∽ Baccalauréat STI 2012 ∾

L'intégrale de mars à novembre 2012

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

∽ Baccalauréat STI Arts appliqués – Métropole–La Réunion ∾
21 juin 2012

EXERCICE 1 **10 points**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

L'association « Arts martiaux et Self-défense » d'une municipalité propose à ses adhérents plusieurs activités dont le judo et la self-défense.

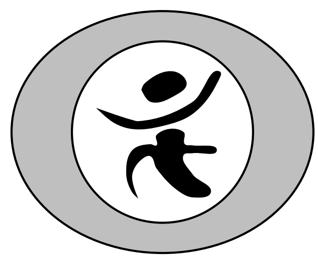
60 % des adhérents sont inscrits au cours de judo, 36 % au cours de self-défense et 5 % aux deux.
On interroge un adhérent au hasard.
On note J l'évènement : « l'adhérent interrogé pratique le judo » et S l'évènement : « l'adhérent interrogé est inscrit au cours de self-défense ».
Pour tout évènement D, on note $\overline{D}$ l'évènement contraire de D.

	J	$\overline{J}$	total
S			36 %
$\overline{S}$			
total			100 %

1. Recopier et compléter le tableau des fréquences en pourcentages ci-dessus.
2. Définir par une phrase les évènements suivants et calculer les probabilités de ces évènements :
   a. $S \cap \overline{J}$;
   b. $\overline{S} \cap J$;
   c. $\overline{S} \cap \overline{J}$.

Partie B

Pour promouvoir leur association, ses dirigeants ont demandé qu'on leur réalise un logo.
Il est conçu à partir d'un cercle (C) contenu dans une ellipse (E).
Le nom de l'association s'inscrira dans la partie grisée limitée par le cercle et l'ellipse comme indiqué ci-contre.

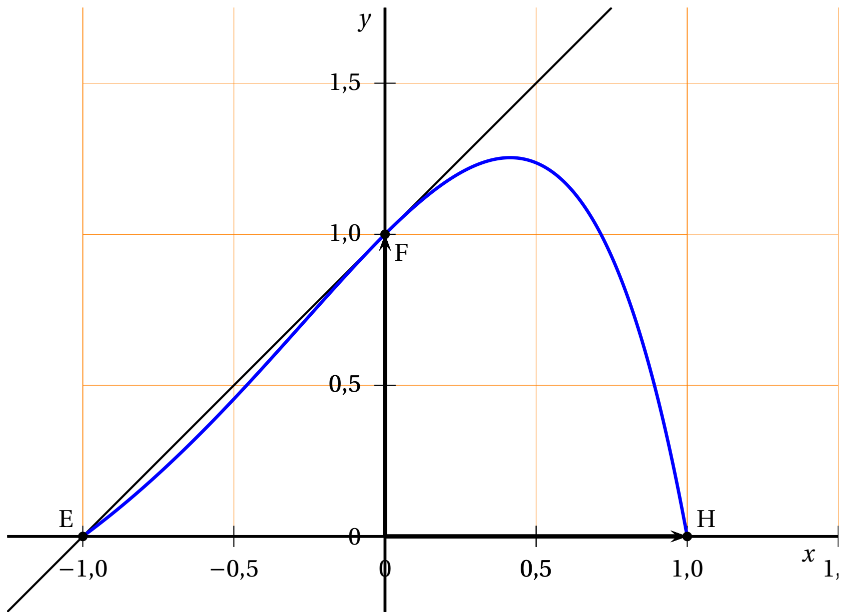


On a représenté en annexe (à joindre à la copie) l'ellipse (E) dans un repère orthonormé du plan d'origine O.

1. Les sommets A, A′, B et B′ ont des coordonnées entières.
   Préciser les coordonnées de ces sommets.
2. Déterminer une équation de (E) et calculer les coordonnées de ses foyers F et F′.
3. Le cercle (C) a pour diamètre [FF′]. Tracer ce cercle et vérifier que l'aire du disque de diamètre [FF′] est égale à 9π.
4. Les dirigeants souhaitent que la partie du logo dans laquelle s'inscrira le nom de l'association occupe plus de la moitié de la surface délimitée par l'ellipse (E). Est-ce bien le cas ?
   On admettra que l'aire de l'ellipse (E) est égale à $\pi \times \text{OA} \times \text{OB}$.

EXERCICE 2 **10 points**

La courbe (C) représentée ci-dessous est celle d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 1]$. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
Les points E, F et H sont des points de la courbe (C) à coordonnées entières.



Partie A

1. Par lecture graphique, préciser $f(-1), f(0)$ et $f(1)$.
2. Déterminer une équation de la droite (EF).
   Marine pense que la droite (EF) est tangente à la courbe (C) au point F. Si Marine a raison, conjecturer alors la valeur de $f'(0)$.
3. Julien affirme que la tangente au point d'abscisse $0,4$ est parallèle à l'axe des abscisses. Si Julien a raison, que peut-on en déduire pour $f'(0,4)$?

Partie B

La fonction représentée dans la partie A est la fonction définie sur l'intervalle $[-1~;~1]$ par :

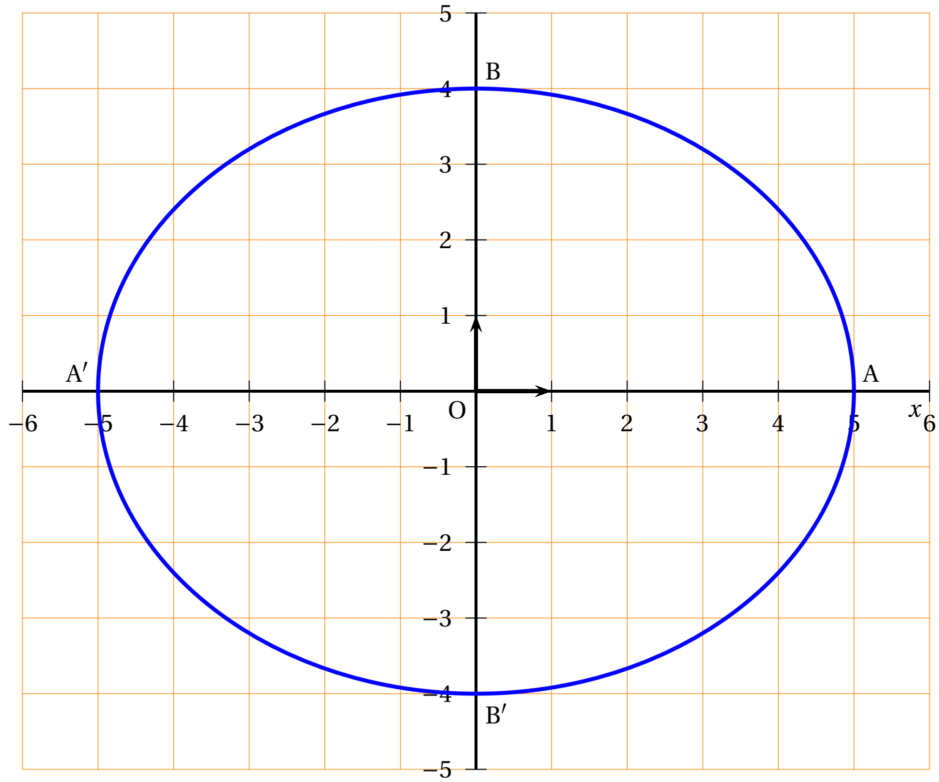
$$f(x) = \left(1 - x^2\right)\text{e}^x.$$

1. Comparer les valeurs de $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$ obtenues par le calcul avec celles obtenues par lecture graphique.
2. On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[-1~;~1]$.
   a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-1~;~1]$, $f'(x) = \left(-x^2 - 2x + 1\right)\text{e}^x$.
   b. En déduire la valeur exacte de $f'(0)$ et de $f'(0,4)$.
3. La conjecture de Marine est-elle validée ? Et celle de Julien ?
   a. Étudier le signe de $-x^2 - 2x + 1$.
   b. En déduire le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-1~;~1]$.

Partie C

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-1~;~1]$, on pose $F(x) = \left(-1 + 2x - x^2\right)\text{e}^x$.
   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[-1~;~1]$.
2. Calculer l'aire exacte, en unité d'aire, de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C), les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

Annexe à l'exercice 1 - À joindre à la copie



Baccalauréat STI Arts appliqués 11 septembre 2012
Métropole-La Réunion

EXERCICE 1 **8 points**

Au départ d'une randonnée, trois itinéraires différents sont proposés à un groupe de 48 randonneurs : un itinéraire pour débutant, un de difficulté moyenne et un de niveau élevé.
Ce groupe est composé de 32 femmes et de 16 hommes.
Concernant le choix de l'itinéraire :

- 5 femmes et 2 hommes choisissent l'itinéraire de niveau débutant ;
- 25 % des randonneurs choisissent l'itinéraire de difficulté moyenne et parmi eux, il y a autant de femmes que d'hommes ;
- Les autres randonneurs choisissent l'itinéraire de niveau élevé.

On choisit au hasard un randonneur (on suppose que tous les randonneurs ont la même chance d'être choisis) et on note :
F l'évènement « le randonneur est une femme » ;
H l'évènement« le randonneur est un homme » ;
D l'évènement« le randonneur choisit l'itinéraire de niveau débutant » ;
E l'évènement« le randonneur choisit l'itinéraire de niveau élevé ».

Tous les résultats des différents calculs seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible. On pourra utiliser un arbre ou un tableau.

1. Calculer la probabilité $p(F)$ de l'évènement F.
2. Calculer la probabilité $p(E)$ de l'évènement E.
3. Définir par une phrase l'évènement noté $H \cap E$ et calculer sa probabilité $p(H \cap E)$.
4. Montrer que la probabilité de l'évènement « le randonneur est une femme ou choisit l'itinéraire de niveau débutant » est $\dfrac{17}{24}$.
5. Dans cette question, on choisit au hasard un randonneur parmi les hommes. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi l'itinéraire de niveau élevé ?
6. Commenter et critiquer éventuellement cette phrase : « Le niveau des femmes de ce groupe est plus élevé que celui des hommes ».

EXERCICE 2 **12 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^2 - 4.$$

On note (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormal.

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, puis tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe (C) (unité graphique : 2 cm).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$							

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-3\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 3\ln(x+3).$$

On note $\left(C'\right)$ la courbe représentative de la fonction f dans le même repère que précédemment.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to -3} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$.
3. Étudier les variations de la fonction f.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ et interpréter graphiquement le résultat.
5. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir au dixième) :

x	$-2,5$	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

6. On considère la droite T_1 tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ et la droite T_2 tangente à la courbe $\left(C'\right)$ au point d'abscisse -2.
   a. Déterminer une équation de la droite T_1 et une équation de la droite T_2.
   b. Quelle est la position relative de ces deux droites ?
   c. Tracer les droites T_1 et T_2 et la courbe $\left(C'\right)$ dans le même repère que la courbe (C).

Partie C

On se propose de déterminer l'aire de la partie D du plan, limitée par les courbes (C) et $\left(C'\right)$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$.

1. On considère la fonction F définie sur $]-3\ ;\ 3]$ par :

$$F(x) = 3(x+3)\ln(x+3) - 3x.$$

   Vérifier que F est une primitive de la fonction f.
2. On admet que pour tout x de l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$, $g(x) \leqslant f(x)$ et que l'aire de la partie D en unités d'aire est égale à $\displaystyle\int_{-2}^{3} \left(f(x) - g(x)\right)\,\mathrm{d}x$.
   Donner la valeur exacte de l'aire de la partie D en cm^2 puis une valeur approchée au mm^2 près.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Antilles-Guyane 20 juin 2012 ∾
Génie mécanique (options A et F), civil, énergétique

EXERCICE 1 **5 points**

Une machine fabrique 10 000 pièces par jour. En sortie de fabrication, on a constaté qu'une pièce pouvait présenter deux sortes de défauts : A et B.
Un contrôle qualité a permis d'établir qu'en moyenne :

— 10 % du total des pièces présentent le défaut A ;
— 15 % du total des pièces présentent le défaut B ;
— 2 % du total des pièces présentant à la fois les défauts A et B.

1. Compléter le tableau figurant en annexe 1 qui sera à rendre avec la copie.
Aucune justification n'est attendue.

2. On prélève une pièce au hasard dans la production d'une journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

a. Calculer la probabilité p_1 qu'elle n'ait aucun défaut.

b. Calculer la probabilité p_2 qu'elle présente un seul défaut.

3. Une entreprise commercialise les pièces fabriquées par cette machine.

— Les pièces qui ne présentent aucun défaut sont vendues 20 euros chacune.
— Les pièces qui présentent les deux défauts ne sont pas mises en vente.
— Parmi les pièces qui présentent un seul défaut, 80 % sont vendues 12 euros chacune et les autres ne sont pas mises en vente.
— Dans tous les cas, le coût de fabrication d'une pièce est 10 euros.

a. Calculer sur les 10 000 pièces fabriquées le nombre de pièces vendues 12 euros.

b. Sur les 10 000 pièces fabriquées, montrer que l'entreprise peut espérer un bénéfice de 74 160 euros.

EXERCICE 2 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
Chaque réponse juste rapporte 1 point ; une réponse fausse enlève 0,25 point ; une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, il est ramené à zéro.

On désigne par $\imath$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Le nombre complexe $z = 1 + \imath\sqrt{3}$ a pour nombre complexe conjugué :

a. $-1 - \imath\sqrt{3}$ **b.** $-1 + \imath\sqrt{3}$ **c.** $1 - \imath\sqrt{3}$ **d.** $\dfrac{1}{1 + \imath\sqrt{3}}$

2. L'équation $\dfrac{z-1}{z+1} = \imath$ d'inconnue z admet pour solution :

a. $\imath$ **b.** $\dfrac{1}{2} - \imath\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\dfrac{1}{2} + \imath\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **d.** $-\imath$

3. Le nombre complexe $z = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\imath\frac{3\pi}{4}}$ a pour forme algébrique :

a. $-2 + 2\imath$ **b.** $2 + 2\imath$ **c.** $2 + \imath\sqrt{2}$ **d.** $2 - 2\imath$

4. Le nombre complexe $z = -4\imath$ a respectivement pour module et argument :

a. 4 et 0 **b.** 1 et $\dfrac{\pi}{4}$ **c.** 4 et $-\dfrac{\pi}{2}$ **d.** -4 et $\dfrac{3\pi}{2}$

5. Le nombre complexe $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\imath$ a pour notation exponentielle :

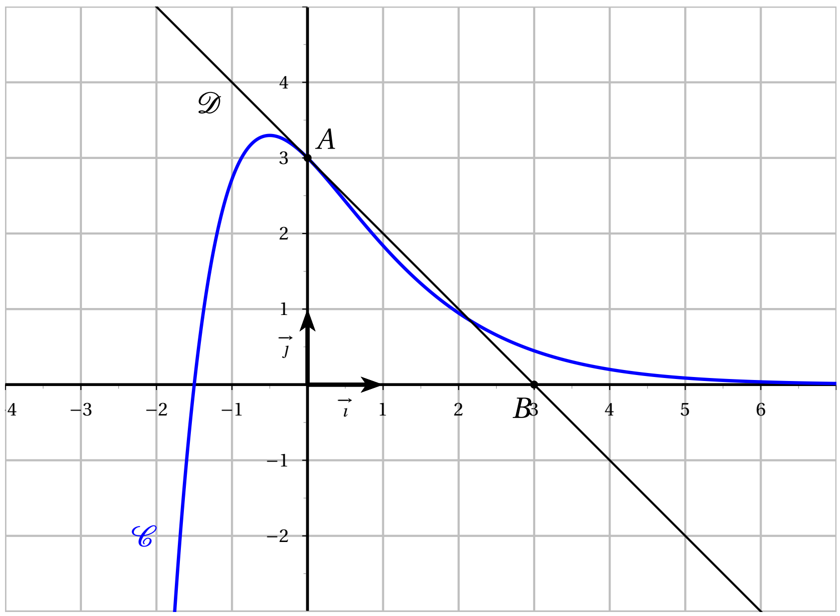
a. $-\mathrm{e}^{-\imath\frac{\pi}{6}}$ **b.** $\mathrm{e}^{-\imath\frac{\pi}{6}}$ **c.** $\mathrm{e}^{\imath\frac{\pi}{6}}$ **d.** $-\mathrm{e}^{\imath\frac{\pi}{6}}$

PROBLÈME **10 points**

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Les deux parties de ce problème peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : lectures graphiques

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$, où a et b sont deux nombres réels.



La droite $\mathscr{D}$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.
Cette tangente passe par le point B de coordonnées $(3\,;\,0)$.

1. a. Lire graphiquement $f(0)$.

b. En déduire la valeur de b.

2. a. Lire graphiquement le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{D}$.

b. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Pour tout réel x, calculer $f'(x)$, puis en déduire la valeur de a.

Partie B : étude d'une fonction et calcul intégral

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 3)\mathrm{e}^{-x}$.

1. a. Étudier la limite de f en $-\infty$.

b. Étudier la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = (-2x - 1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de f.

3. **a.** Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x) = -f'(x) + 2\text{e}^{-x}$.

b. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

4. On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$.

a. Calculer la valeur exacte de I, puis donner une valeur approchée de I à 10^{-3} près.

b. Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0~;~1]$.

c. Interpréter I comme l'aire, en unités d'aire, d'un domaine du plan à définir.

Annexe de l'exercice 1
(à rendre avec la copie)

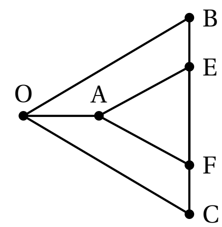
	Nombre de pièces présentant le défaut A	Nombre de pièces ne présentant pas le défaut A	Total
Nombre de pièces présentant le défaut B			
Nombre de pièces ne présentant pas le défaut B			
Total			10 000

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Génie mécanique, civil 21 juin 2012 ∾ Métropole

EXERCICE 1 **6 points**

On considère le puzzle représenté ci-contre. Il est constitué de 3 pièces : le triangle AEF et les quadrilatères AEBO et AFCO, découpés dans le triangle OBC.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm, fourni en annexe 1. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$



1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. On considère les points B et C d'affixes respectives $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$ et $z_C = 4\sqrt{3} - i$.
   a. Vérifier que $z_B = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$.
   b. En déduire une écriture exponentielle du nombre complexe z_C.
   c. Placer précisément les points B et C dans le repère défini précédemment.
   d. Démontrer que le triangle OBC est équilatéral.
3. Le point A a pour coordonnées (3 ; 0). Le point D a pour coordonnées $\left(4\sqrt{3} ; 0\right)$.
   a. Écrire les affixes des points z_A et z_D des points A et D.
   b. Calculer les affixes du point E milieu du segment [BD] et du point F milieu du segment [CD].
   c. Placer les points A, D, E et F dans le repère figurant en annexe 1.
   d. Calculer l'aire exacte, en cm^2, du triangle AEF.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même si elle est incomplète, toute prise d'initiative, même si elle n'aboutit pas, sera prise en compte.*
   Quelles sont les valeurs exactes, en cm^2, des aires des deux autres pièces du puzzle ?

EXERCICE 2 **5 points**

Un puzzle est constitué de trois pièces : un triangle et deux quadrilatères.
Un forain propose le jeu suivant utilisant six boîtes :
Trois boîtes parmi les six contiennent une et une seule pièce de ce puzzle, les autres restant vides.
Une partie consiste :

— à placer les six boîtes au hasard sur un plateau ;
— à demander au joueur de choisir une boîte parmi les six.

Le jeu nécessite une mise de 2 euros. Il consiste à ouvrir une boîte au hasard parmi les six.

— Si le joueur trouve la pièce triangulaire on lui remet 5 euros : son gain relatif est alors de 3 euros.
— Si le joueur trouve une autre pièce on lui remet 3 euros.
— Si la boîte est vide on ne lui remet rien.

1. On considère la variable aléatoire X qui prend comme valeurs les gains relatifs du jeu précédent, c'est-à-dire la somme reçue (éventuellement nulle) moins la mise de 2 euros.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X. 1

c. Montrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $-\dfrac{1}{6}$. Interpréter le résultat obtenu.

d. Le forain paie 45 euros par jour pour la location de son emplacement. Trouver le nombre minimum de parties qu'il doit organiser chaque jour en moyenne pour espérer ne pas perdre d'argent.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche même si elle est incomplète, toute prise d'initiative, même si elle n'aboutit pas, sera prise en compte.*

Un joueur prétend qu'il peut modéliser ce jeu à l'aide d'un dé cubique équilibré. Proposer un modèle correspondant à son affirmation.

PROBLÈME **9 points**

Partie A

Vérifier que la fonction g définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;3]$, par

$$g(x) = 2\mathrm{e}^{-0,1x}$$

est solution de l'équation différentielle $y' + 0,1y = 0$ où y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur $[0\,;3]$.

On a tracé $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthonormal d'unité graphique 2 cm donné en annexe (2).

Partie B

On considère la fonction f définie, pour tout nombre x réel de l'intervalle $[-2\,;0]$, par

$$f(x) = 2\ln(\mathrm{e} + x),$$

où e est le nombre réel tel que $ln(\mathrm{e}) = 1$.

1. **a.** Montrer, en détaillant les calculs, que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;0]$, la dérivée f' de la fonction f est définie par

$$f'(x) = \frac{2}{\mathrm{e} + x}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;0]$.

2. Établir, par la méthode de votre choix, que le nombre réel $1 - \mathrm{e}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-2\,;0]$.

3. Dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on a placé le point $\mathrm{A}(-\mathrm{e}\,;0)$.

a. Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe représentative de la fonction f en B, son point d'abscisse 0.

b. Vérifier que le point A appartient à $\mathscr{T}$.

c. Tracer précisément $\mathscr{T}$.

d. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[1 - \mathrm{e}\,;0]$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthonormal d'unité graphique 2 cm donné en annexe 2. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie C

Hachurer la partie P du plan limitée par la réunion des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 3$.
Représenter sur votre copie l'allure du solide S engendré par la rotation de la partie hachurée P autour de l'axe des abscisses.

Partie D

On rappelle que le volume V du solide engendré par la rotation autour de l'axe (Ox) de la partie du plan limitée par la courbe représentative d'une fonction h, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ ($a < b$) est

$$V = \pi \int_a^b (h(x))^2 \,\mathrm{d}x \quad \text{unités de volume.}$$

1. Soit :

$$I = \int_{1-\mathrm{e}}^{0} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x.$$

On admet que $I = 4\mathrm{e} - 8$. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de I.

2. a. Vérifier que la fonction H définie, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,3]$, par

$$H : x \longmapsto H(x) = -20\mathrm{e}^{-0,2x}$$

est une primitive de la fonction qui à tout réel x de l'intervalle [0 ; 3J associe $(g(x))^2$.

b. On note

$$J = \int_0^3 (g(x))^2 \,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $J = 20\left(1 - \mathrm{e}^{-0,6}\right)$.

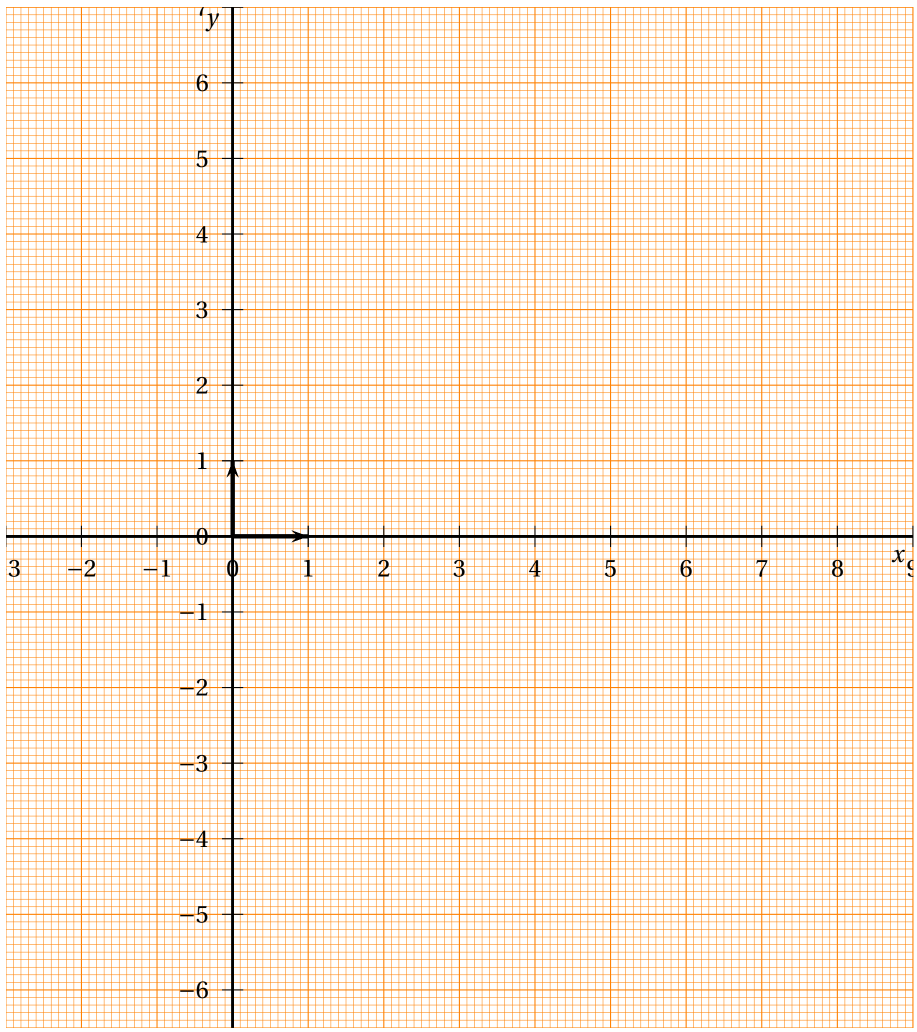
c. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de J.

3. *Cette question est à choix multiples (QCM). Une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point. Indiquer sur la copie la réponse choisie.*

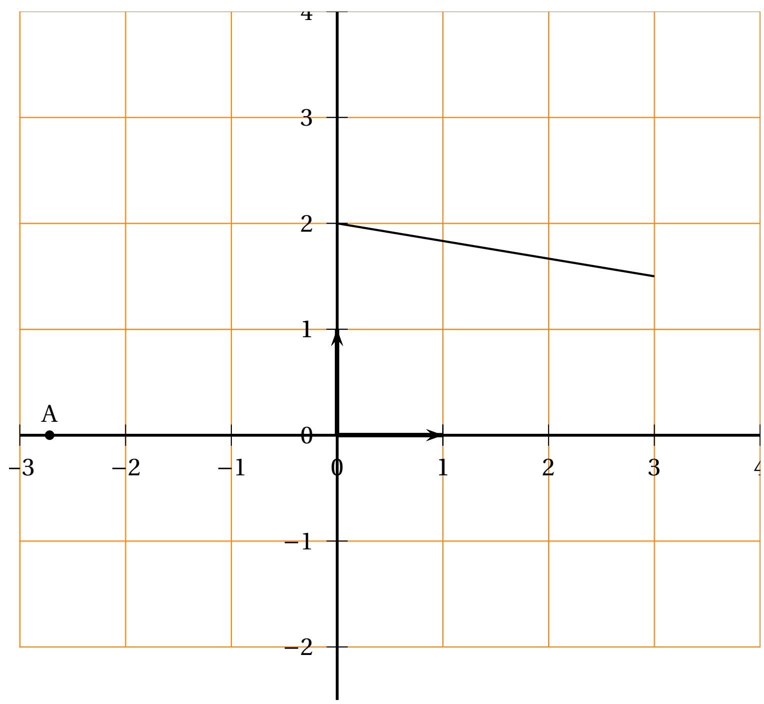
Dans le tableau ci-dessous, parmi les quatre réponses proposées pour le volume en cm^3 du solide S, une seule est valable, laquelle ? Expliquer votre choix.

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
12	285	299	37

Annexe 1



Annexe 2



Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie 11 juin 2012
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Les quatre questions sont indépendantes. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat mentionnera le numéro de la question, et la réponse qu'il pense être juste, sans justification.
Une bonne réponse rapporte un point, l'absence de réponse ou une mauvaise réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Question 1

Une entreprise fabrique des composants, qui peuvent présenter deux types de défauts :

- 30 % des composants présentent le défaut A ;
- 10 % des composants présentent le défaut B ;
- la moitié des composants qui présentent le défaut B présentent aussi le défaut A.

On prélève dans la production un composant au hasard, en supposant l'équiprobabilité des tirages.
La probabilité que le composant prélevé ne présente aucun des deux défauts est égale à :

Réponse A : 0,05 **Réponse B** : 0,65 **Réponse C** : 0,5 **Réponse D** : 0,45

Les questions 2, 3, 4 portent sur la situation suivante :

Un jeu se présente sous la forme d'une machine comprenant un carré de neuf cases où sont inscrits des numéros, comme sur le schéma ci-contre. Lorsqu'on actionne la machine, l'une des cases s'allume de façon aléatoire, toutes les cases ayant la même probabilité de s'allumer.
Pour jouer une partie, un joueur mise 1 € et actionne la machine, il reçoit alors un montant en euro égal au numéro de la case qui s'est allumée. Par exemple, si la case portant le numéro 3 s'est allumée, le joueur a misé 1 € et reçoit 3 € donc son gain algébrique est égal à 2 €

2	0	2
0	1	0
0	3	0

Question 2
Un joueur joue une partie. La probabilité que son gain algébrique soit strictement positif est égale à :

Réponse A : 0 **Réponse B** : $\dfrac{1}{3}$ **Réponse C** : $\dfrac{2}{3}$ **Réponse D** : 1

Question 3
Un joueur joue une partie. Son gain algébrique moyen, en euro, est égal à :

Réponse A : 0 **Réponse B** : $\dfrac{1}{9}$ **Réponse C** : $\dfrac{1}{3}$ **Réponse D** : $-\dfrac{1}{9}$

Question 4
On veut modifier le numéro placé dans la case centrale (en grisé sur la figure) pour que le gain algébrique moyen du joueur qui joue une partie soit égal à 0. Il faut pour cela placer dans la case centrale le numéro :

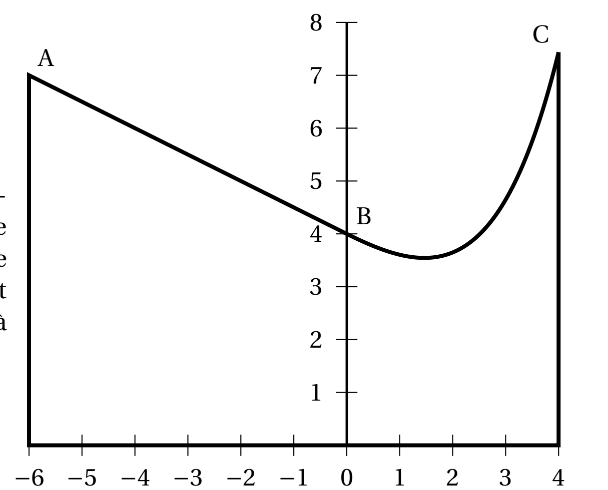
Réponse A : 0 **Réponse B** : 2 **Réponse C** : 4 **Réponse D** : 6

EXERCICE 2 — 5 points

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$. Donner les solutions sous forme algébrique.
2. On note $w = 1 + \text{i}$ et $\text{a} = 2 + \text{i}$, où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
   a. On pose $b = a \times w$. Calculer la forme algébrique du nombre complexe b.
   b. On pose $c = \dfrac{a}{w}$. Démontrer que $c = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}$.
   c. Calculer le module de b et le module de c.
3. Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
   On note A, B et C les points du plan d'affixes respectives a, b et c.
   a. Faire une figure, dans laquelle on placera les points A, B, C. L'unité graphique est 2 cm.
   b. Calculer la longueur BC.
   c. Quelle est la nature du triangle OBC ? Justifier la réponse.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que la droite (OA) est une bissectrice du triangle OBC.

PROBLÈME **11 points**

L'organisateur d'une compétition de skateboard souhaite construire une piste dont le profil dans un plan est schématisé ci-contre dans un repère orthonormal, en convenant qu'une unité dans le repère correspond à 1 mètre.



Sur ce profil, on considère que :

- la piste entre les points A et B est rectiligne, elle est donc modélisée par un segment ;
- la piste entre les points B et C est modélisée par la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 4]$ par : $f(x) = 2 + \left(\dfrac{1}{4}x^2 - x + 2\right)\text{e}^{\frac{x}{4}}$.

Partie A - Modélisation de la piste

Dans le repère, les coordonnées des points A et B sont respectivement A$(-6 ; 7)$ et B$(0 ; 4)$.

1. **Détermination graphique d'une équation de la droite (AB)**
   La droite (AB) a une équation du type $y = ax + b$, où a et b sont des réels que l'on va déterminer dans cette question.
   a. À partir des données de l'énoncé, donner la valeur du nombre b.
   b. En utilisant les coordonnées du point A, déterminer la valeur du nombre a.
2. **Raccordement de la droite (AB) avec la courbe représentative de la fonction f**
   On note f' la dérivée de f et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère.

a. Démontrer que pour tout nombre réel x : $f'(x) = \dfrac{1}{16}\left(x^2 + 4x - 8\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}$.

b. Vérifier que le point B est situé sur la courbe $\mathcal{C}_f$ puis que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B.

Partie B - Étude de la fonction f

1. **Étude des variations et du signe de la fonction f**

   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 4x - 8 = 0$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$. Préciser les valeurs, arrondies au dixième, du maximum et du minimum de la fonction f sur cet intervalle.

   d. En déduire que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,4]$, $f(x) > 3,5$.

2. **Calcul d'une intégrale**

   Soit F la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,4]$ par :

$$F(x) = 2x + \left(x^2 - 12x + 56\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}.$$

   a. Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

   b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C - Calcul d'une aire plane

Pour déterminer le volume de béton nécessaire à la construction de la piste, l'organisateur doit connaître, sur le profil plan, l'aire de la surface située sous la piste. Pour cela, il découpe cette surface en deux parties.

1. On note O et E les points de coordonnées respectives O$(0\,;\,0)$ et E$(-6\,;\,0)$, et $\mathcal{S}_1$ l'aire en m^2 du quadrilatère ABOE.

   a. Quelle est la nature du quadrilatère ABOE ?

   b. En déduire la valeur exacte de $\mathcal{S}_1$.

2. On note $\mathcal{S}_2$ l'aire en m^2 de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$ l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.

   Calculer la valeur exacte de $\mathcal{S}_2$, puis sa valeur arrondie au dm^2. En déduire l'aire totale du profil de la piste, en m^2.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Antilles-Guyane 13 septembre 2012
Génie mécanique (options A et F), Génie civil, Génie énergétique

Dans tout le sujet, on désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

EXERCICE 1 **6 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. On donne $P(z) = z^3 - 6z^2 + 18z - 27$ où z est un nombre complexe.

a. Calculer $P(3)$.
Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z - 3)\left(az^2 + bz + c\right)$.

b. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - 3z + 9 = 0$ puis en déduire les solutions de $P(z) = 0$.

2. On considère les points A, B et F d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 3, \quad z_{\text{B}} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{F}} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}.$$

a. Donner la forme trigonométrique des nombres complexes z_{A}, z_{B} et z_{F}.

b. Justifier que les points A, B et F sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

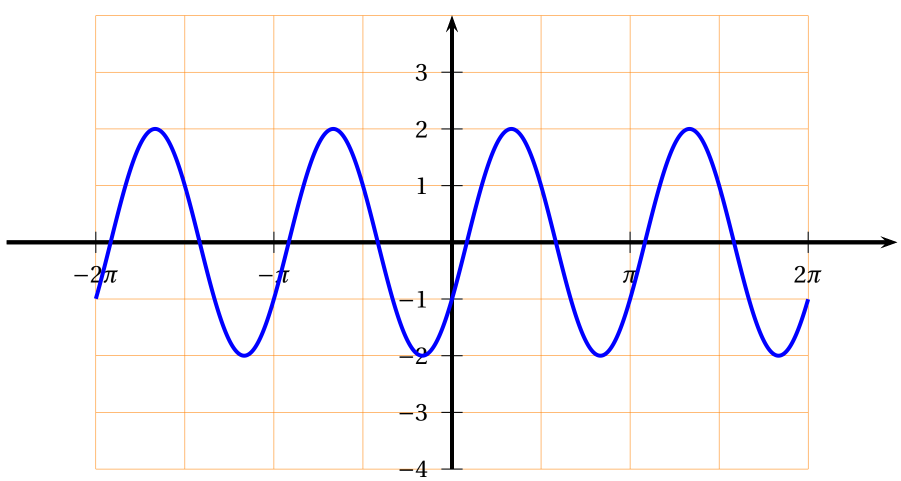
c. Placer les points A, B et F dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

d. Calculer les distances AB et AF ; quelle est la nature du quadrilatère OBAF ?

EXERCICE 2 **4 points**

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$ par

$$f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$



1. **a.** Par lecture graphique, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$ dans l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

   b. Résoudre l'équation $f(x) = 2$ sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

2. On note (E) l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, où y est une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et y'' sa fonction dérivée seconde.

   a. Résoudre l'équation (E).

   b. Déterminer la solution particulière g de (E) qui vérifie $g(0) = -1$ et $g'(0) = 2\sqrt{3}$ où g' désigne la fonction dérivée de g.

   c. Comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in [-2\pi\ ;\ 2\pi]$.
   On rappelle que pour tous réels a et b, on a : $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

   Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera en prise en compte dans la notation.

PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{6\text{e}^x}{\text{e}^x + 5}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

PARTIE A : Étude de la fonction *f*

1. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout réel x on a $f'(x) = \dfrac{30\text{e}^x}{(\text{e}^x+5)^2}$ puis étudier le signe de $f'(x)$ pour x dans $\mathbb{R}$.

2. **a.** Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x) = \dfrac{6}{1+5\text{e}^{-x}}$.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$ et en déduire l'existence de deux asymptotes Δ_1 et Δ_2 à la courbe $\mathscr{C}$. On précisera une équation de chacune de ces asymptotes.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 0 est $y = \dfrac{5}{6}x + 1$.

5. Dans le repère, tracer la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que les droites $\mathscr{T}$, Δ_1 et Δ_2 sur une feuille de papier millimétré.

PARTIE B : Résolution d'une équation

1. Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique x_0 sur l'intervalle $[1\,;\,5]$.

2. Graphiquement, donner un encadrement de x_0 à l'unité près, et placer x_0 sur le graphique.

3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur décimale arrondie au centième de x_0.

PARTIE C : Un calcul d'aire

1. **a.** Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = \ln\left(\text{e}^x + 5\right)$$

   est une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\text{e}^x}{\text{e}^x+5}$.

b. En déduire une primitive H de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par
$h(x) = \dfrac{6\text{e}^x}{\text{e}^x + 5} - \left(\dfrac{5}{6}x + 1\right)$.

2. a. Hachurer sur le graphique, le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f, la tangente $\mathscr{T}$ ainsi que les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

b. On admet que la fonction h est positive sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.

Montrer que la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$ de ce domaine est $\mathscr{A} = 6\ln\left(\dfrac{\text{e}^2 + 5}{6}\right) - \dfrac{11}{3}$.

Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat STI Métropole 14 septembre 2012 ∾
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 + 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

2. On considère les points A et B du plan d'affixes respectives :

$$z_A = -\sqrt{3} + i, \quad z_B = \overline{z_A} = -\sqrt{3} - i.$$

   a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A et z_B.
   b. Écrire z_A sous la forme $re^{i\theta}$, où r est un réel strictement positif et θ un réel de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.
   c. Placer les points A et B dans le plan muni du repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$. (La figure sera réalisée sur la copie.)
   d. Démontrer que le triangle OAB est un triangle équilatéral.

3. On considère l'équation d'inconnue z :

$$2z - 4i = iz + 2.$$

   a. Démontrer que le nombre complexe 2i est la seule solution de cette équation.
   b. On note C le point d'affixe 2i. Placer le point C dans le plan muni du repère $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   c. Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.

EXERCICE 2 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des réponses est correcte. Une absence de réponse ou une réponse erronée n'ôte pas de point.
On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la réponse choisie.

1. On considère l'équation différentielle

$$y'' + 4y = 0,$$

   où y représente une fonction de la variable t, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Une solution de l'équation différentielle est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   a. $t \longmapsto e^{-2t}$;
   b. $t \longmapsto \cos(4t)$;
   c. $t \longmapsto \sin(4t)$;
   d. $t \longmapsto \cos(2t)$.

2. (u_n) est la suite arithmétique dont le terme de rang 1 est $u_1 = 2$ et dont le terme de rang 3 est $u_3 = 8$.
   a. la raison de la suite arithmétique (u_n) est égale à 2 ;
   b. la raison de la suite arithmétique (u_n) est égale à 3 ;
   c. la raison de la suite arithmétique (u_n) est -2 ;
   d. la suite arithmétique n'a pas de raison.
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$. La fonction f' dérivée de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
   a. $f'(x) = \mathrm{e}^x$;
   b. $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^x$;
   c. $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$;
   d. $f'(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$.
4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\mathrm{e}^{1-x}$. La courbe représentative de f admet pour tangente au point d'abscisse 1 dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$:
   a. la droite d'équation $y = 1$;
   b. la droite d'équation $x = 1$;
   c. la droite d'équation $y = -3x+6$;
   d. la droite d'équation $y = \dfrac{-6}{\mathrm{e}^2}x + \dfrac{9}{\mathrm{e}^2}$

PROBLÈME **11 points**

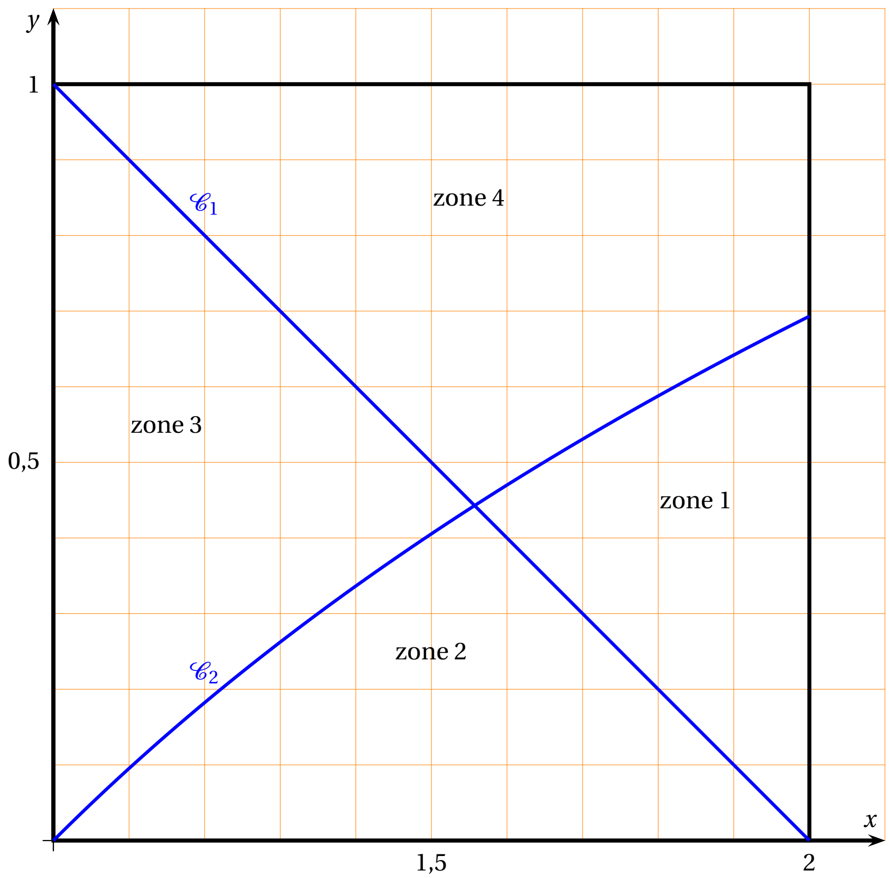
Une cible est constituée d'un carré de 10 cm de côté. La surface de la cible est partagée en quatre zones délimitées par deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Partie A : Étude de fonction

On admet que les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentent, dans un repère orthonormé d'unité 10 cm, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ par

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 2-x.$$

1. Attribuer à chacune des fonctions f et g sa courbe représentative $\mathscr{C}_1$ ou $\mathscr{C}_2$, en justifiant votre choix.
2. Résoudre graphiquement, sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ avec la précision permise par le dessin, l'équation $f(x) = g(x)$.
3. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.
   a. Montrer que la fonction dérivée h' de la fonction h est définie sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ par $h'(x) = \dfrac{-x-1}{x}$.
   b. Déterminer le signe de $h'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,2]$. En déduire le tableau des variations de la fonction h.
   c. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,2]$. Donner une valeur approchée de α au centième près.
4. Donner le tableau de signe de la fonction h sur l'intervalle $[1\,;\,2]$, puis interpréter graphiquement le résultat.


y
1
0,5
x
1,5
2
$\mathscr{C}_1$
$\mathscr{C}_2$
zone 1
zone 2
zone 3
zone 4

Partie B : Calculs d'aires

1. L'objet de cette question est de déterminer l'aire de la zone 3 sur le dessin.

a. Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ par

$H(x) = 3x - \dfrac{x^2}{2} - x\ln(x)$ est une primitive de la fonction h.

b. Montrer que :

$$\int_1^{\alpha} h(x)\,\mathrm{d}x = 3\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha\ln(\alpha) - \frac{5}{2}.$$

c. En déduire une valeur approchée au cm^2 près de l'aire $\mathcal{A}_3$ de la zone 3. On prendra 1,56 pour valeur approchée de α.

2. Déterminer une valeur approchée au cm^2 près de l'aire $\mathcal{A}_2$ de la zone 2.

Partie C : Probabilités

On admet dans cette question que les zones 1, 2, 3 et 4 ont pour aires respectives $\mathcal{A}_1 = 16$ cm^2, $\mathcal{A}_2 = 23$ cm^2, $\mathcal{A}_3 = 27$ cm^2 et $\mathcal{A}_4 = 34$ cm^2.

Un joueur inexpérimenté, après un grand nombre d'essais, estime que la probabilité que sa fléchette se plante dans la cible est $\dfrac{4}{5}$. Il estime aussi que la probabilité que sa flèche atteigne l'une des quatre zones est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1. Quelle est la probabilité P_0 pour le tireur de ne pas atteindre la cible ?

2. Les probabilités P_1, P_2, P_3 et P_4 d'atteindre respectivement les zones 1, 2, 3 et 4 sont données dans le tableau ci-dessous.

Vérifier qu'elles sont proportionnelles aux aires des zones $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$.

P_1	P_2	P_3	P_4
0,128	0,184	0,216	0,272

3. Chaque lancer de fléchette rapporte un certain nombre de points selon la zone qui est atteinte :

atteindre la zone 1 rapporte 10 points, la zone 2 rapporte 5 points, la zone 3 rapporte 2 points et la zone 4 rapporte 1 point.

Ne pas atteindre la cible ne rapporte aucun point.

On note X la variable aléatoire qui, à un lancer associe le nombre de points obtenus.

a. Présenter la loi de X sous la forme d'un tableau.

b. Déterminer la probabilité que X soit au plus égal à 2.

c. Déterminer l'espérance de X.

d. Estimer le nombre moyen de lancers que doit effectuer le lanceur pour espérer atteindre ou dépasser les 100 points.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Polynésie 14 septembre 2012
Génie mécanique, énergétique, civil

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chacune des questions suivantes, **une seule** des réponses proposées est correcte.
Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte un point. Une absence de réponse ou une mauvaise réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.
Le candidat indiquera sur la copie, le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la réponse proposée.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{3} - i, \quad z_B = \sqrt{3} + i, \quad z_C = -\sqrt{3} + i, \quad z_D = -\sqrt{3} - i.$$

1. Les solutions complexes de l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ sont :

a. z_C et z_D **b.** z_A et z_C **c.** z_A et z_B **d.** z_A et z_D

2. Le module et un argument du nombre complexe z_A sont :

a. $\left\{\begin{array}{lcl}|z_A| & = & \sqrt{2}\\ \arg z_A & = & -\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right.$ **b.** $\left\{\begin{array}{lcl}|z_A| & = & \sqrt{2}\\ \arg z_A & = & \dfrac{\pi}{3}\end{array}\right.$ **c.** $\left\{\begin{array}{lcl}|z_A| & = & 2\\ \arg z_A & = & \dfrac{5\pi}{6}\end{array}\right.$ **d.** $\left\{\begin{array}{lcl}|z_A| & = & 2\\ \arg z_A & = & -\dfrac{\pi}{6}\end{array}\right.$

3. L'ensemble des points d'affixe z tels que $\left|z - \sqrt{3} - i\right| = \left|z - \sqrt{3} + i\right|$ est :

a. la droite (CD) **b.** l'axe des abscisses **c.** l'axe des ordonnées **d.** la droite (AB)

4. Le nombre complexe $\dfrac{z_A}{z_B}$ est égal à :

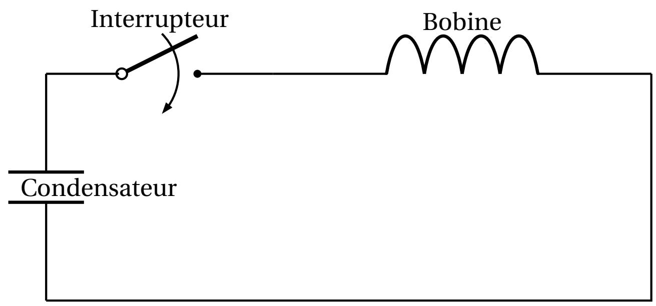
a. -1 **b.** 1 **c.** $1 - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **d.** $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

5. L'affixe du point E, tel que le quadrilatère DEAC est un parallélogramme, est :

a. $-3\sqrt{3} + i$ **b.** $2\sqrt{3} - 2i$ **c.** $\sqrt{3} - 3i$ **d.** $\sqrt{3} + i$

EXERCICE 2 **4 points**

On considère le circuit ci-dessous composé d'une bobine, d'un condensateur et d'un interrupteur.



Le condensateur est initialement chargé.
Au temps $t = 0$, on ferme l'interrupteur. On étudie alors la décharge du condensateur dans la bobine. On admet qu'à un instant t, la charge q du condensateur, qui est une fonction du temps t, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$q'' + 121 \times 10^6 q = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer l'expression de la solution particulière q de (E) qui vérifie les conditions :

$$q(0) = 2 \times 10^{-6} \quad \text{et} \quad q'(0) = 0.$$

   Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction q ainsi obtenue.
3. Montrer que l'intensité $i(t)$, définie par $i(t) = q'(t)$, où q' désigne la fonction dérivée de la fonction q, est donnée, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, par :

$$i(t) = -2,2 \times 10^{-2} \sin\left(11 \times 10^3 t\right).$$

4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction q sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi \times 10^{-3}}{2 \times 11}\right]$.
   On en donnera la valeur exacte.
   On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur l'intervalle $[a\ ;b]$ est donnée par :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

PROBLÈME **11 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 3 - 3\ln x + x^3.$$

1. **a.** Montrer que la fonction dérivée g' de la fonction g peut s'écrire, pour tout nombre réel x strictement positif, sous la forme :

$$g'(x) = \frac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}.$$

   b. Déterminer le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

   c. En déduire les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Donner la valeur de $g(1)$.

3. Déduire des questions précédentes que la fonction g est strictement positive sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Partie B : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 3\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}x^2 + 1.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. **a.** Établir que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}, \text{ où } g \text{ est la fonction définie dans la } \textbf{partie A}.$$

   b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. **a.** Montrer que sur l'intervalle $[0,5~;~1]$, la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point. On notera α l'abscisse de ce point.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. On note $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. La parabole $\mathcal{P}$ est représentée en **annexe**, à rendre avec la copie.
   Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.
   On précisera les coordonnées du point d'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.
5. Tracer sur le graphique de **l'annexe**, à rendre avec la copie, la courbe $\mathcal{C}$.

Partie C : calcul d'une aire

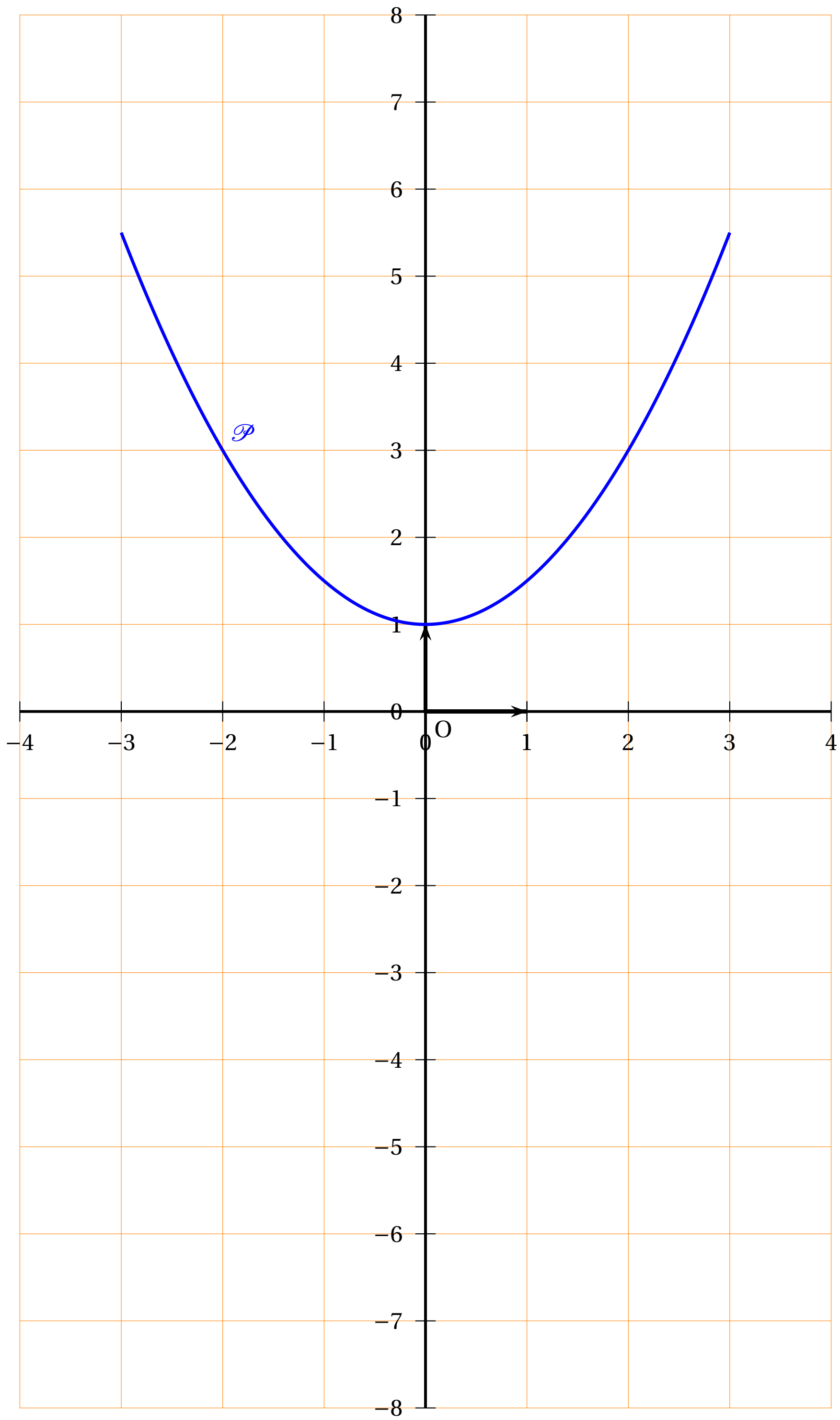
On note $\mathcal{D}$ le domaine du plan délimité, d'une part, par les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$, d'autre part, par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \text{e}$.

1. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique de l'**annexe**, à rendre avec la copie.
2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

   Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.
3. Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unité d'aire.

Annexe (problème)
à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Nouvelle-Calédonie 15 novembre 2012 ∾ Génie mécanique - Génie énergétique - Génie civil

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 4z + 8 = 0.$$

2. **a.** En prenant comme unité graphique 1 cm, représenter dans le plan les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 2 + 2\text{i}, \quad z_{\text{B}} = 2 - 2\text{i}, \quad \text{et } z_{\text{C}} = 4.$$

   b. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_{A} et z_{B}.

   c. Démontrer que le triangle AOB est rectangle isocèle.

   d. Démontrer que le quadrilatère OBCA est un carré.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit E le milieu du segment [OA] et D le point d'affixe $z_{\text{D}} = \text{i}z_{\text{A}}$.
   Démontrer que le point E est le milieu du segment [CD].

EXERCICE 2 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question, quatre réponses ou affirmations sont proposées, dont une seule est juste. Le candidat mentionnera le numéro de la question, et la lettre correspondant à la réponse juste. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point, l'absence de réponse ou une mauvaise réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Question 1

On considère l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, où y désigne une fonction de variable réelle x deux fois dérivable.
Une solution de cette équation est la fonction f vérifiant, pour tout réel x :

Réponse A : $f(x) = 4\text{e}^{-4x}$ **Réponse B** : $f(x) = 4\text{e}^{2x}$
Réponse C : $f(x) = 10\cos(2x) - 10\sin(2x)$ **Réponse D** : $f(x) = 10\cos(4x) - 10\sin(4x)$

Question 2

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = (2x+1)\text{e}^{3x+1}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Une expression de $f'(x)$ est :

Réponse A : $f'(x) = 2\text{e}^3$ **Réponse B** : $f'(x) = (6x+5)\text{e}^{3x+1}$
Réponse C : $f'(x) = 2\text{e}^{3x+1}$ **Réponse D** : $f'(x) = (2x+3)\text{e}^{3x+1}$

Question 3

Un jeu est basé sur une expérience aléatoire et il permet de gagner ou de perdre de l'argent. La variable aléatoire X qui représente ce gain (positif ou négatif) admet la loi de probabilité suivante.

Valeurs de X	-5	-2	0	1	6
Probabilité	$\dfrac{3}{25}$	$\dfrac{2}{25}$	$\dfrac{15}{25}$	$\dfrac{2}{25}$	$\dfrac{3}{25}$

On considère que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable X est strictement positive, équitable si elle est nulle, et défavorable au joueur si elle est strictement négative.

Réponse A : le jeu est défavorable au joueur **Réponse B** : le jeu est équitable
Réponse C : le jeu est favorable au joueur **Réponse D** : on ne peut pas savoir

Question 4

Soit C la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;\ 1]$ par $g(x) = x^2 + 1$. On fait tourner cette courbe autour de l'axe des abscisses. Cela engendre un solide de révolution dont le volume V, exprimé en unité de volume, est :

$$V = \pi \int_0^1 [g(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

La valeur exacte de V est égale à :

Réponse A : $\dfrac{4\pi}{3}$ **Réponse B** : $\dfrac{6\pi}{5}$ **Réponse C** : 4π **Réponse D** : $\dfrac{28\pi}{15}$

Question 5

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]5\,;\,+00[$ dont la représentation graphique dans un repère du plan est notée C.
On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to 5} f(x) = +\infty$. Ce résultat s'interprète ainsi :

Réponse A : la courbe C admet une asymptote d'équation $x = 5$.
Réponse B : lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe C admet une asymptote d'équation $y = 5$.
Réponse C : lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe C admet une asymptote oblique d'équation $y = 5x$.
Réponse D : la courbe C admet au point d'abscisse 5 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

PROBLÈME **10 points**

Partie A - Exploitation d'informations graphiques

On considère la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = ax + b + \mathrm{e}^{-x},$$

où a et b sont deux nombres réels que l'on va déterminer dans cette partie.
On donne les renseignements graphiques suivants sur la courbe représentative de la fonction g dans un repère d'axes $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$:

— le point A de coordonnées $(0\,;\,4)$ appartient à cette courbe représentative ;
— la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. À partir des renseignements précédents, donner la valeur de $g(0)$ ainsi que celle du nombre dérivé $g'(0)$.
2. Déterminer la valeur du nombre b en utilisant la question 1.
3. Pour tout réel x, calculer $g'(x)$ en fonction de a. En déduire la valeur du nombre a.

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x + 3 + \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

1. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   b. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

2. **a.** Pour tout réel x, démontrer l'égalité : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 + x\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{x}\right)$.

   b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.

   a. Pour tout réel x, démontrer que $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, puis étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. Représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}$ et son asymptote $\mathscr{D}$ dans le même repère. On prendra pour unité 1 cm sur chacun des axes.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Existe-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ qui est parallèle à l'asymptote $\mathscr{D}$?

Partie C - Calcul d'une aire plane

1. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Hachurer le domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$. On note $\mathscr{A}$ l'aire de ce repère, exprimée en unité d'aire.

3. Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$, puis donner sa valeur arrondie au mm^2.

Durée : 4 heures

Baccalauréat STI Antilles-Guyane 20 juin 2012
Génie électronique, électrotechnique & optique

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan est muni du repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_B = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} z_A$.

1. **a.** Recopier et compléter la phrase suivante :

   « Le point B est l'image du point A par ...... de centre ...... et ...... $\dfrac{\pi}{4}$.

   b. Que peut-on en déduire pour la nature du triangle OAB ? Justifier.

2. **a.** Donner la forme algébrique de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

   b. Vérifier que

$$z_B = \frac{\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{2} + \mathrm{i}\frac{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{2}.$$

3. **a.** Déterminer la forme trigonométrique de z_A.

   b. Vérifier que $z_B = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.

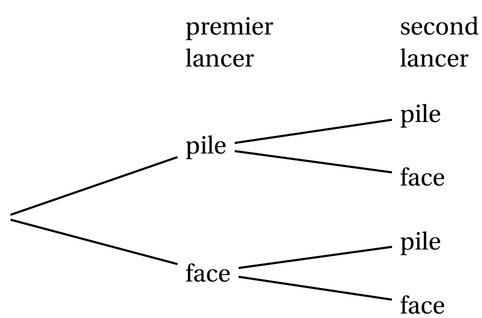
4. À l'aide des questions 2. et 3. donner la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Un joueur participe à un jeu de hasard où il lance plusieurs fois une pièce de monnaie. Pour gagner, le joueur doit obtenir pile à tous ses lancers. Le nombre de lancers est fixé au début de chaque partie. La pièce de monnaie utilisée est parfaitement équilibrée, de sorte qu'à chaque fois qu'elle est lancée, la probabilité d'obtenir pile est égale à la probabilité d'obtenir face.

1. Dans cette question, la pièce est lancée deux fois.

   Les issues de cette expérience sont représentées par l'arbre ci-dessous.



   a. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

   b. On considère l'évènement A : « les résultats des deux lancers sont identiques ».
   Quelle est la probabilité de l'évènement A ?

   c. On considère l'évènement B : « le résultat face a été obtenu au moins une fois ».
   Décrire par une phrase l'évènement $\overline{B}$, évènement contraire de l'évènement B.
   En déduire la probabilité de l'évènement B.

2. Dans cette question, la pièce est lancée trois fois.

Le joueur gagne 100 euros s'il obtient trois fois pile. Si le joueur n'obtient pas trois fois pile, il perd 1 euro. Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 100 si le joueur gagne et la valeur -1 si le joueur perd.

a. Représenter à l'aide d'un arbre les issues de cette expérience aléatoire.

b. Donner la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
Le jeu est-il favorable au joueur ?

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Dans cette question, la pièce est lancée n fois, n étant un nombre entier naturel non nul.

Le joueur gagne 100 euros s'il obtient n fois pile ; sinon le joueur perd 1 euro. Soit Y_n la variable aléatoire prenant la valeur 100 si le joueur gagne et la valeur -1 si le joueur perd.

L'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_n est notée $E(Y_n)$.

On admet que la probabilité que Y_n prenne la valeur 100 vaut $\dfrac{1}{2^n}$.

a. Déterminer $E(Y_n)$, en fonction de n.

b. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $E(Y_n) < 0$.

c. Interpréter ce résultat.

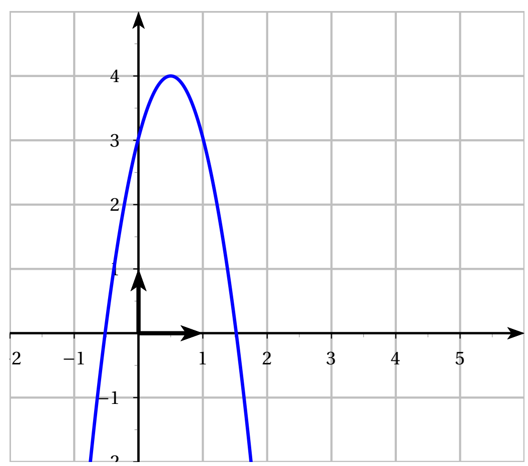
PROBLÈME **11 points**

Partie A : signe d'une fonction

La parabole $\mathscr{P}$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction polynôme t définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$t(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.



Le point $S\left(\dfrac{1}{2}\,;\,4\right)$ est le sommet de la parabole $\mathscr{P}$.
Le point $A(0\,;\,3)$ appartient à la parabole $\mathscr{P}$.

1. Justifier que $c = 3$.

2. Justifier que $t\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4$ et en déduire une relation entre a et b.

3. Soit t' la fonction dérivée de la fonction t sur $\mathbb{R}$.
Justifier que $t'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ et en déduire une seconde relation entre a et b.

4. Montrer que les questions 2. et 3. conduisent au système (S) : $\left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 0\\ a+2b &=& 4\end{array}\right.$

Résoudre le système (S). En déduire une écriture de la fonction t.

5. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (2x+1)(3-2x)^{-x}.$$

a. Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $g(x) = t(x)^{-x}$.

b. Déterminer le signe de la fonction g.

Partie B : étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x^2+4x+1)\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra utiliser que pour tout nombre réel x, on a $f(x) = \dfrac{4x^2}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{1}{x}$).

En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$; on précisera de quelle droite il s'agit.

3. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = g(x)$, où g désigne la fonction définie à la question 5 de la partie A.

Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

En déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

5. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie C : calcul d'aire

1. On admet que la fonction H, définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-4x^2-12x-12)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (4x^2+2x)\mathrm{e}^{-x}$.

En remarquant que pour tout réel x, on a $f(x) = h(x) + \mathrm{e}^{-x}$, déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On appelle $\mathscr{D}$ la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$.

a. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique.

b. Calculer la valeur exacte en cm² de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Métropole 21 juin 2012 ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée.
Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte. Chaque bonne réponse rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlève pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Partie A

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

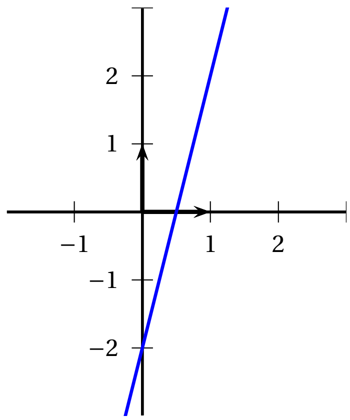
1. L'écriture exponentielle de $-2+2\text{i}$ est :
   - **a.** $-2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$
   - **b.** $\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$
   - **c.** $2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$
   - **d.** $2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$
2. La transformation qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = z + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est :
   - **a.** La rotation de centre O et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$
   - **b.** La translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   - **c.** La rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$
   - **d.** La translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Soient A, B, C et D les points d'affixes $z_\text{A} = 1+\text{i}$, $z_\text{B} = 3-2\text{i}$, $z_\text{C} = 4$ et $z_\text{D} = 2+3\text{i}$.
   - **a.** z_B et z_C ont le même module
   - **b.** O appartient au cercle de diamètre [BD]
   - **c.** A appartient à la médiatrice du segment (BC]
   - **d.** z_B et z_D ont des modules opposés

Partie B

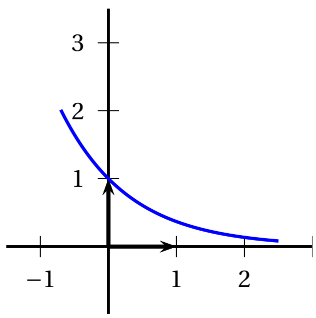
1. Soit l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$ où y désigne une fonction deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels. Une fonction f solution de cette équation est définie par :
   - **a.** $f(x) = 3$
   - **b.** $f(x) = \sin(3x)$
   - **c.** $f(x) = \text{e}^{3x}$
   - **d.** $f(x) = x^2 - 4$

2. On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels. La représentation graphique d'une solution de cette équation différentielle dans un repère orthonormal est :

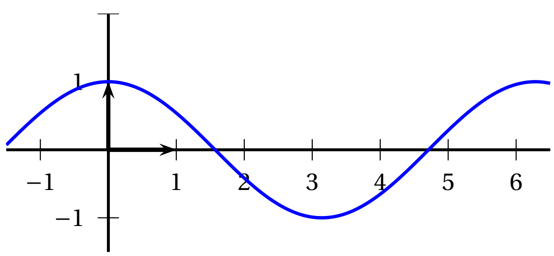
a.



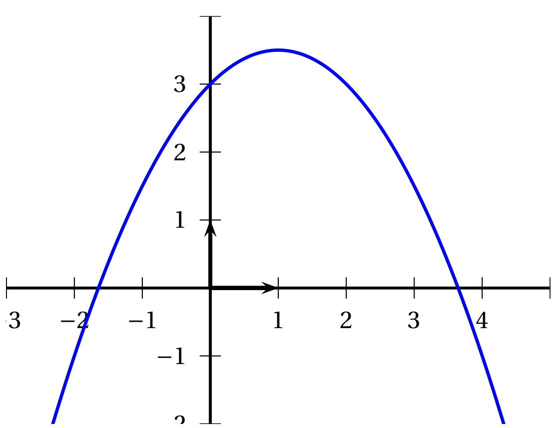
b.



c.



d.



EXERCICE 2 **5 points**

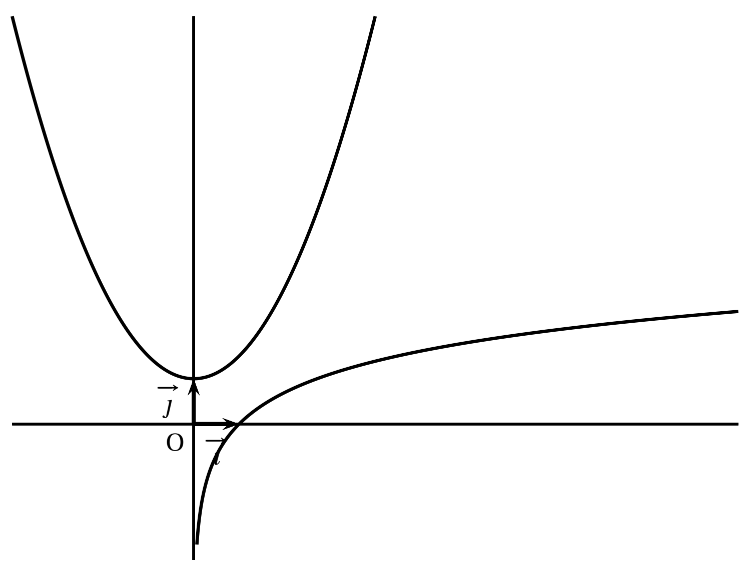
Émile possède quatre pièces de monnaie, une pièce de 2 €, une pièce de 1 € et deux pièces de 0,50€ et de quatre gobelets d'apparence identique. Sous chacun de ces gobelets, il place exactement une pièce de monnaie.
Il demande à son camarade Robert de soulever au hasard un gobelet puis un deuxième.
Il note alors la valeur de la pièce placée sous le premier gobelet soulevé puis la valeur de la pièce placée sous le second gobelet soulevé.
Chaque issue de cette expérience aléatoire est donc un couple de nombres. Par exemple, (1 ; 0,5) est le couple obtenu en découvrant d'abord la pièce de 1 € et ensuite une pièce de 0,50 €.

1. À l'aide d'un arbre ou d'un tableau, déterminer tous les tirages possibles.
2. On admet que toutes les issues sont équiprobables.
   On note A l'évènement : « Les deux pièces découvertes par Robert ont des valeurs différentes ».
   Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale $\dfrac{5}{6}$.
3. On définit la variable aléatoire S qui, à chaque issue, associe la somme des valeurs indiquées sur les deux pièces découvertes.
   a. Quelles sont les valeurs prises par S ?
   b. Donner la loi de probabilité de S.
   c. Calculer l'espérance mathématique de S. Interpréter ce nombre.
4. Robert découvre deux pièces au hasard comme indiqué auparavant. On note B l'évènement : « Robert a assez d'argent en main pour acheter un magazine à 1,30 € ». Déterminer la probabilité de l'évènement B.

PROBLÈME **10 points**

Partie A : Étude graphique d'une inéquation

Sur le graphique ci-dessous sont tracées la courbe représentant la fonction logarithme népérien et la parabole d'équation $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$ dans un repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.



À l'aide du graphique, expliquer pourquoi on peut conjecturer que, pour tout nombre réel x strictement positif,

$$\frac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x > 0.$$

Ce résultat est admis dans la suite du problème.

Partie B : Calculatrice et conjectures

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan, Δ_1 et Δ_2 les droites d'équations respectives $y = \frac{1}{2}x - 1$ et
$y = \frac{3}{2}x - 2$.
La courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ_1 ont été représentées à l'aide d'un grapheur. Le graphique obtenu est donné en annexe. Cette annexe est à compléter et à rendre avec la copie.

1. Sur l'annexe, tracer la droite Δ_2.

2. À l'aide du graphique, conjecturer les réponses aux questions posées ci-dessous :

- **a.** Quel est le sens de variation de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$?
- **b.** Quelles sont les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 0 ?
- **c.** Que représente la droite Δ_1 pour la courbe $\mathscr{C}$?
- **d.** Que représente la droite Δ_2 pour la courbe $\mathscr{C}$?

Partie C : Vérification des conjectures

L'objectif de cette partie est de démontrer les conjectures émises dans la partie précédente.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ puis en 0.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

- **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel x strictement positif.
- **b.** Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x\right)$.
- **c.** À l'aide de la partie A, étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$?

3. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty}\left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\right]$.

- **b.** Que peut-on en déduire pour la droite Δ_1 ?
- **c.** Étudier la position relative de la droite Δ_1 et de la courbe $\mathscr{C}$.
- **d.** Démontrer la conjecture émise quant à ce que représente la droite Δ_2 pour la courbe $\mathscr{C}$.

Partie D : Calcul d'aire

1. Soit G et g les fonctions définies sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

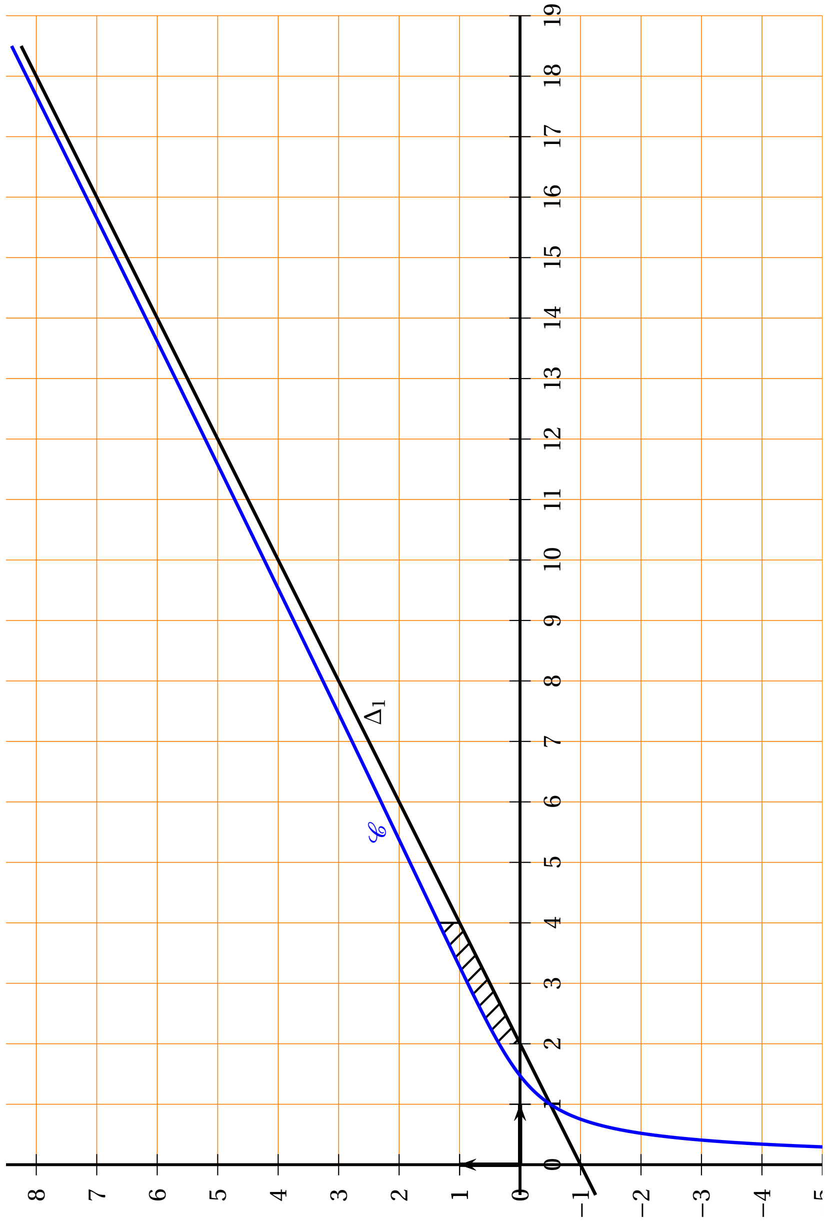
$$G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Montrer que la fonction G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2. Calculer l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré sur le graphique fourni en annexe.

ANNEXE

À rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Polynésie 11 juin 2012 ∾
Génie électronique, électrotechnique, optique

EXERCICE 1 **4 points**

Baptiste, François, Kévin et Thomas ont décidé de partir ensemble cet été à Londres. Ils ont convenu que chacun d'entre eux réserverait de son côté par internet son billet de train aller-retour Paris-Londres aux dates et heures qu'ils ont choisies en commun.
La politique tarifaire appliquée pour la vente des billets est la suivante : la première moitié des billets est vendue au tarif réduit de 90 euros (tarif noté R) puis la seconde moitié des billets est vendue au tarif normal de 120 euros (tarif noté N).
Les quatre amis, ignorant cette politique, réservent leurs billets à des moments différents sans savoir de quel tarif ils bénéficieront. On s'intéresse aux tarifs payés par Baptiste, François, Kévin et Thomas.
Ainsi, on notera NNRR l'évènement élémentaire : « Baptiste paie 120 euros, François paie 120 euros, Kévin paie 90 euros et Thomas paie 90 euros ».

1. Écrire les seize évènements élémentaires (on pourra s'aider d'un arbre).
2. On suppose que les seize évènements élémentaires sont équiprobables.
   On considère les trois évènements suivants :
   A : « Les quatre amis paient le tarif réduit » ;
   B : « Aucun des quatre amis ne paie le tarif réduit » ;
   C : « Au moins un des quatre amis paie le tarif réduit ».
   a. Citer deux évènements contraires parmi les évènements A, B et C.
   b. Calculer les probabilités de chacun des évènements.
3. On note X la variable aléatoire qui, à chaque évènement élémentaire, associe la somme totale en euros payée par les quatre amis.
   a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b. Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

EXERCICE 2 **6 points**

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 centimètre. On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -2\sqrt{3} + 2\text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = -2\sqrt{3} - 2\text{i}$$

1. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes z_{A} et z_{B}, puis placer les points A et B.
2. On désigne par C l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.
   a. Calculer l'affixe z_{C} du point C, puis placer ce point sur la figure.
   b. Montrer que le quadrilatère OCAB est un losange.
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.

3. Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

$$\left|z+2\sqrt{3}-2\text{i}\right| = 4.$$

a. Montrer que le point C appartient à l'ensemble Γ.

b. Justifier que Γ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. Tracer l'ensemble Γ sur la figure.

4. On note D l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{w} = -7\overrightarrow{u}$.

a. Placer le point D sur la figure.

b. Le point D est-il sur le cercle Γ ? Justifier.

PROBLÈME **10 points**

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 centimètre.
Le but de ce problème est :

— d'émettre des conjectures sur la fonction f dans la partie A ;
— d'établir des résultats concernant ces conjectures dans la partie B ;
— de vérifier la validité de ces conjectures dans la partie C.

Partie A : Lecture graphique

On a obtenu à l'aide d'un logiciel la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,20[$ (la courbe est fournie en annexe).
On précise que la droite T est la tangente à la courbe de la fonction f au point A d'abscisse 1.
Par simple lecture graphique, déterminer :

1. la limite de la fonction f en zéro ;

2. une valeur de la (ou des) solution(s) de l'équation $f(x) = 0$;

3. le signe de $f(x)$ en fonction de x ;

4. le sens de variation de la fonction f ;

5. l'équation réduite de la tangente T ;

6. une valeur approchée de l'aire du domaine grisé en centimètres carrés.

Partie B : Étude d'une fonction

On admet dans cette partie que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f(x) = (\ln x)^2 - 5\ln x + 4$$

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en zéro.

2. a. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - 5X + 4 = 0$.

b. En déduire, en posant $X = \ln x$, les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

a. Pour tout x dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, calculer $f'(x)$ et justifier que $f'(x)$ est du signe de $2\ln x - 5$.

b. Résoudre l'inéquation $2lnx - 5\ 0$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

d. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

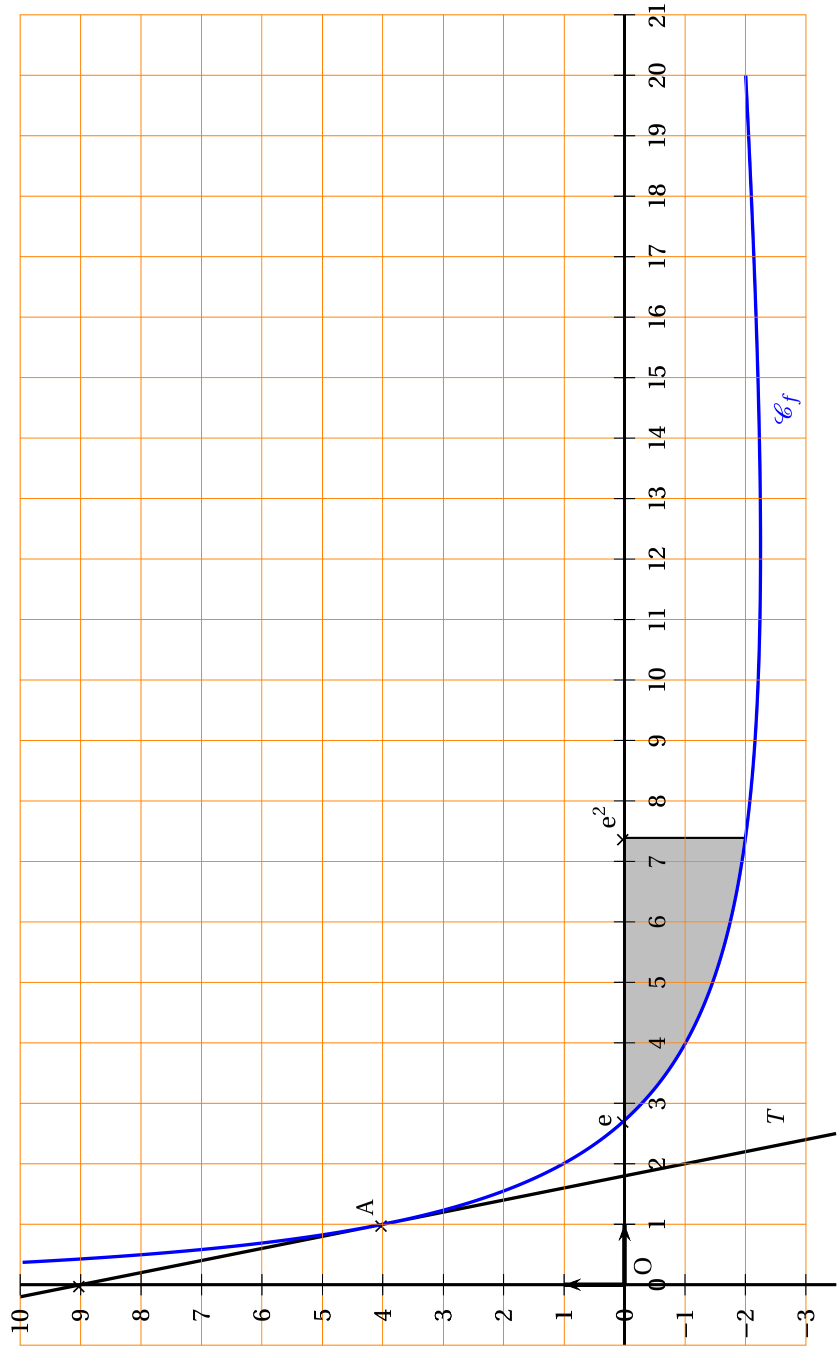
4. Établir une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

5. On donne les fonctions g, h, G et H suivantes, définies sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :
$g(x) = \ln x, h(x) = (\ln x)^2, G(x) = x\ln x - x$ et $H(x) = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right]$.
On admet que G est une primitive de la fonction g et que H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$.
   b. Calculer $I = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} -f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C : Conclusion

1. Parmi les conjectures formulées dans la partie A, indiquer en détaillant les réponses :
— celles qui ont été vérifiées ;
— celles qui sont fausses ;
— celles pour lesquelles on ne peut pas conclure.
On s'appuiera sur les résultats obtenus dans la partie B.
2. On souhaite tracer sur l'écran d'une calculatrice la courbe représentative de la fonction f de manière à visualiser les résultats établis dans la partie B. Proposer un paramétrage de fenêtre de la calculatrice qui permet d'obtenir un tel tracé.

Annexe (problème) à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Antilles-Guyane 13 septembre 2012 ∾
Génie électronique, électrotechnique & optique

EXERCICE 1 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule réponse proposée est correcte. Chaque bonne réponse rapporte 1 *point. Une mauvaise réponse ou une absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.*
On notera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{6}$ et B le point d'affixe $z_{\text{B}} = -1$.

1. Le module et un argument de z_{B} sont respectivement
   - -1 et 0
   - -1 et π
   - 1 et 0
   - 1 et π
2. Une forme exponentielle de z_{A} est :
   - $z_{\text{A}} = 2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$
   - $z_{\text{A}} = 2\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$
   - $z_{\text{A}} = \sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$
   - $z_{\text{A}} = \sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$
3. L'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ est le point A$'$ d'affixe :
   - $z_{\text{A}'} = \left(1+\sqrt{3}\right) + \text{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$
   - $z_{\text{A}'} = \left(1+\sqrt{3}\right) + \text{i}\left(1-\sqrt{3}\right)$
   - $z_{\text{A}'} = \left(1-\sqrt{3}\right) + \text{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$
   - $z_{\text{A}'} = \left(1-\sqrt{3}\right) + \text{i}\left(1-\sqrt{3}\right)$
4. La suite définie par $u_n = |z_{\text{A}}|^n$ pour tout entier naturel n :
   - est arithmétique
   - est géométrique
   - n'est ni arithmétique, ni géométrique

EXERCICE 2 **5 points**

À la fin d'une émission de télévision, un jeu est organisé de la manière suivante.
Une question est posée et plusieurs réponses possibles sont données. Le joueur tape le numéro de la réponse qui lui semble correcte et l'envoie par l'intermédiaire d'un message électronique. La communication lui coûte alors 1 ? (on suppose que l'organisateur du jeu reçoit l'intégralité de cet euro).

- Si la réponse est fausse, le joueur a perdu.
- Si la réponse est correcte, un tirage au sort peut lui permettre de gagner un chèque d'une valeur de 50 €, ou une console de jeu d'une valeur de 300 €, ou un voyage d'une valeur de 1 000 €.

Au total, 16 lots sont à gagner : 10 chèques, 5 consoles et 1 voyage.
Une étude statistique indique que 1 % des joueurs n'ont pas la bonne réponse.

Partie A

On suppose que 1 000 personnes ont envoyé un message et que tous les lots ont été gagnés. On choisit une personne au hasard. Toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.
On désigne par :

R l'évènement « la personne choisie a donné une bonne réponse à la question » ;

G l'évènement « la personne choisie a gagné un lot ».

1. Donner la probabilité de l'évènement R.
2. Montrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\dfrac{2}{125}$.
3. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros d'un joueur pris au hasard. Par exemple, la valeur de X pour un joueur qui perd est -1.
   a. Montrer que la probabilité de l'évènement « X prend la valeur 299 » est égale à $\dfrac{1}{200}$.
   b. Donner toutes les valeurs prises par X.
   c. Donner la loi de probabilité de X.
   d. Montrer que l'espérance de X est 2.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 100. On suppose que n personnes ont envoyé un message et que tous les lots ont été gagnés. On choisit une personne au hasard. Toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.
Soit X_n la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros d'un joueur pris au hasard.

1. Donner, en fonction de n, la loi de probabilité de X_n.
2. Montrer que l'espérance de X_n est égale à $\frac{3000-n}{n}$.
3. Jusqu'à quelle valeur de n, le jeu est-il favorable à un joueur ?

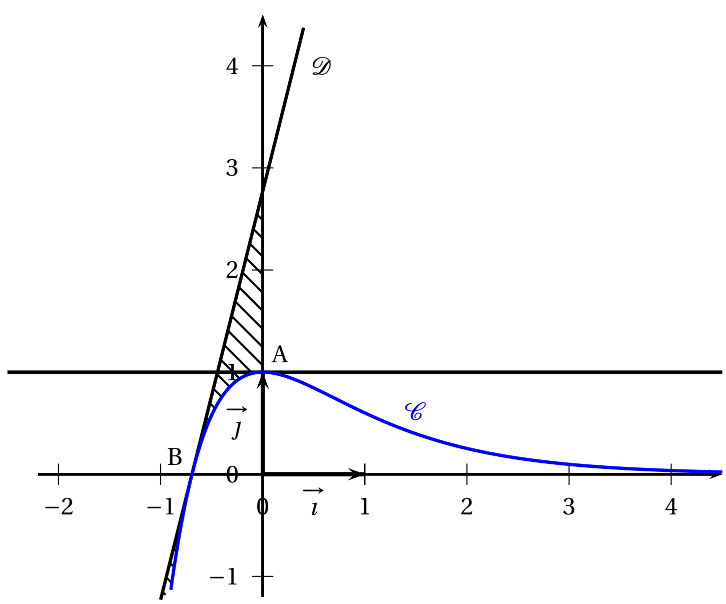
PROBLÈME **11 points**

On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$(E) : \quad y'' + 3y' + 2y = 0$$

où la fonction inconnue y de la variable x est définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ; y' désigne la fonction dérivée de y et y'' la fonction dérivée de y'.

Le but de ce problème est de déterminer et d'étudier une solution de l'équation différentielle (E).
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de cette solution est donnée ci-dessous.



Les parties B et C peuvent être traitées indépendamment de la partie A.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\text{e}^{-x} + b\text{e}^{-2x}$, a et b étant deux constantes réelles.
La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessus est la courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ de la fonction f. Cette courbe passe par le point A(0 ; 1) et la tangente à $\mathscr{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. **a.** Donner les valeurs exactes de $f(0)$ et $f'(0)$.
   b. En utilisant $f(x)$, exprimer $f(0)$ et $f'(0)$ en fonction de a et b.
   c. En déduire les valeurs de a et b.
2. Vérifier que la fonction f obtenue est effectivement une solution de l'équation différentielle (E).

Partie B

On considère la fonction f, étudiée dans la partie A, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\text{e}^{-x} - \text{e}^{-2x}.$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée au début du problème.

1. Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.
   Donner une interprétation graphique de cette limite.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \text{e}^{-2x}\left(2\text{e}^{x} - 1\right)$, puis déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $-\infty$.
3. **a.** Montrer que $f'(x) = 2\text{e}^{-2x}\left(1 - \text{e}^{x}\right)$ pour tout réel x.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 - \text{e}^{x} > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$, dans lequel on reportera les limites.

Partie C

L'objectif de cette partie est de déterminer l'aire du domaine hachuré sur le graphique donné au début du problème.

1. On désigne par B l'unique point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe (Ox).
   Montrer que l'abscisse du point B est $x_{\text{B}} = -\ln(2)$.
2. **a.** Montrer que $f'(-\ln(2)) = 4$.
   b. En déduire qu'une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est :

$$y = 4x + 4\ln(2).$$

3. On considère la fonction g définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (4x + 4\ln(2)) - f(x).$$

   On note g' la fonction dérivée de la fonction g. On admet que le signe de la fonction g' est donné Dar le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	

a. En déduire le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de la fonction g en $+\infty$ et en $-\infty$ ne sont pas demandées).

b. Montrer que $g(-\ln(2)) = 0$.

c. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, on a $g(x) \geqslant 0$.

d. En déduire la position de la droite $\mathcal{D}$ par rapport à celle de la courbe $\mathcal{C}$.

4. a. Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = 2x^2 + (4\ln(2))x + 2\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$$

est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

b. On admet que l'aire, en unité d'aire, du domaine hachuré délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite $\mathcal{D}$ et les droites d'équations respectives $x = -\ln(2)$ et $x = 0$, est égale à $\displaystyle\int_{-\ln(2)}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Déterminer la valeur exacte de cette aire, en unité d'aire.

Durée : 4 heures

∾ Baccalauréat STI Métropole 13 septembre 2012 ∾
Génie électronique, électrotechnique & optique

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse fausse ou une absence de réponse vaut 0 point.
Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte.
Recopier sur la copie cette réponse exacte.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les points A et B d'affixes respectives z_{A} et z_{B} avec :

$$z_{\text{A}} = -\sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_{\text{B}} = -1 - \text{i}\sqrt{3}.$$

1. Le nombre complexe z_{A} est solution de l'équation :

   a. $\text{i}z - \sqrt{2} - \text{i}\sqrt{2} = 0$ **b.** $\text{i}z - \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2} = 0$ **c.** $\text{i}z + \sqrt{2} + \text{i}\sqrt{2} = 0$

2. Le nombre complexe z_{B} est solution de l'équation :

   a. $z^2 - 2z + 4 = 0$ **b.** $z^2 + 2z + 4 = 0$ **c.** $z^2 - 2z - 4 = 0$

3. L'écriture exponentielle du nombre complexe z_{B} est :

   a. $2\text{e}^{-\frac{\pi}{6}\text{i}}$ **b.** $2\text{e}^{-\frac{2\pi}{3}\text{i}}$ **b.** $\sqrt{2}\text{e}^{-\frac{2\pi}{3}\text{i}}$

4. Le triangle OAB est :

   a. équilatéral **b.** rectangle et isocèle **c.** isocèle

5. Soit C le point d'affixe -2i.
   Le point C est l'image du point B par la rotation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point d'affixe z' tel que :

   a. $z' = z\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ **b.** $z' = z + \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ **b.** $z'' = z\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$

EXERCICE 2 **4 points**

On interroge 2 000 personnes qui possèdent un téléphone portable. On leur demande quel est leur opérateur de téléphonie et quelle est la durée mensuelle de communication de leur forfait. On consigne les résultats dans un fichier. L'analyse de ce fichier permet d'obtenir les résultats suivants :

	1/2 heure	1 heure	2 heures
Opérateur A	100	500	300
Opérateur B	40	100	160
Opérateur C	300	300	200

On choisit au hasard le nom d'une personne dans le fichier. On suppose que chaque nom a la même chance d'être choisi.

1. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
E : « le nom choisi est celui d'une personne cliente de l'opérateur C ».
F : « le nom choisi est celui d'une personne qui possède un forfait d'une demi-heure chez l'opérateur C ».
G : « le nom choisi est celui d'une personne qui possède un forfait d'une demi-heure ou qui a opté pour l'opérateur C ».
H : « le nom choisi est celui d'une personne qui possède un forfait d'une durée d'au moins une heure ».

2. Soit X Ia variable aléatoire qui à chaque client associe la durée, exprimée en heure, de son forfait.

a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Quelle est l'espérance mathématique de cette variable aléatoire ?

PROBLÈME **11 points**

Le but du problème est d'étudier la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 2x$$

On désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 2x\ln x - 2x + 2.$$

1. On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g. Etablir que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = 2\ln x$.

2. En déduire que la fonction g possède un minimum. Préciser la valeur de ce minimum.

3. Démontrer alors que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

Partie B : étude de la fonction *f*

1. a. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x = 0$.
Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b. Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f(x) = x^2\left(\ln x - \frac{3}{2} + \frac{2}{x}\right).$$

c. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. a. Montrer que, pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = g(x)$.

b. En utilisant les résultats de la partie A, préciser les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser son tableau de variations sur $]0\,;\,+\infty[$.

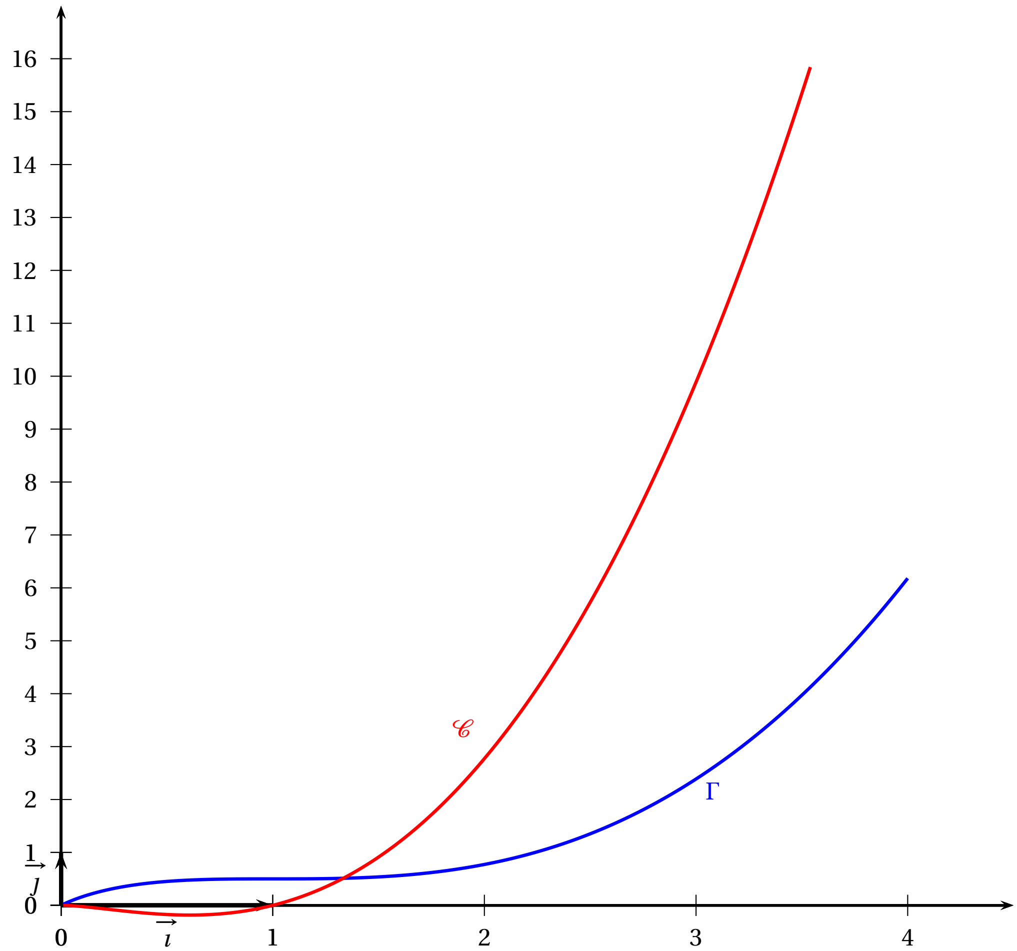
Partie C : position relative de deux courbes et calcul d'aire

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = x^2 \ln x$.
Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ sont tracées sur le document annexe à rendre avec la copie.

1. **a.** Démontrer que $f(x) - x^2 \ln x = \dfrac{x}{2}(-3x+4)$.
   b. Étudier le signe de $f(x) - x^2 \ln x$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   c. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.
2. Soit a un réel appartenant à $\left]\dfrac{4}{3}\,;\,+\infty\right[$.
   La droite d'équation $x = a$ coupe la courbe Γ en M et la courbe $\mathscr{C}$ en N.
   a. Dans cette question uniquement, on choisit $a = 3$.
   Sur le graphique en annexe, placer les points M et N, puis calculer la distance MN.
   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Pour quelles valeurs du réel a la distance MN est-elle supérieure ou égale à 10 ?
3. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre les courbes Γ, $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = \dfrac{4}{3}$ et $x = 3$.
   a. Hachurer ce domaine sur le graphique annexe.
   b. Calculer $\mathscr{A}$.

ANNEXE

À RENDRE AVEC LA COPIE



∽ Baccalauréat STI Nouvelle–Calédonie 15 novembre 2012 ∾
Génie électronique, électrotechnique et optique

EXERCICE 1 **4 points**

On a placé dans une boîte quatre résistors : deux verts notés V et V′, un marron noté M et un rouge noté R.
On choisit successivement et sans remise deux résistors l'un après l'autre. Un résultat d'un tel tirage peut être par exemple rouge, puis marron : il sera noté (R ; M). Tous les tirages sont équiprobables.
On donnera les résultats des probabilités demandées sous forme de fractions irréductibles.

1. Donner les 12 tirages possibles (on pourra s'aider d'un arbre).
2. On considère les évènements suivants :

   A : « le premier résistor choisi est vert »

   B : « l'un au moins des résistors choisis est vert »

   a. Énoncer par une phrase l'évènement $\overline{B}$, évènement contraire de l'évènement B.

   b. Calculer la probabilité des évènements A et B.
3. Chaque résistor vert a une résistance nominale de 0,5 ohm, le résistor marron a une résistance de 1 ohm et le rouge de 2 ohms. On décide de monter en série les deux résistors obtenus lors d'un tirage.
   On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux résistors, associe la résistance équivalente en ohms du montage en série obtenu (on rappelle qu'elle est égale à la somme des résistances des deux résistors).

   a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

   b. Que désigne l'évènement $(X = 1)$? Calculer sa probabilité.

   c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme de tableau.

   d. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

EXERCICE 2 **6 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ les équations :

   a. $\dfrac{-2}{z-2} = 2$

   b. $z^2 - 2z + 2 = 0$.
2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 centimètres.
   Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 1+\text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = 1-\text{i} \quad ; \quad z_{\text{C}} = 1.$$

   a. Faire une figure en plaçant les points A, B et C.
   On complètera la figure au fur et à mesure des questions de l'exercice.

   b. Écrire z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.

   c. Déterminer la nature du triangle OAB.

   d. Tracer alors le cercle circonscrit au triangle OAB, qu'on notera Ω.
3. Soit D le point d'affixe $z_{\text{D}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. Écrire z_D sous forme algébrique et placer le point D.

b. Montrer que les points A, B, C et D sont alignés.

4. Soit D′ le milieu du segment [OD]. Montrer que D′ appartient au cercle Ω.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

On donne, à l'instant $t = 0$, un médicament à un animal.
On note $f(t)$ la concentration, en milligrammes par litre, de ce médicament présent dans le sang à l'instant $t \geqslant 0$ exprimé en heures. La courbe Γ fournie en annexe représente l'évolution de cette concentration $f(t)$ en fonction de t.
Dans cette partie A, il est demandé de répondre aux questions par simple lecture graphique.

1. Quelle est la valeur de la concentration à l'instant $t = 0$?

2. Combien de temps après la prise du médicament la concentration est-elle maximale ?
Quelle est alors la concentration maximale de ce médicament ?

3. Au bout de combien de temps après la prise du médicament la concentration redescend-elle au quart de sa valeur maximale ?

4. Que peut-on conjecturer sur la concentration quand t tend vers l'infini ?

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = 8\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right).$$

On admet que la courbe Γ fournie en annexe représente la fonction f.

1. Calculer $f(0)$.

2. Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe de la fonction f ?

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $f'(t) = 8\mathrm{e}^{-t}\left(2\mathrm{e}^{-t} - 1\right)$.

b. Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $2\mathrm{e}^{-t} - 1 < 0$.

c. En déduire le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

4. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b. Ce résultat est-il cohérent avec les réponses données à la question 2 de la partie A ? Pourquoi ?

5. a. Quelle équation (E) convient-il de poser pour vérifier la réponse à la question 3 de la partie A ?

b. En posant $X = \mathrm{e}^{-t}$, montrer que résoudre cette équation (E) revient à résoudre l'équation

$$(E') : \qquad X^2 - X + 16 = 0.$$

c. Résoudre cette équation (E') dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. En déduire les solutions de l'équation (E) dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

d. Ce résultat est-il cohérent avec la réponse donnée à la question 3 de la partie A ? Pourquoi ?

Partie C

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$F(t) = 2(2t+1)\mathrm{e}^{-2t} - 8(1+t)\mathrm{e}^{-t}.$$

a. Calculer $F(0)$.

b. Montrer que, pour tout t dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $F'(t) = tf(t)$.

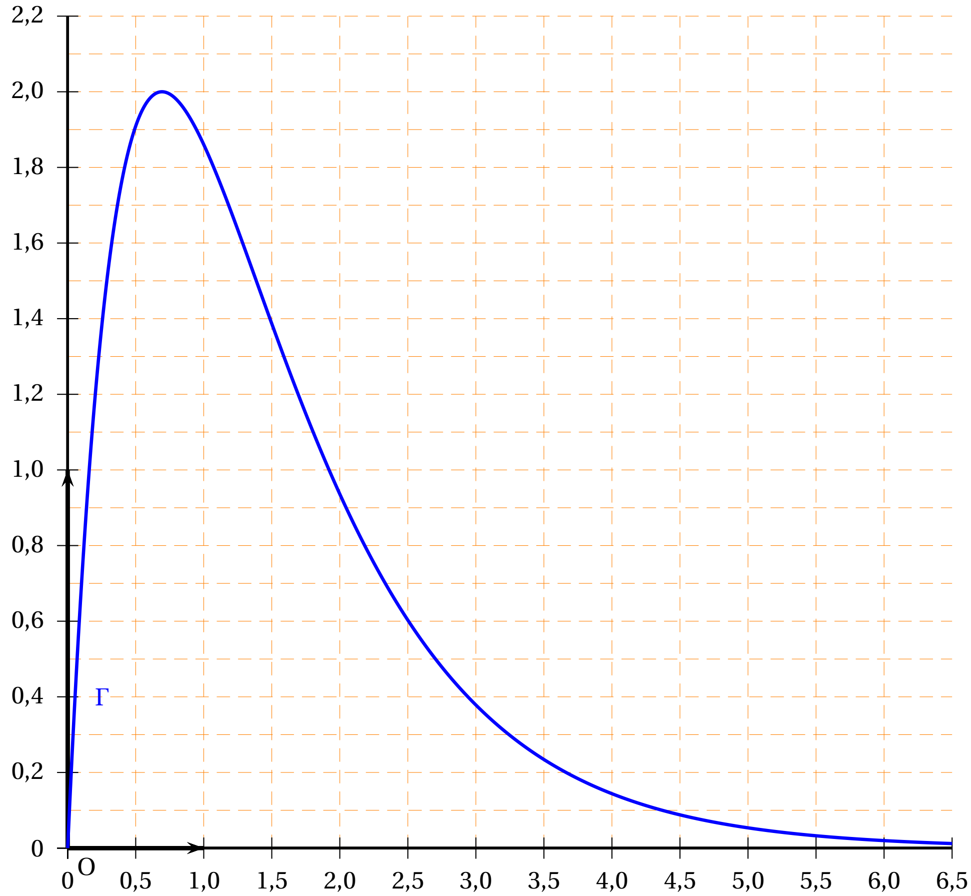
2. On note $Q(t)$ la quantité d'anticorps présente dans l'organisme de l'animal à l'instant t.
On suppose qu'à l'instant $t = 0$, cette quantité est nulle. Dans les conditions de l'expérience, on admettra que la dérivée de cette quantité Q est reliée à la concentration de la substance par la relation : $Q'(t) = tf(t)$ (lorsque $t \geqslant 0$).

a. Justifier que, pour tout t dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $Q(t) = F(t)+k$ où k désigne une constante réelle.

b. Déterminer la valeur de k.

c. En déduire l'expression de $Q(t)$ en fonction de t.

Annexe (problème) : à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat STI Métropole 21 juin 2012 ∾
Génie mécanique, génie des matériaux

EXERCICE 1 **5 points**

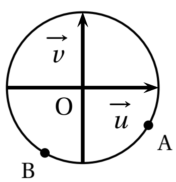
Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiples. Les différentes situations proposées sont indépendantes.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une seule réponse par question est acceptée et aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rap- porte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante.

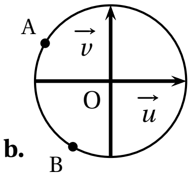
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

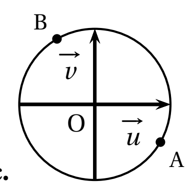
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

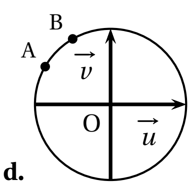
Soient A et B les points d'affixes respectives z_{A} et z_{B} telles que $z_{\text{A}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ et $z_{\text{B}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.

1. Les points A et B, images de z_{A} et z_{B}, sont représentés sur l'une des figures ci-dessous. Laquelle ?

a. 

b. 

c. 

d. 

2. Un argument de $\dfrac{z_{\text{A}}}{z_{\text{B}}}$ est égal à :

a. $-\dfrac{5}{4}$ **b.** $-\text{i}\dfrac{\pi}{2}$ **c.** $-\dfrac{\pi}{2}$ **d.** $\dfrac{\pi}{6}$

3. La longueur AB est égale à :

a. $\sqrt{3}$ **b.** $\sqrt{2}$ **c.** 0 **d.** $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

4. Soit z_{C} le nombre complexe défini par $z_{\text{C}} = z_{\text{B}}^2$.

a. $z_{\text{C}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{4\pi}{9}}$ **b.** $z_{\text{C}} = \text{e}^{\text{i}\frac{24\pi}{3}}$
c. $|z_{\text{C}}| = 2$ **d.** Les points B et C sont symétriques par rapport à O.

5. Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 + z + 1 = 0$:

a. n'admet pas de solution ;
b. admet deux solutions complexes : z_{A} et $\overline{z_{\text{A}}}$;
c. admet deux solutions complexes : z_{B} et $\overline{z_{\text{B}}}$;
d. admet deux solutions réelles : $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

EXERCICE 2 **4 points**

1. Soit y une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note y'' sa dérivée seconde.
Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$.

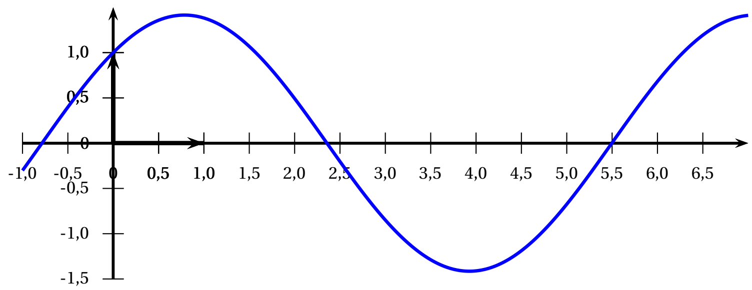
2. Déterminer la solution particulière f de (E), de dérivée notée f', vérifiant les conditions :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(0) = 1$$

3. On admet que $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

et qu'une représentation graphique de cette fonction est donnée ci-dessous.



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

a. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 1,5$ sur $[0 ; 2\pi]$?

b. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 1$ sur $[0 ; 2\pi]$?

c. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 0$ sur $[0 ; 2\pi]$?

4. Résoudre, dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, l'équation $f(x) = 0$.

PROBLÈME **11 points**

Partie A - Calcul de volume

Une entreprise souhaite construire un conteneur métallique (voir la figure 1) pour le commercialiser .

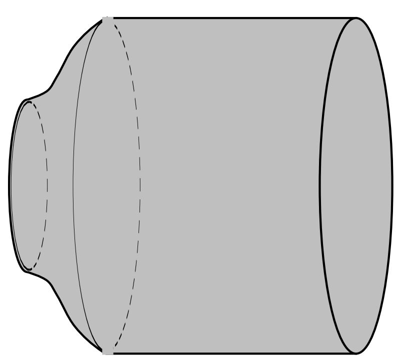


Figure 1 - Le conteneur

Ce conteneur est composé d'un cylindre et d'un goulot. Ce goulot est obtenu en faisant tourner, autour de l'axe des abscisses, la courbe C_f d'une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$, et représentée par l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la figure 2.

On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $[0\,;\,1]$.
Le repère utilisé est orthonormal d'unité graphique : 1 m.
On donne : A(0 ; 1) ; B(1 ; 2) ; C(4 ; 2).
On précise que la courbe C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en A et en B.

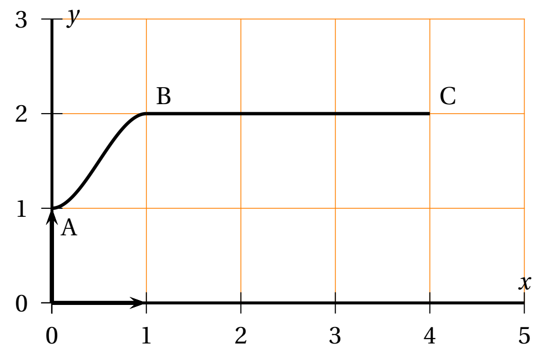


Figure 2 - Coupe latérale du conteneur

1. À partir des données précédentes, préciser les valeurs de :

$$f(0) \quad ; \quad f(1) \quad ; \quad f'(0) \quad ; \quad f'(1).$$

2. On admet qu'il existe deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$.
   On cherche à déterminer ces deux nombres.
   a. À l'aide de la question 1, montrer que les nombres a et b vérifient le système :
   $\left\{\begin{array}{rcl} a+b+1 & = & 2 \\ 3a+2b & = & 0 \end{array}\right.$
   b. En déduire les valeurs de a et b, puis $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
3. On admet que, sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, on a :

$$[f(x)]^2 = 4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1$$

   Déterminer une primitive de la fonction d'expression $[f(x)]^2$ sur $[0\,;\,1]$.
4. Le volume du goulot engendré par C_f sur $[0\,;\,1]$ est donné en m^3 par :

$$\pi \int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

   a. Calculer la valeur arrondie au dm^3 du volume du goulot.
   b. En déduire la valeur arrondie au dm^3 du volume total du conteneur.

Partie B - Étude de l'évolution des ventes

On admet que l'évolution des ventes de ce conteneur métallique est modélisée par la fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et d'expression :

$$g(x) = \frac{400}{16\mathrm{e}^{-x} + 4} - 20$$

où x désigne le nombre de mois écoulés depuis le début de la fabrication des conteneurs et $g(x)$ le nombre de conteneurs vendus par mois.
On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

1. **a.** Déterminer la limite de g en $+\infty$.

b. Que peut-on en déduire pour la courbe C_g ?

c. Comment interpréter ce résultat pour l'évolution des ventes ?

2. **a.** Soit g' la fonction dérivée de g sur $[0~;~+\infty[$. Montrer que :

$$g'(x) = \frac{6400\text{e}^{-x}}{\left(16\text{e}^{-x}+4\right)^2}$$

b. Déterminer le signe de $g'(x)$ en justifiant la réponse et en déduire le tableau de variation de g.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Justifier que l'entreprise devrait dépasser 70 conteneurs vendus par mois au cours du quatrième mois de production.

Baccalauréat STI Métropole septembre 2012
Génie mécanique, des matériaux

EXERCICE 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Les deux situations proposées sont indépendantes.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une seule réponse par question est acceptée et aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.
Indiquer sur la copie la référence de la question et la réponse choisie correspondante.

1. Parmi les fonctions dont l'expression est donnée ci-dessous, déterminer celle qui est solution de l'équation différentielle

$$4y'' + y = 0.$$

a. $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ **c.** $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
b. $f(x) = \mathrm{e}^{4x}$ **d.** $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$

2. Soient deux nombres complexes z_A et z_B tels que $z_A = \mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$ et $z_B = \mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}}$.
Un argument du nombre complexe $\frac{z_A}{z_B}$ est égal à :

a. $\frac{\mathrm{i}\pi}{6}$ **b.** $\frac{\pi}{6}$ **c.** $\frac{-\mathrm{i}\pi}{2}$ **d.** $-\frac{\pi}{2}$

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x) - x$.
La limite de f en $+\infty$ vaut :

a. $-\infty$ **b.** $+\infty$ **c.** 0 **d.** -1

4. u est une suite géométrique de raison -5 et de premier terme $u_0 = 2$.
Laquelle de ces affirmations est exacte ?

a. $u_3 = -13$ **b.** $u_3 = -10$ **c.** $u_3 == 250$ **d.** $u_3 = -250$

5. La somme des cent premiers entiers strictement positifs vaut :

a. 5 000 **b.** 10 000 **c.** 5 050 **d.** 9 990

EXERCICE 2 **5 points**

Une société souhaite mettre sur le marché un nouveau jeu à gratter, dont le principe est le suivant.

Chaque ticket est composé de deux cases :
la première case représente soit un soleil, soit une lune ;
la seconde case représente soit un cœur, soit un pique.
La société compte commercialiser 10 000 tickets répondant aux contraintes suivantes :

- 10 % de ces tickets comportent un soleil ;
- 1 % des tickets présentant un soleil comportent un cœur ;
- 0,5 % des tickets présentant une lune comportent un cœur.

1. **a.** Représenter les différents tickets possibles.
   b. Justifier que le nombre de tickets comportant un soleil et un pique est égal à 990.
2. Compléter le tableau fourni en annexe, à rendre avec la copie.

3. Un joueur reçoit 1 000 euros lorsqu'il obtient un soleil et un cœur, 50 euros lorsqu'il obtient une lune et un c ?ur, 10 euros lorsqu'il obtient un soleil et un pique, 0 euro sinon.

On admet que chaque ticket a la même probabilité d'être choisi par le joueur.

On appelle X la variable aléatoire qui prend comme valeurs les gains précédents.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

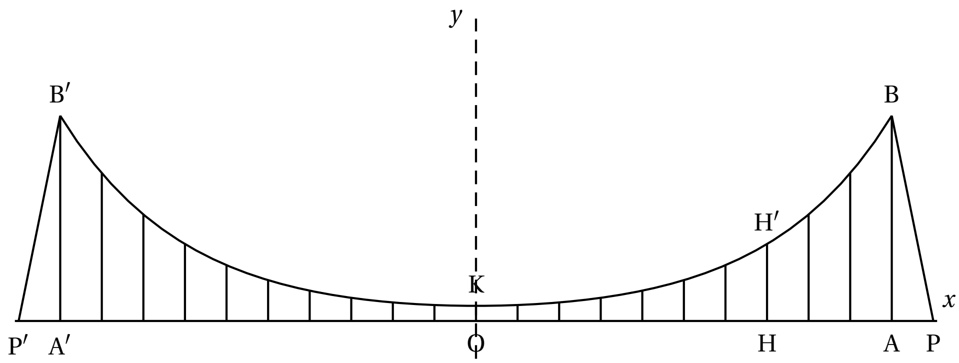
Que représente $\text{E}(X)$ pour le joueur ?

4. La société qui commercialise ce jeu vend chaque ticket 3 euros.

Quel est le bénéfice réalisé par la société pour la vente des 10 000 tickets, en admettant qu'ils ont tous été vendus ?

PROBLÈME **10 points**

Le dessin ci-dessous schématise la vue latérale d'un pont suspendu entre deux pylônes modélisés par les segments [AB] et [A′B′]. Les câbles verticaux, comme celui modélisé par le segment [HH′], sont régulièrement espacés les uns des autres. La longueur AA′ est de 220 mètres.



Dans le dessin ci-dessus, le point O et les demi-droites [Ox) et [Oy) permettent de définir un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ dans lequel le point A aura pour coordonnées (110 ; 0), l'unité étant le mètre.

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-110\,;\,110]$ d'expression :

$$f(x) = \frac{\text{e}^{0,06x}+1}{\text{e}^{0,03x}}$$

On admet que l'arc $\widehat{\text{B}'\text{KB}}$ est la courbe représentative, dans le repère donné, de la fonction f sur l'intervalle $[-110\,;\,110]$.

Partie A - Une propriété de la courbe représentative

1. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-110\,;\,110]$:

$$f(x) = \text{e}^{0,03x}+\text{e}^{-0,03x}.$$

2. On remarque que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-110\,;\,110]$,

$f(-x) = f(x)$.

Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?

Partie B - Étude de la fonction f

1. Soit f' la fonction dérivée de f sur $[-110\,;\,110]$.

Montrer que : $f'(x) = \dfrac{0,03\left(\text{e}^{0,06x}-1\right)}{\text{e}^{0,03x}}$.

2. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{0,06x} - 1 > 0$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-110 ; 110]$, puis dresser le tableau de variations de f.

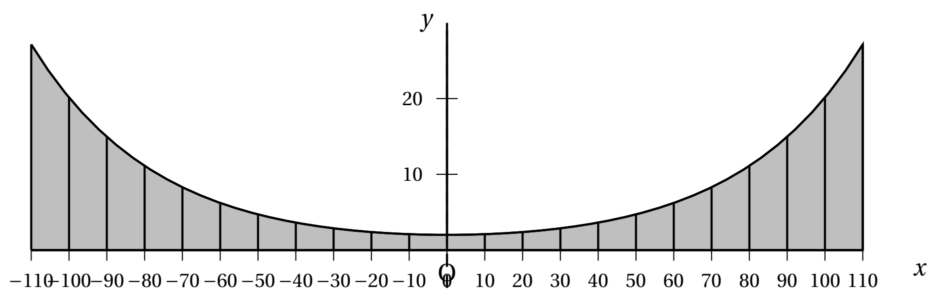
3. À l'aide du tableau de variation, donner en mètres :

a. la longueur du câble vertical le plus court ;

b. la hauteur du pylône représenté par le segment [AB] dont on donnera une valeur approchée à 0,1près.

Partie C - Étude de la résistance au vent

On s'intéresse maintenant à la résistance au vent de la structure verticale du pont suspendu.
Un bureau d'étude affirme que l'aire de la surface exposée à l'action du vent est égale au dixième de l'aire de la surface plane, pleine et fermée, délimitée par les segments [B′A′], [A′A], [AB] et l'arc BKB′.
Cette surface est représentée par la partie grisée sur la figure ci-dessous :



1. Soit la fonction F, définie et dérivable pour tout x de l'intervalle $[-110 ; 110]$, d'expression :

$$F(x) = \frac{100}{3}\left(e^{0,03x} - e^{-0,03x}\right).$$

Montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[-110 ; 110]$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer l'aire, exprimée en m^2, de la surface exposée à l'action du vent.

Annexe (exercice 2) à rendre avec la copie

Nombre de tickets :

	avec un soleil	avec une lune	Total
avec un cœur			
avec un pique	990		
Total			