}{3}}\ ;\ z_{\text{E}} = 2\text{ie}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}}.$$

a. Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{A} et z_{B}.

b. Donner le module et un argument de z_{C}.

c. Donner sans calcul le module et un argument de z_{D}

d. Déterminer la forme algébrique de z_{D} et z_{E}.

3. **a.** Placer les points A, B, C, D, E dans le repère indiqué sur la feuille de papier millimétré fournie.
On prendra comme unité graphique 2 cm sur chacun des axes.

Dans les questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

b. Montrer que les points A, B, C, D, E sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. Tracer le cercle dans le repère.

d. Quelle est la nature du triangle DBC ?

PROBLÈME **10 points**

Soit la fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression

$$f(x) = 6 - x - \mathrm{e}^{-x}.$$

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Étudier la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(6\mathrm{e}^{x} - x\mathrm{e}^{x} - 1\right)$. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. **a.** Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 6$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

3. On note f' la fonction dérivée de f sur R.

a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ peut se mettre sous la forme
$f'(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{x} \geqslant 0$.

c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f.

4. Soit Δ' la parallèle à Δ passant par l'origine.
Calculer les coordonnées du point d'intersection N de Δ' et de $\mathscr{C}_f$.

5. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\ln(6)$.

6. En utilisant une feuille de papier millimétré, tracer dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites Δ, Δ' et $\mathscr{T}$. On prendra comme unité graphique 1 cm sur chacun des axes.

7. Soit la fonction F, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression

$$F(x) = 6x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{e}^{-x}.$$

a. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Hachurer sur le graphique le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = -\ln(6)$ et l'axe des ordonnées.

c. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 de la partie hachurée.
On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie de $\mathscr{A}$ au dixième de cm^2.

Baccalauréat STI Métropole septembre 2010
Génie mécanique, des matériaux

EXERCICE 1 **6 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + z + 1 = 0$$

On notera z_1 et z_2 les solutions de cette équation, z_1 étant celle dont la partie imaginaire est négative.

b. Montrer que $z_1^2 = z_2$.

2. **a.** On considère dans la suite de l'exercice les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_3 = 1.$$

Écrire chacun de ces trois nombres complexes sous forme trigonométrique et en déduire que $z_1^3 = z_3$.

b. Calculer z_1^{2010}.

3. **a.** Placer les points A, B et C dans le plan. On prendra 4 cm comme unité graphique sur chacun des axes.

b. Montrer que ces points sont sur un cercle, dont on déterminera le centre et le rayon.

Dans les questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

4. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
5. Placer le point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme puis calculer les coordonnées du point D.
6. Expliquer, sans faire de calculs, pourquoi les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

EXERCICE 2 **4 points**

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E_0 :) \quad y'' + 9y = 0$$

où y est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0).
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E_0) vérifiant les conditions $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 3$.
3. À l'aide de la formule $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, montrer que $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Partie B

On considère maintenant l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad y'' + 9y = e^{-x}.$$

1. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{10}\text{e}^{-x}$ est une solution de (E_1).
2. Montrer que la fonction $f + g$ est solution de (E_1).

PROBLÈME **10 points**

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$$

1. Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction g et montrer que cette dérivée peut s'écrire :

$$g'(x) = \frac{2\left(x^2-1\right)}{x}$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ et établir le tableau de variations de la fonction g (les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$ ne sont pas demandées).
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie et dérivable sur $]0~;~+\infty[$, d'expression :

$$f(x) = \frac{2\ln(x)}{x} + x - 1$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentant la fonction f dans le repère donné sur l'annexe jointe au sujet.

1. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ et en déduire que la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f admet une asymptote dont on déterminera une équation.

   b. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

   c. Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = x - 1$ comme asymptote.

   d. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite Δ.

   e. Tracer la droite Δ sur le graphique donné dans l'annexe, à rendre avec la copie.
2. **a.** Calculer la fonction dérivée f' de f et montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b. Déduire de la partie A le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3. **a.** Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

   b. Représenter $\mathcal{T}$ sur le graphique joint en annexe, à rendre avec la copie.

Partie C

1. **a.** Calculer la dérivée de la fonction H définie sur $]0~;~+\infty[$ par $H(x) = [\ln(x)]^2$.

   b. En déduire une primitive de la fonction f.
2. Déduire de ce calcul la valeur exacte de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\text{d}x$.
3. Cette intégrale correspond à l'aire calculée en unités d'aire d'une surface. Hachurer cette surface sur le graphique de l'annexe, à rendre avec la copie.

Annexe à rendre avec la copie