✿ Baccalauréat STL 2006 ✿

L'intégrale de juin à septembre 2006

∽ Baccalauréat STL Biochimie–Génie biologique juin 2006 ∽
Antilles-Guyane

Calculatrice autorisée

Durée de l'épreuve : 2 heures — Coefficient : 2

EXERCICE 1 **12 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,4]$ par :

$$f(x) = \frac{3+2\ln(x)}{x}$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{i},\,\vec{j}\right)$ d'unités graphiques :

— 4 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et
— 2 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0. On pourra écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = [3+2\ln(x)] \times \frac{1}{x}.$$

Donner une interprétation graphique du résultat.

2. Justifier que la derivée f' est donnée par $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^2}$ pour x appartenant à $]0\,;\,4]$.

3. a. Résoudre l'équation : $-1-2\ln(x) = 0$.
Donner la valeur exacte de la solution puis une valeur arrondie au centième.

b. Résoudre l'inéquation : $-1-2\ln(x) > 0$.

c. En déduire le signe de la dérivée f' puis le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;\,4]$.

4. a. Recopier et compléter le tableau suivant avec des valeurs arrondies au centième :

x	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	1	1,5	2	3	4
$f(x)$		1,97								

b. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.

c. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente T.

d. Estimer, à l'aide du graphique, les solutions de l'équation $f(x) = 2$. On laissera apparents les traits de constructions.

EXERCICE 2 **8 points**

Dans cet exercice, les valeurs calculées seront arrondies au millième.

On étudie l'évolution d'une population de bactéries en fonction du temps.
N désigne le nombre de bactéries en milliers par millilitre à un instant donné t exprimé en heures.
On a observé et relevé N toutes les demi-heures et on a obtenu le tableau ci-dessous :

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
N	9	10,5	11	12,5	15	16	18	20	22	24	26

Pour étudier l'évolution de cette population, on effectue un changement de variable : $y = \ln(N)$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$y = \ln(N)$											

2. Représenter le nuage de points de coordonnées $\left(t_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal, en prenant comme unités

— sur l'axe des abscisses : 3 cm pour une heure

— sur l'axe des ordonnées : 10 cm pour une unité, en commençant les graduations à partir de 2.

3. **a.** Calculer les coordonnées de G, point moyen du nuage.

b. Déterminer une équation de la droite D passant par G et ayant pour coefficient directeur $0,215$.

c. Tracer cette droite D sur le graphique précédent.

4. On considère que cette droite permet un ajustement de la série $\left(t_i\ ;\ y_i\right)$. Estimer le nombre de bactéries (en milliers par millilitre) au bout de 6 heures, à l'aide du graphique puis par un calcul.

Baccalauréat STL La Réunion juin 2006
Biochimie–Génie biologique

Calculatrice autorisée

Durée de l'épreuve : 2 heures — Coefficient : 2

Ce sujet nécessite deux feuilles de papier millimétré.

EXERCICE 1 — **8 points**

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du prix semestriel moyen du baril de pétrole, en dollars, depuis le début de l'année 2002 (*cours du Brent*).

	Janvier 2002	Juin 2002	Janvier 2003	Juin 2003	Janvier 2004	Juin 2004	Janvier 2005	Juin 2005
Rang x_i du semestre	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix y_i du baril en dollars	20	24	29	27	30	38	44	53

On pose $z_i = \ln\left(y_i\right)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Recopier et compléter le tableau suivant, avec des valeurs arrondies à 10^{-2} près.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln\left(y_i\right)$								

2. Construire le nuage de points $(x_i\ ;\ z_i)$, dans un repère d'unités graphiques :
1 cm en abscisse, 5 cm en ordonnée.

3. On désigne par G_1 le point moyen des quatre premiers points du nuage et par G_2 le point moyen des quatre derniers.

a. Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2 (*on arrondira les résultats à* 10^{-2}). Tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.

b. Calculer une équation de la droite (G_1G_1) sous la forme $z = ax + b$. (*On arrondira les résultats à* 10^{-2}).

4. On admet que cette droite réalise un ajustement utilisable du nuage.
Si la tendance se confirme, prévoir, à partir de cet ajustement, le prix en dollars du baril de pétrole en janvier 2008.

EXERCICE 2 **12 points**

On étudie l'hydrolyse d'un ester en fonction du temps.

Partie A

La concentration y d'un ester, exprimée en moles par litre, en fonction du temps t, exprimé en heures, est solution de l'équation différentielle :

$$y' = -0,61y \quad \text{avec} \quad y(0) = 1,5.$$

Résoudre cette équation différentielle.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = 1,5\text{e}^{-0,61t}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour 1 heure en abscisse, 10 cm pour 1 unité en ordonnée.

1. Calculer la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.
   En déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}$, dont on donnera une équation.
2. **a.** Calculer $f'(t)$, où f' désigne la dérivée de f et étudier son signe sur $[0 ; +\infty[$.
   b. Établir le tableau de variations de f.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
   (On placera les points d'abscisses 0 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5).

Partie C

On admet que $f(t)$ représente la concentration de l'ester, en moles par litre, en fonction du temps t, exprimé en heures.

1. En faisant apparaître les constructions utiles, déterminer graphiquement :
   a. la concentration de l'ester au bout de 1 h 30 ;
   b. au bout de combien de temps la concentration de l'ester devient inférieure à 0,3 mole par litre.
2. Retrouver le résultat du **1. b.** par le calcul.
   (On donnera la valeur approchée par excès du résultat en heures et minutes).

Baccalauréat STL Biochimie–Génie biologique
Métropole juin 2006

Calculatrice autorisée

Durée de l'épreuve : 2 heures Coefficient : 2

EXERCICE 1 **9 points**

Le danger d'une exposition au bruit dépend de deux facteurs :

- le niveau sonore (x_i)
- la durée de l'exposition (y_i)

Le niveau sonore est exprimé en décibels, dont l'abréviation est dB.
Par exemple :
- 50 dB est le niveau habituel de conversation
- 85 dB est le seuil de nocivité (pour une exposition de 8 heures parjour).

Des durées limites d'exposition quotidienne à une phase bruyante ont été calculées et intégrées à la réglementation. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Niveau sonore en dB : x_i	Durée maximale d'exposition en heures par jour : y_i
$x_1 = 85$	$y_1 = 8$
88	4
91	2
94	1
97	0,5
100	0,25

Ainsi être exposé 8 heures à 85 dB est exactement aussi dangereux que d'être exposé 1 heure à 94 dB.

1. **a.** Montrer que les six niveaux sonores donnés dans la première colonne du tableau ci-dessus sont en progression arithmétique.

   b. On suppose que la progression reste la même. Déterminer le terme x_{13}.

2. **a.** Montrer que les durées maximales d'exposition, exprimées en heures par jour, données dans la deuxième colonne sont en progression géométrique.

   b. On suppose que la progression reste la même. Déterminer le terme y_{13}. Arrondir à la seconde la plus proche.

3. **a.** On pose $z_i = \ln\left(y_i\right)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   Recopier puis compléter le tableau ci-dessous dans lequel on fera figurer les valeurs approchées de z_i arrondies à 10^{-3} près.

Niveau sonore x_i	85	88	91	94	97	100
$z_i = \ln\left(y_i\right)$	2,079					

   b. Placer les points de coordonnées $(x_i\ ;\ z_i)$ dans un repère orthogonal tel que l'intersection des axes a pour coordonnées (85 ; 0) ; 0,5 cm représente 1 dB en abscisse et 1 cm représente 0,5 unité en ordonnées.

   c. Les points du nuage semblent alignés.
   Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point A d'abscisse 85 et le point B d'abscisse 94, sous la forme $z = ax + b$, où a et b sont calculés à 10^{-3} près.

4. Un concert de rock atteint les 120 dB. Déterminer pendant combien de temps, exprimé en secondes, on peut l'écouter pour que les normes en vigueur soient respectées :

a. en utilisant l'équation de la droite $\mathcal{D}$;

b. en utilisant le graphique (laisser apparents les tracés utiles).

EXERCICE 2 **11 points**

On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. La concentration C (en mg/L) de la substance injectée varie en fonction du temps t exprimé en heures suivant la relation :

$$C(t) = 8\left(\text{e}^{-t} - \text{e}^{-2t}\right).$$

On définit ainsi une fonction C sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction C dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
Unités graphiques :

— 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses
— 5 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Calculer la limite de la fonction C lorsque t tend vers $+\infty$.
   b. La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une asymptote? Si oui, préciser son équation.
2. **a.** Calculer la dérivée C' de C. Montrer qu'elle vérifie $C'(t) = 8\text{e}^{-2t}\left(2 - e\text{e}^{t}\right)$.
   b. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $C'(t) = 0$. Calculer la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.
   c. Étudier le signe de $C'(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   d. En déduire le tableau de variations de la fonction C. Montrer que la valeur maximale de la concentration est 2.
3. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Recopier puis compléter le tableau de valeurs ci-dessous, en arrondissant les valeurs de $C(t)$ à 10^{-2} près.

t (en heures)	0	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5
$C(t)$										

5. **a.** Construire la tangente T en précisant les coordonnées des deux points qui permettent son tracé.
   b. Construire dans le même repère la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
6. Déterminer graphiquement au bout de combien de temps la concentration retombe à la moitié de sa valeur maximale, en faisant figurer les tracés utiles.
   Donner le résultat en heures et minutes en arrondissant à la minute la plus proche.

∽ Baccalauréat STL Polynésie juin 2006 ∾
Biochimie–Génie biologique

Calculatrice autorisée

Durée de l'épreuve : 2 heures — Coefficient : 2

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel, distribué par le centre d'examen, est autorisé

EXERCICE 1 — **9 points**

Le thème de l'exercice est l'évolution de l'épidémie de SRAS de 2003. Le tableau suivant donne les nombres de cas déclarés (N_i), relevés aux dates suivantes : 4, 8, 11, 15, 18, 23 et 28 avril 2003 :

x_i	4	8	11	15	18	23	28
N_i	2 322	2 671	2 890	3 235	3 461	4 288	5 050

On pose $y_i = \ln N_i$ (ln désigne le logarithme népérien).

1. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant les résultats arrondis à 0,01 près.

x_i	4	8	11	15	18	23	28
y_i	7,75						8,53

2. Représenter le nuage de points de coordonnées $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 0,5 cm pour 1 jour sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.
   On graduera l'axe des ordonnées à partir de 7.
3. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage obtenu (résultats arrondis â 0,01 près).
4. Soit d la droite passant par le premier et le dernier point du nuage.
   Une équation de d est $y = 0{,}0325x + 7,62$.
   Le point G appartient-il à d ?
   Placer G et d sur le dessin précédent.
5. On admet que d constitue un ajustement convenable du nuage de points.
   a. En utilisant l'équation de d, déterminer la valeur de y correspondant à $x = 38$.
   En déduire une estimation du nombre de cas prévisibles le 8 mai.
   b. À l'aide de l'ajustement affine $y = 0{,}0325x + 7,62$ et de la relation $y = \ln N$, exprimer N en fonction de x. Déterminer, en utilisant ce modèle, à partir de quelle valeur entière de z, N est supérieur ou égal à 10 000.
6. Le nombre de cas répertoriés a été, en réalité, de 7 053 le 8 mai.
   Le modèle étudié dans cet exercice est-il adapté pour décrire la situation le 8 mai (on considère que le modèle est adapté si l'écart entre la valeur réelle et la valeur donnée par le modèle est inférieur à 50 unités) ?

EXERCICE 2 **11 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,3]$ par

$$f(x) = 6 - 5x\mathrm{e}^{-2x+2}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,3]$, $f'(x) = 5(2x-1)\mathrm{e}^{-2x+2}$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,3]$.
   c. Déterminer les valeurs exactes de $f(0)$, $f(0,5)$, $f(3)$ et dresser le tableau de variations de f.
2. **a.** Donner les valeurs arrondies au dixième de $f(x)$ pour les valeurs suivantes de x :

$$0,25\ ;\ 0,5\ ;\ 1\ ;\ 1,5\ ;\ 2\ ;\ 2,5\ ;\ 3.$$

   b. Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses $x_1 = 0,75$, $x_2 = 1$ et $x_3 = 1,25$. (On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près). Pour laquelle de ces abscisses, le coefficient directeur est-il le plus grand ?
3. **a.** Tracer les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses x_1, x_2 et x_3.
   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B

On considère que la courbe $\mathscr{C}$ donne un modèle de la variation de la température de l'eau en fonction de la profondeur près de l'estuaire d'un grand fleuve un jour d'hiver. La température est exprimée en degrés Celsius et la profondeur en centaines de mètres.

1. À quelle profondeur la température de l'eau est-elle minimale ?
2. Déterminer graphiquement pour quelles profondeurs la température est comprise entre 0 °C et 4 °C. Faire figurer les constructions utiles.
3. En utilisant la question A. 2., indiquer au voisinage de quelle profondeur, entre 50 m et 300 m, la température de l'eau augmente le plus rapidement.

∽ Baccalauréat STL Biochimie-Génie biologique ∽
Métropole septembre 2006

Calculatrice autorisée

Durée de l'épreuve : 2 heures Coefficient : 2

EXERCICE 1 **10 points**

Les deux parties sont indépendantes

Une population de bactéries diminue en fonction du temps sous l'effet d'un antiseptique. On va chercher à modéliser l'évolution de cette population à l'aide de résultats expérimentaux obtenus ci-dessous. Le temps t est donné en minutes, $N(t)$ est le nombre de bactéries à l'instant t et $N'(t)$ est la vitesse de variation de cette population à la date t, c'est en fait la dérivée de $N(t)$.

t	0	2	4	6	8	10
$N(t)$	12 000	8 000	5 400	3 600	2 500	1 650
$N'(t)$	-2400	-1600	-1070	-730	-480	-340

Partie A

1. Calculer à chaque date t le rapport $\dfrac{N'(t)}{N(t)}$ à $0,001$ près. Calculer la moyenne arithmétique des résultats obtenus.
2. Résoudre l'équation différentielle $N'(t) = -0,2N(t)$ sachant que $N(0) = 12000$.
3. Estimer la population au bout de 15 minutes, en utilisant ce modèle.

Partie B

1. En utilisant le tableau initial, reproduire et compléter ce tableau dans lequel la fonction logarithme népérien (on donnera les valeurs arrondies à $0,01$) :

t_i	0	2	4	6	8	10
$y_i = \ln(N(t_i))$	9,39					7,41

2. Représenter graphiquement le nuage de points correspondant $M_i\left(t_i\ ;\ y_i\right)$ (unités : 1 cm pour 1 minute en abscisse et 1 cm pour 1 unité en ordonnée).
3. **a.** On appelle G le point moyen des trois premiers points et G$'$ le point moyen des trois derniers. Calculer à $0,01$ près les coordonnées de G et G$'$.

   b. Placer G et G$'$ sur le graphique et tracer la droite (GG$'$).

   c. Trouver par le calcul, l'équation de la droite (GG$'$), en arrondissant à $0,01$ près les résultats.
4. **a.** En déduire, en utilisant le modèle d'estimation donné dans le 3. c., que $N(t) = \mathrm{e}^{-0,2t}\mathrm{e}^{9,39}$.

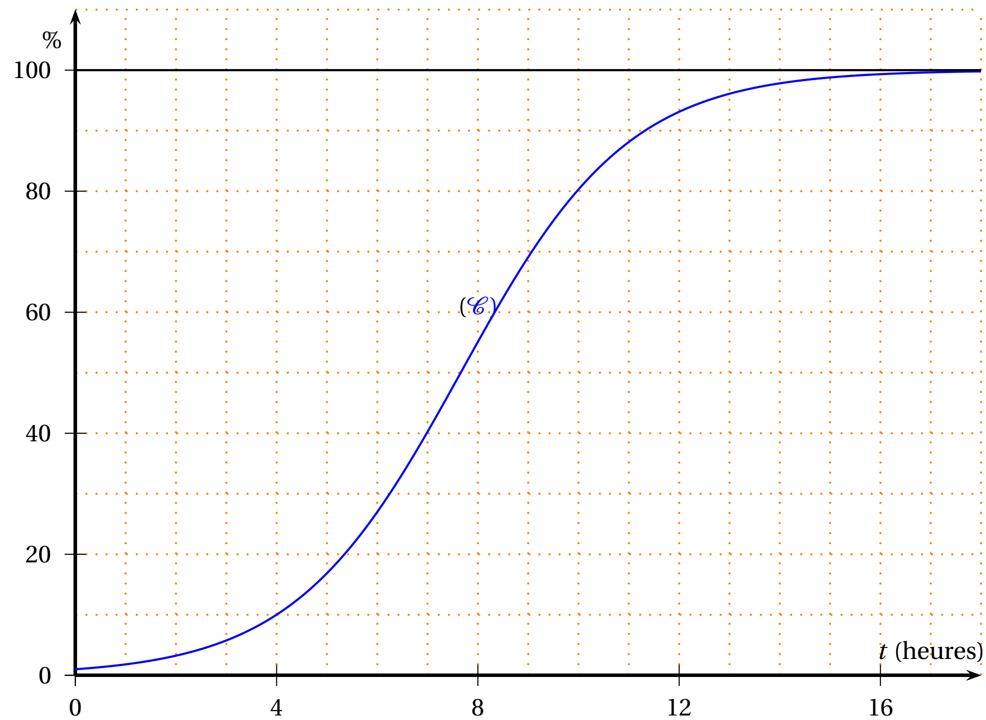
   b. Estimer la population au bout de 15 minutes.

EXERCICE 2 **10 points**

Vers 1840, Verhulst propose un modèle d'évolution d'une population de bactéries en culture. Il suppose que la population ne peut dépasser une certaine valeur maximale.
On note $f(t)$ le pourcentage de cette valeur maximale à l'instant t. On suppose que $f(0) = 1$ et, pour une certaine population, on obtient que

$$f(t) = \frac{100}{1+99\mathrm{e}^{-0,6t}},$$

où t est exprimé en heures.
La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f.



Partie A : Les questions sont résolues par lecture graphique.

1. Donner le pourcentage du maximum de la population à la date $t = 10$.
2. Quelle est la limite de $f(t)$ en $+\infty$?
3. À quel instant t, à $0,1$ près, la population atteint-elle 50 % de son maximum ?
4. Quel est le signe de $f(t)$?
5. À quelle date la croissance de la population, est-elle la plus rapide, à la date $t = 2$ ou à la date $t = 10$? Expliquer.

Partie B : Les questions sont résolues par le calcul.

1. Calculer à $0,1$ % près le pourcentage de la population à la date $t = 10$.
2. Quelle est la limite de $f(t)$ en $+\infty$? Que peut-on en déduire ?
3. À quel instant t la population atteint-elle 50 % de son maximum (à $0,01$ près) ?
4. Prouver que la dérivée de f est

$$f'(t) = \frac{5940\mathrm{e}^{-0,6t}}{\left(1+99\mathrm{e}^{-0,6t}\right)^2}.$$

   En déduire le signe de $f'(t)$.

5. Trouver l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 10 (le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine étant donnés à $0,1$ près).

∽ Baccalauréat STL juin 2006 ∾
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice autorisée 3 heures

Durée de l'épreuve : 3 heures Coefficient : 4

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

Pour tout nombre complexe z, on note

$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8.$$

1. Calculer $P(2)$.
   Vérifier que, pour tout nombre complexe z, $P(z)$ peut s'écrire sous la forme $P(z) = (z-2)\left(z^2 - 2z + 4\right)$.
2. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation
   $z^2 - 2z + 4 = 0$.
   En déduire les solutions, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 2 \qquad b = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad c = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$$

1. **a.** Placer, sur la copie, les points A, B et C dans le plan complexe.
   b. Démontrer que les points A, B et C sont sur un même cercle Γ de centre O.
   c. Construire le cercle Γ.
2. Déterminer un argument du nombre complexe b. En déduire une mesure de l'angle $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}})$.
   Quelle est la nature du triangle OAB ?

EXERCICE 2 **5 points**

Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est 1 013 hectopascal.
Dans cet exercice, on admet que la pression atmosphérique diminue de 1,25 % à chaque élévation de 100 m.
Pour tout entier naturel n, on note P_n la pression, exprimée en hectopascal, à l'altitude $100n$, exprimée en mètres. Soit (P_n) la suite numérique des valeurs prises par cette pression atmosphérique. On a alors $P_0 = 1\,013$.

1. Calculer les pressions P_1 et P_2, arrondies à l'unité, aux altitudes 100 et 200.
2. **a.** Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
   b. En déduire la nature de la suite (P_n). Préciser sa raison et son premier terme.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $P_n = 1\,013 \times 0{,}987\,5^n$.
3. Calculer la pression atmosphérique, arrondie à l'unité, à l'altitude 3 200.
4. Calculer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hectopascal.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2. En remarquant que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f(x)$ est égal à $\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement le résultat.
3. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{-2 + \ln x}{x^2}.$$
   b. Étudier le signe de $-2 + \ln x$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   En déduire le signe de f' sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. On note I le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\imath}\right)$.
   Déterminer les coordonnées du point I.
5. On note $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.
   Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}$.
6. Sur la feuille de papier millimétré, tracer, dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{T}$.
   On prendra 1 cm pour unité graphique sur l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\imath}\right)$ et 5 cm pour unité graphique sur l'axe $\left(\text{O}~;~\vec{\jmath}\right)$.

Partie B

1. **a.** On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par
   $$g(x) = (\ln x)^2.$$
   On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   Calculer $g'(x)$.
   b. En déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. **a.** Calculer $\text{J} = \int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$, où f est la fonction définie dans la partie A.
   b. Interpréter graphiquement l'intégrale J.

∽ Baccalauréat STL Métropole septembre 2006 ∾
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice autorisée — 3 heures
Durée de l'épreuve : 3 heures — Coefficient : 4

EXERCICE 1 **4 points**

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, où y est une fonction deux fois dérivable de la variable réelle x.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E), dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2} ; -\sqrt{3}\right)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 2.
3. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $\dfrac{1}{2}z^2 + z + 1 = 0$.
   b. On note z_1, z_2, z_3 et z_4 les nombres complexes définis par :
   $$z_1 = -1 + \mathrm{i}, \quad z_2 = \overline{z_1}, \quad z_3 = -2 \quad \text{et } z_4 = -2z_1.$$
   Écrire z_2 et z_4 sous forme algébrique.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).
   On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4.
   a. Placer les points A, B, C, D dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   b. On note I le milieu du segment [CD]. Déterminer l'affixe du point I.
   c. Montrer que le triangle ACD est rectangle.
   d. Préciser le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle ACD.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(3 - x^2\right)\mathrm{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthononnal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Une partie de la courbe $\mathscr{C}$ est représentée sur la feuille annexe, à rendre avec la copie.

Partie I : étude de la fonction *f*

1. **a.** Étudier la limite de f en $+\infty$.

b. Étudier la limite de f en $-\infty$. On pourra utiliser le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \text{e}^x = 0$; $n \in \mathbb{N}$.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Déterminer les coordonnées des points A et B, points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

Partie II : Tracé d'une parabole

1. Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = 6 - 2x^2$.
Vérifier que les points A et B, définies à la question 3 de la partie I, appartiennent à la parabole $\mathscr{P}$.

2. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel x,

$$\left(6 - 2x^2\right) - f(x) = \left(3 - x^2\right)\left(2 - \text{e}^x\right).$$

b. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[-\sqrt{3}\,;\,\ln 2\right]$,

$$\left(3 - x^2\right)\left(2 - \text{e}^x\right) \geqslant 0.$$

c. En déduire que, sur l'intervalle $\left[-\sqrt{3}\,;\,\ln 2\right]$, la parabole $\mathscr{P}$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$.

3. Tracer la parabole $\mathscr{P}$ sur la feuille annexe, à rendre avec la copie.

Partie III : Calcul d'aires

1. On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right)\text{e}^x.$$

a. On note G' la fonction dérivée de la fonction G. Calculer $G'(x)$.

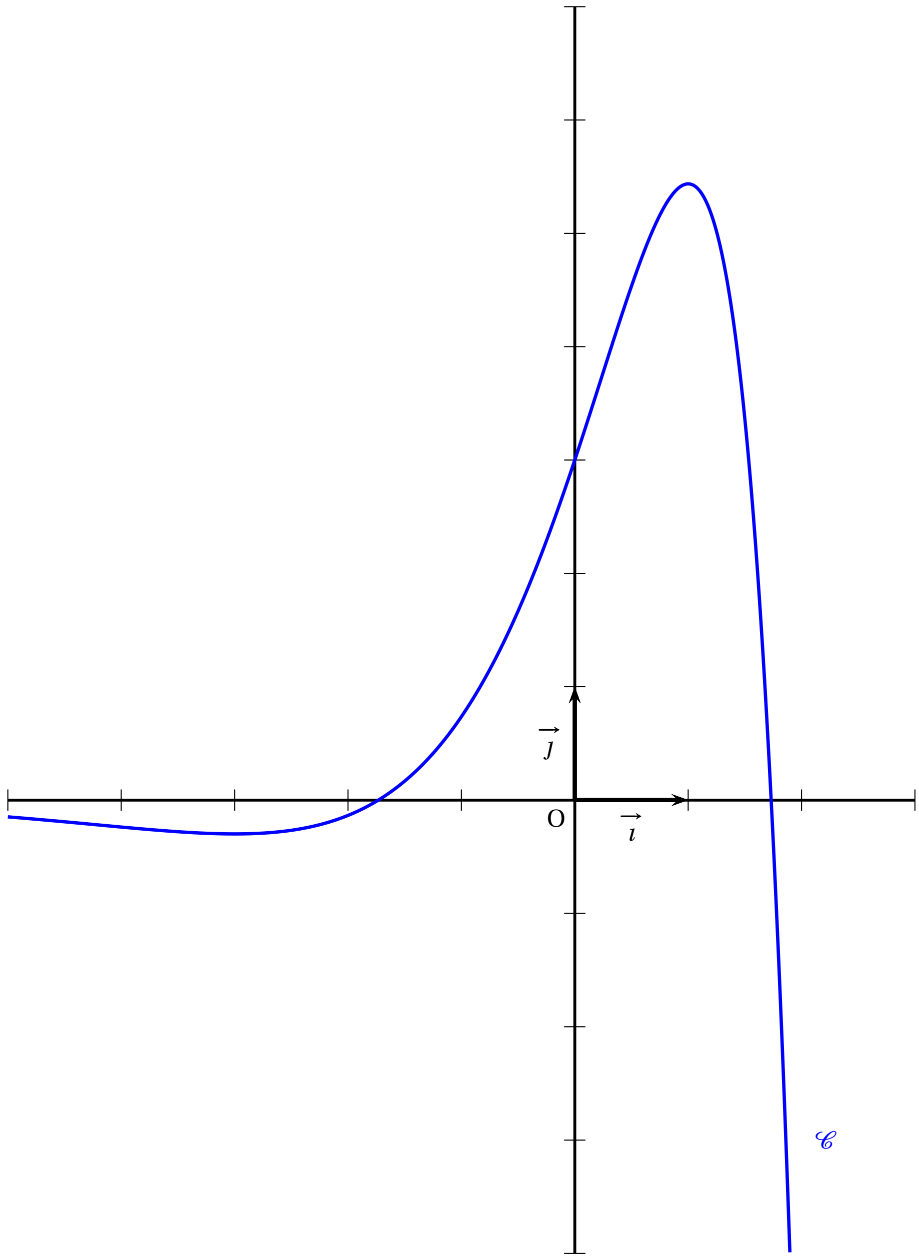
b. En déduire une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On considère le domaine du plan limité par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$, les droites d'équations respectives $x = -\sqrt{3}$ et $x = 0$.

a. Hachurer le domaine sur la feuille annexe, à rendre avec la copie.

b. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine $\mathscr{D}$. Calculer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire.
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

Annexe (à rendre avec la copie)



∽ Baccalauréat STL Métropole juin 2006 ∾
Physique de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice autorisée | 3 heures
Durée de l'épreuve : 4 heures | Coefficient : 4

Le sujet nécessite 2 feuilles de papier millimétré

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher.
Sur chacune d'elles est inscrit un nombre comme l'indique le tableau ci-dessous :

Nombre inscrit	1	2	5	10
Nombre de boules	4	3	2	1

Un joueur mise 4 euros, tire une boule au hasard et reçoit le montant (en euros) inscrit sur la boule.

1. Le joueur effectue un tirage.
On appelle p_1 la probabilité pour qu'il perde (c'est à dire qu'il reçoive moins de 4 euros) et p_2 la probabilité pour qu'il gagne (c'est à dire qu'il reçoive plus de 4 euros).
Calculer p_1 etp_2.

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre le « gain » du joueur (positif s'il gagne, négatif s'il perd),

a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?

b. Présenter la loi de probabilité de X dans un tableau.

c. Calculer son espérance mathématique $\text{E}(X)$.

3. Un jeu est équitable si et seulement si $\text{E}(X) = 0$.
On décide de changer le nombre inscrit sur une seule boule portant le nombre 1.
Quel nombre doit-on y inscrire pour que le jeu soit équitable ?

EXERCICE 2 **6 points**

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. (unité graphique 1 cm).
On considère un polynôme P défini par $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$ où z est une variable complexe.

1. a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $P(z) = (z+2)\left(az^2 + bz + c\right)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 2 - 2\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{B}} = 2 + 2\text{i}.$$

a. Écrire sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle les nombres z_{A} et z_{B}.

b. Placer dans le plan $\mathscr{P}$ les points A et B.

c. Quelle est la nature du triangle OAB ?

3. On considère la transformation T du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}z.$$

a. Caractériser géométriquement la transformation T.

b. Déterminer sous forme trigonométrique et sous forme algébrique l'affixe du point A′ image de A par la transformation T.

c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

PROBLÈME **10 points**

On considère la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)^2\mathrm{e}^{-x}$$

dans le plan rapporté a un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$(unité graphique 2cm).

PARTIE A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

   b. Montrer que si x est différent de zéro on a : $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$.
   En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. **a.** Montrer que $f'(x) = \left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

3. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4. Étude de la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$.

   a. Montrer que pour tout réel x on a :

   $$f(x)-(x+1) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}\cdot g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = x+1-\mathrm{e}^{x}.$$

   b. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

   d. En déduire le signe de $g(x)$, puis de $f(x)-(x+1)$.

   e. En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$.

5. Après avoir reproduit et complété le tableau de valeurs ci-dessous, tracer $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.
   Donner les valeurs de $f(x)$ arrondies à 10^{-2} près.

x	-2	-1	$-0,5$	0	0,5	1	2	3	4	6
$f(x)$										

PARTIE B

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \left(-x^2-4x-5\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

2. Calculer l'aire en cm^2 de la région du plan comprise entre les axes de coordonnées, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $x = 3$.
   Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.