Baccalauréat S 1997
L'intégrale d'avril à décembre 1997

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Tapuscrit : Denis Vergès

Baccalauréat S Pondichéry avril 1998

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires.
   On extrait simultanément deux boules de cette urne ; on considère que tous les tirages sont équiprobables.
   a. Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges ?
   b. Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires ?
   c. Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de même couleur ?
   d. Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?
2. On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires.
   On tire maintenant deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2 ; on suppose que tous les tirages sont équiprobables.
   On considère les évènements suivants :
   R : « Les trois boules tirées sont rouges »
   D : « Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur »
   B : la boule tirée dans l'urne U_2 est rouge ».
   a. Calculer la probabilité de l'évènement R.
   b. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?
   c. Calculer la probabilité conditionnelle $p_D(\mathrm{B})$ de l'évènement B sachant que l'évènement D est réalisé.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

On considère le polynôme $\mathrm{P}(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$, où z est un nombre complexe.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :
$$\mathrm{P}(z) = \left(z^2 + az + b\right)\left(z^2 + 4z + 20\right).$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.
3. Placer dans un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m = -2 + 4\mathrm{i}$, $n = -2 - 4\mathrm{i}$, $p = 2 + 3\mathrm{i}$ et $q = 2 - 3\mathrm{i}$.
4. **a.** Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\dfrac{z-p}{z-m} = \mathrm{i}$. Placer son image K.
   b. En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.
4. **a.** Déterminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.
   b. Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.
   c. Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, d'unité graphique 4 cm, on note A le point d'affixe 1, B le point d'affixe i, (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et (D) la droite d'équation $y = 1$.
À tout point M du plan, d'affixe z distincte de i, on associe le point M' d'affixe z', telle que

$$z' = \frac{z - \mathrm{i}}{\overline{z} + \mathrm{i}}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z, avec z distinct de i, tels que $z' = 1$.

2. **a.** Montrer que, pour tout z distinct de i, $z'\overline{z}' = 1$.
Interpréter géométriquement ce résultat.

b. Montrer que, pour tout point M n'appartenant pas à la droite (D), $\dfrac{z'-1}{z-\mathrm{i}}$ est un imaginaire pur.
En déduire que les droites (AM') et (BM) sont perpendiculaires.

c. Déduire des questions 2. a. et b. une construction du point M' lorsque M est un point non situé sur la droite (D).
Préciser la position du point M' lorsque M appartient à la droite (D) privée du point B.

3. **a.** Soit P un point du cercle (C), distinct du point A.
En utilisant la question 2. b., représenter l'ensemble E des points M tels que $M' = \mathrm{P}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

c. En utilisant ce qui précède, et sans aucun calcul, représenter l'ensemble F des points M dont les affixes z sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{\overline{z}+\mathrm{i}}\right)^3 = 1$.

Problème **11 points**

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x\mathrm{e}^x + 1}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; unité graphique : 4 cm.

Partie A

⋆ **étude d'une fonction auxiliaire**

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x + 2 - \mathrm{e}^x.$$

1. Étudier le sens de variation de g sur $[0~;~+\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0~;~+\infty[$.
On note α cette solution.

a. Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$.

2. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

⋆ **Étude de la fonction f et tracé de la courbe $\mathscr{C}$**

1. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à $[0~;~+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x g(x)}{(x\mathrm{e}^x + 1)^2}.$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. a. Montrer que pour tout réel positif x,

$$f(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\mathrm{e}^{-x}}$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3. a. Établir que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+1}$.

b. En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

5. a. Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) - x = \frac{(x+1)\,u(x)}{x\mathrm{e}^{x}+1} \quad \text{avec } u(x) = \mathrm{e}^{x} - x\mathrm{e}^{x} - 1.$$

b. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.

c. Déduire des questions précédentes la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (T).

6. Tracer $\mathscr{C}$ et (T).

Partie C

⋆ **Calcul d'aire et étude d'une suite**

1. Déterminer une primitive F de f sur $[0\ ;\ +\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie dans la question **B. 2.**

2. On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la tangente (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Calculer, en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$.

Donner une valeur décimale au mm^2 près de l'aire $\mathscr{A}$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a. Calculer v_0, v_1 et v_2.

On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de v_0, v_1 et v_2.

b. Interpréter graphiquement v_n.

c. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$,

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(n)$$

En déduire la monotonie de la suite (v_n) à partir de $n = 1$.

d. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Nord juin 1997

EXERCICE 1 **4 points**

Juliette débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est 0,6, et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est $0,7$. On note, pour n entier naturel ou nul :
G_n l'évènement « Juliette gagne la n-ième partie »
P_n l'évènement « Juliette perd la n-ième partie »

1. **a.** Déterminer les probabilités $p\left(G_1\right)$, $p\left(G_2/G_1\right)$ et $p\left(G_2/P_1\right)$. En déduire la probabilité $p\left(G_2\right)$.

   b. Calculer $p\left(P_2\right)$.

2. On pose, pour n entier naturel non nul, $x_n = p\left(G_n\right)$ et $y_n = p\left(P_n\right)$.

   a. Déterminer pour n entier naturel non nul les probabilités $p\left(P_{n+1}/G_n\right)$ et $p\left(G_{n+1}/P_n\right)$.

   b. Montrer que pour tout n entier naturel non nul :

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{array}\right.$$

3. Pour n entier naturel non nul, on pose

$$v_n = x_n + y_n \text{ et } w_n = 4x_n - 3y_n$$

   a. Montrer que la suite (v_n) est constante de terme général égal à 1.

   b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.

4. **a.** Déduire du 3. l'expression de x_n en fonction de n.

   b. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, ABC est un triangle rectangle en A, direct, non isocèle. H est le pied de la hauteur issue de A. Le point D est tel que ACD est un triangle rectangle en A, isocèle et direct. O est le pied de la hauteur issue de D dans le triangle OBC. K est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle DAO.

1. Faire une figure.
2. Montrer que la rotation r de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ transforme la droite (CB) en la droite (DO), puis le triangle AHC en le triangle AKD. En déduire que AHOK est un carré.
3. Montrer que les droites (AB) et (KH) sont sécantes. (On pourra montrer que l'hypothèse « (AB) et (KH) parallèles » conduit à l'égalité « AO = AD » et que ceci est contradictoire avec les hypothèses de l'énoncé).
4. En déduire qu'il existe une homothétie h qui transforme le triangle AKD en le triangle BHA.
5. On considère la transformation composée $s = h \circ r$.

   a. Déterminer l'image des points H, C et A par s.

   b. Identifier cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 2y' + 5y = 2x + 3.$$

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ soit solution de cette équation.
2. Soit g une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que g vérifie (E) si et seulement si $g - f$ vérifie l'équation

$$(\mathrm{E}') : \quad y'' + 2y' + 5y = 0.$$

3. Résoudre (E′) et en déduire la solution générale de (E).
4. Déterminer la fonction numérique h, solution particulière de (E) vérifiant les conditions initiales $h(0) = 1$ et $h'(0) = 1$.

Problème **11 points**

La partie D est indépendante des parties B et C.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité 3 cm).
On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right).$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Justifier que, pour tout x réel, $x^2 - 2x + 2 > 0$.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Représenter $(\mathscr{C})$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$: on montrera que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$ et on placera les points d'abscisse 0 et 2 ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.

Partie B

On s'intéresse à l'intersection de $(\mathscr{C})$ et de (Δ).
On pose, pour tout réel x, $\quad \varphi(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la fonction dérivée $\varphi"(x)$ de $\varphi(x)$. En déduire que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Déterminer la limite de φ en $-\infty$.
   b. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\varphi(x) = x\left[\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right]$$

   En déduire la limite de φ en $+\infty$.

Partie C

On pose J = [0,3 ; 0,4].

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto x^2 - 2x + 2$ est décroissante sur J. En déduire que si x appartient à J alors $f(x)$ appartient à J.
2. **a.** Prouver que pour tout x de J, $\left|f'(x)\right| \leqslant 0,95$ (on pourra montrer que f' est croissante sur J).

   b. En déduire que pour tout x de J, $|f(x) - \alpha| \leqslant 0,95|x - \alpha|$.
3. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 0,3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

   a. Prouver que pour tout n :
   - $u_n \in \text{J}$
   - $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,95\,|u_n - \alpha|$
   - $|u_n - \alpha| \leqslant 0,1 \times (0,95)^n$.

   En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

   b. Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$.

Partie D

On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire du domaine compris entre les droites d'équation $x = 0, x = \dfrac{1}{2}$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$. On se propose de déterminer une valeur approchée de $\mathscr{A}$ en unités d'aire.

1. Montrer que la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{4}$ a pour équation $y = -\dfrac{24}{25}x + \dfrac{6}{25} + \ln\dfrac{25}{16}$.
2. Soient les points E d'abscisse 0 et F d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ de la courbe $\mathscr{C}$.

   Montrer que la droite (EF) a pour équation $y = 2\left(\ln\dfrac{5}{8}\right)x + \ln 2$.
3. On admet que sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de (T) et en dessous de (EF).

   a. Montrer que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{24}{25} + \frac{6}{25} + \ln\frac{25}{16}\right)\mathrm{d}x \leqslant \mathscr{A} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2\left(\ln\frac{5}{8}\right)x + \ln 2\right)\mathrm{d}x.$$

   b. En déduire que $\ln\dfrac{5}{4} \leqslant \mathscr{A} \leqslant \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{5}{2}$.

   Donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à $5 \cdot 10^{-3}$ près.

Baccalauréat S Antilles–Guyane juin 1997

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, l'unité graphique est 1 cm.
On considère les points A, B , C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = (3\sqrt{3} - 2) + \text{i}(3 + 2\sqrt{3}) \quad z_{\text{B}} = (-\sqrt{3} - 1) + \text{i}(\sqrt{3} - 1) \quad z_{\text{C}} = (1 - 4\sqrt{3}) + \text{i}(-4 - \sqrt{3})$$

1. On se propose de placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ à l'aide du compas. Pour cela on considère la rotation R de centre O et d'angle de mesure $-\dfrac{2\pi}{3}$.

a. Donner l'écriture complexe de R.

b. Vérifier que R transforme le point A en le point A_0 d'affixe : $4 - 6\text{i}$.
On admettra que R transforme les points B et C en les points B_0 et C_0 d'affixes respectives $2 + 2\text{i}$ et $-2 + 8\text{i}$.

c. Placer les points A_0, B_0, C_0 puis, à l'aide du compas, les points A, B, C. (La construction de A sera justifiée).

2. **a.** Calculer $z_{\text{A}} - z_{\text{B}} + z_{\text{C}}$.

b. En déduire que le point O est le barycentre du système de points pondérés $\{(\text{A}, 1), (\text{B}, -1), (\text{C}, 1)\}$.

3. Soit l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|\overrightarrow{M\text{A}} - 2\overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\|$$

a. Vérifier que B appartient à $\mathscr{C}$.

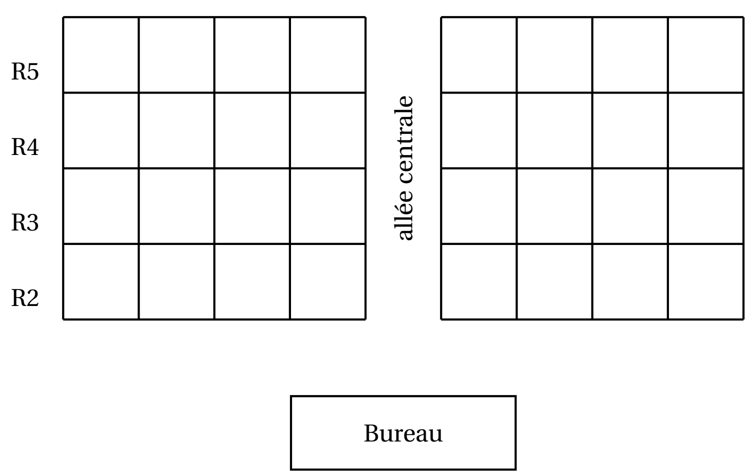
b. Déterminer puis tracer l'ensemble $\mathscr{C}$.

4. Déterminer puis tracer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M du plan tels que :

$$2\left\|\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|\overrightarrow{M\text{A}} - 3\overrightarrow{M\text{B}}\right\|$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Voici le plan de la salle 308 du lycée Dupont.



Le premier jour de l'année scolaire, les élèves de la classe de TS1 sont invités par leur professeur principal à s'installer au hasard des places disponibles dans cette salle.
La classe de TS1 comporte 28 élèves.

1. **a.** Quel est le nombre de répartitions possibles des places inoccupées?

   b. Calculer à 10^{-1} près, les probabilités des évènements suivants :
   A : « les huit places du rang R4 sont toutes occupées » ;
   B : « il y a autant d'élèves à gauche qu'à droite de l'allée centrale ».
2. Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme fractionnaire. Soit X la variable aléatoire « nombre de places inoccupées au rang R4 ».

   a. Donner la loi de probabilité de X.

   b. Calculer son espérance mathématique.

PROBLÈME **5 POINTS**

Partie I

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et étudier le sens de variation de f.
2. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Donner le tableau de variations de la fonction f et en déduire le signe de $f(x)$ pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.
4. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique est 5 cm. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g. Déduire de la partie I le sens de variation de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Vérifier que $g = h \circ k$ avec h et k les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :
   $$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \text{et} \quad k(x) = \frac{1}{x}.$$
   En déduire la limite de g en $+\infty$ et en 0.
3. Donner le tableau des variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie III

1. Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1. On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient :
   $$1 \leqslant x \leqslant \lambda \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$
   En utilisant les résultats de la partie II,

a. Calculer $\mathscr{A}(\lambda)$ en fonction de λ.

b. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

c. Justifier l'affirmation : « L'équation $\mathscr{A}(\lambda) = 5$ admet une solution unique notée λ_0 », puis donner un encadrement de λ_0 d'amplitude 10^{-2}.

2. Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Montrer, en remarquant que $\ln(u_n) = g(n)$, que :

a. La suite (u_n) est une suite croissante.

b. La suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

Baccalauréat S Asie juin 1997

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Une urne contient deux boules blanches et n noires, indiscernables au toucher.
   Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note A_2 l'évènement : « le joueur a tiré deux boules blanches ».
   Déterminer n pour que la probabilité $p(A_2)$ de l'évènement A_2 soit égale à $\dfrac{1}{15}$?
2. Dans **toute la suite du problème** on prend $n = 4$.
   A - Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne et on note :
   A_0 l'évènement : « le joueur a tiré deux boules noires » ;
   A_1 l'évènement : « le joueur a tiré une boule noire et une blanche » ;
   A_2 l'évènement : « le joueur a tiré deux boules blanches ».
   a. Calculer la probabilité des évènements A_0 et A_1.
   b. Lors de ce tirage, le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée et marque deux points pour chaque boule noire tirée.
   Soit X le nombre de points marqués.
   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   Déterminer $\mathrm{E}(X)$.

B - Après ce premier tirage, le joueur remet les boules noires tirées dans l'urne et laisse les boules blanches tirées de côté, puis effectue un nouveau tirage simultané de deux boules.
Soit B_i l'évènement : « on obtient i boule(s) blanche(s) lors du deuxième tirage » ($i = 0,\ 1$ ou 2).

a. Donner $p(B_0 / A_2)$ et en déduire $p(B_0 \cap A_2)$.
Calculer de même $p(B_0 \cap A_1)$ et $p(B_0 \cap A_0)$.
En déduire que $p(B_0) = \dfrac{41}{75}$.

b. Montrer de même que $p(B_2) = \dfrac{2}{75}$.
En déduire $p(B_1)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

On considère le plan complexe P muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. Soit le polynôme P tel que, pour tout z de $\mathbb{C}$,
$$P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4.$$
   Déterminer les réels u et v tels que $P(z) = (z-2)\left(z^2 + uz + v\right)$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. On note α la solution de l'équation ci-dessus dont la partie imaginaire est strictement positive et β le conjugué de α.
   Soit A, B et C les points d'affixes respectives α, β et 2, I le milieu de [AB] et r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   Déterminer l'affixe du point $r(\mathrm{B})$ et en déduire la nature du quadrilatère OACB.

3. Soit f l'application de P privé du point C dans P qui au point M d'affixe z $(z \neq 2)$ associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z - (1 + \mathrm{i})}{z - 2}.$$

   a. Déterminer $f(\mathrm{A})$ et $f(\mathrm{B})$.
   Déterminer le point E tel que $f(\mathrm{E}) = \mathrm{C}$.

   b. Quelles distances représentent les réels $|z - (1 + \mathrm{i})|$ et $|z - 2|$?
   En déduire que si M appartient à la médiatrice de [AC], M' appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres respectifs O et O$'$ et de rayons r et $2r$ tangents extérieurement en A, de diamètres respectifs [AB] et [AA$'$].
Soit M un point quelconque de $\mathscr{C}$, distinct de A et de B, et M' le point de $\mathscr{C}'$ tel que le triangle AMM' soit rectangle en A (on prendra pour la figure $r = 2$ cm)

1. **a.** Déterminer en justifiant les réponses :
   — le rapport de l'homothétie h_1 de centre A qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$;
   — le centre I de l'homothétie h_2 distincte de h_1 qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.
   Placer I sur la figure.

   b. On note $M_1 = h_1(M)$
   Montrer que M_1 est le point de $\mathscr{C}'$ diamétralement opposé à M'.
   Déterminer $h_2(M)$ et en déduire que la droite (MM') passe par un point fixe, lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ privé des points A et B.

2. La droite (MM') recoupe $\mathscr{C}$ en N et $\mathscr{C}'$ en N'.
   Quelle est l'image de N par h_2 ?
   Montrer que $\left(\overrightarrow{\mathrm{A}N}, \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{A}N'}, \overrightarrow{\mathrm{A}M'}\right) \mod (\pi)$ et en déduire que le triangle ANN' est rectangle en A.

3. Soit ω milieu de $[MM']$. Montrer que ω appartient à un cercle fixe dont on donnera le centre et le rayon (on pourra utiliser le milieu D de [OO$'$]).

PROBLÈME **10 points**

Pour tout entier n strictement positif on considère la fonction f_n définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthogonal (unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A - Étude pour $n = 1$

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} f_1(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_1(x)$.
   Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_1$?
2. Étudier le sens de variation de f_1 et donner le tableau des variations de f_1.
3. Déterminer une équation de la tangente en $x_0 = 1$, à la courbe $\mathscr{C}_1$.
   Étude pour $n = 2$

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x)$.
   Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_2$?
5. Calculer $f_2'(x)$ et donner le tableau des variations de f_2.

Partie B

1. Étudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduire la position relative de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
2. Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Partie C

n étant un entier naturel non nul, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. On pose $F(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$.
   Calculer $F'(x)$, en déduire I_1.
2. En utilisant une intégration par parties montrer que :
$$I_{n+1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n.$$
3. Calculer I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

Partie D

1. En utilisant la question 2. de la partie C, montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul :
$$\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$
2. En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1~;~\mathrm{e}]$, montrer que, pour tout n entier naturel non nul :
$$0 \leqslant I_n \leqslant 1.$$
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)$.

Baccalauréat S Centres étrangers I juin 1997

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier supérieur ou égal à 1). U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.
On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. On considère l'évènement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».

a. Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'évènement A peut s'écrire :

$$p(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right).$$

b. Déterminer la limite de $p(A)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On considère l'évènement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».
Vérifier que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B peut s'écrire

$$p(B) = \frac{6}{4(n+3)}.$$

3. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2.

— Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ francs;
— Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs;
— Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

a. Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10. ? Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$).

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

d. On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, l'unité graphique est 1 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = \left(3\sqrt{3}-2\right) + \text{i}\left(3+2\sqrt{3}\right) \quad ; \quad z_{\text{B}} = \left(-\sqrt{3}-1\right) + \text{i}\left(\sqrt{3}-1\right) \quad ;$$
$$z_{\text{C}} = \left(1-4\sqrt{3}\right) + \text{i}\left(-4-\sqrt{3}\right).$$

1. On se propose de placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ à l'aide du compas. Pour cela on considère la rotation R de centre O et d'angle de mesure $-\dfrac{2\pi}{3}$.

a. Donner l'écriture complexe de R.

b. Vérifier que R transforme le point A en le point A′ d'affixe : $4-6\text{i}$.

On admettra que R transforme les points B et C en les points B′ et C′ d'affixes respectives $2+2\text{i}$ et ?$2+8\text{i}$.

c. Placer les points A′, B′, C′ puis, à l'aide du compas, les points A, B, C. (La construction du point A sera justifiée).

2. **a.** Calculer $z_{\text{A}} - z_{\text{B}} + z_{\text{C}}$.

b. En déduire que le point O est le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1),\ (B,\ -1),\ (C,\ 1)\}$.

3. Soit l'ensemble C des points M du plan tels que :

$$\left\| \overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}} \right\| = \left\| \overrightarrow{M\text{A}} - 2\overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}} \right\|.$$

a. Vérifier que B appartient à C.

b. Déterminer puis tracer l'ensemble C.

4. Déterminer puis tracer l'ensemble D des points M du plan tels que :

$$2.\left\| \overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}} \right\| = \left\| \overrightarrow{M\text{A}} - 3\overrightarrow{M\text{B}} \right\|.$$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, on donne les points A d'affixe 2i, B d'affixe 2 et I milieu de [AB] (on prendra 2 cm pour unité graphique).

On considère la fonction f qui, à tout point M distinct de A, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :?

$$z' = \frac{2z}{z-2\text{i}}.$$

1. **a.** Montrer que f admet comme points invariants le point O et un deuxième point dont on précisera l'affixe.

b. Déterminer les images par f des points B et I.

2. Soit M un point quelconque distinct de A et de O.

Établir que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{O}M'}\right) & = & \left(\overrightarrow{M\text{A}}\ ;\ \overrightarrow{M\text{O}}\right) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{O}M' & = & 2\dfrac{\text{MO}}{\text{MA}} \end{array}\right.$$

3. Soit (Δ) la médiatrice de [OA].

Montrer que les transformés par f des points de (Δ) appartiennent à un cercle (C) que l'on précisera.

4. Soit (Γ) le cercle de diamètre [OA], privé du point A. Montrer que les transformés par f des points de (Γ) appartiennent à une droite (D) que l'on précisera.

5. Tracer (Δ), (Γ), (C), (D) sur une même figure.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

Soit la fonction f définie pour tout réel x différent de 1 par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2(1-x)}$$

On appelle Γ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Étudier les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, et lorsque x tend vers 1.
   Interpréter graphiquement ces résultats.

   b. Vérifier que, pour tout x différent de 1, $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{-x} \times \frac{x}{2(x-1)}$$

   En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. **a.** Montrer que $f'(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{2(1-x)^2}$.

   b. Étudier les variations de f.

   c. Montrer que f admet un minimum que l'on précisera sur l'intervalle
   $]-\infty\,;\,1[$.

Partie B

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

où y est une fonction numérique deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre (E).
2. On considère les solutions de (E) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

   a. Montrer que ces solutions s'écrivent sous la forme : $\left(ax + \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   On note alors :

$$h_a(x) = \left(ax + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

   où a est un nombre réel.

   b. Faire l'étude du sens de variation de h_a selon les valeurs de a et montrer que, pour tout réel a différent de 0, h_a admet un extremum pour une valeur de x que l'on déterminera en fonction de a.

   c. On note $\mathscr{C}_a$ la courbe représentative de h_a et S_a le point de $\mathscr{C}_a$ correspondant à l'extremum de h_a ; vérifier que, pour tout réel a différent de 0, S_a est un point de Γ, la courbe définie dans la partie A.

Partie C

Sur la feuille donnée en annexe, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormal les courbes $\mathscr{C}_a$ pour $a = \dfrac{1}{4}$ et pour quatre autres valeurs de a : -2, 0, 1 et 2.

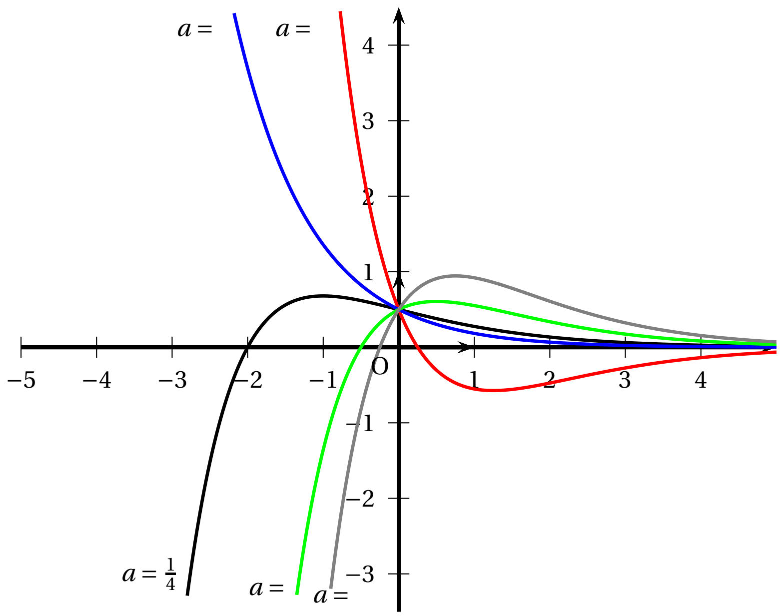
1. Sur cette feuille annexe, construire Γ et ses droites asymptotes.

2. Pour chacune des courbes $\mathscr{C}_a$ tracées (autres que $\mathscr{C}_{\frac{1}{4}}$), déterminer la valeur correspondante de a en indiquant la méthode utilisée.

Partie D

Dans cette partie, on considère la fonction h_a obtenue pour $a = \dfrac{1}{4}$.
Soit λ un nombre réel supérieur à -2 ; on appelle D_λ l'ensemble des points du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_{\frac{1}{4}}$ et la droite d'équation $x = \lambda$.

1. Exprimer $I = \displaystyle\int_{-2}^{\lambda} h_{\frac{1}{4}}(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de λ ; on pourra utiliser une intégration par parties ou se servir de l'équation différentielle (E).
2. Soit $\mathscr{A}(\lambda)$ la mesure en unités d'aire de l'aire D_λ ; quelle est la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$?



∽ Baccalauréat S Centres étrangers II juin 1997 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur une chaîne de production. Il peut arriver toutefois que le système soit mis en défaut. En effet, des études statistiques ont montré que, sur une journée :

— la probabilité que l'alarme se déclenche par erreur, c'est-à-dire sans qu'il y ait eu incident, est égale à $\dfrac{1}{50}$;

— la probabilité qu'un incident survienne sans que l'alarme se déclenche est égale à $\dfrac{1}{500}$;

— la probabilité qu'un incident se produise est égale à $\dfrac{1}{100}$.

On pourra noter :

A l'évènement « l'alarme se déclenche » ;

I l'évènement « un incident se produit » ;

$\overline{A}$ et $\overline{I}$ leurs évènements contraires respectifs.

Ainsi, par exemple, $A \cap \overline{I}$ représente l'évènement « l'alarme se déclenche sans qu'il y ait incident ».

Partie A

1. Calculer la probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche.

   En déduire la probabilité que l'alarme se déclenche.
2. Quelle est la probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut ?
3. L'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?

Partie B

Les assureurs estiment qu'en moyenne, pour l'entreprise, le coût des anomalies est le suivant :

— 5 000 F pour un incident lorsque l'alarme fonctionne ;

— 15 000 F pour un incident lorsque l'alarme ne se déclenche pas ;

— 1 000 F lorsque l'alarme se déclenche par erreur.

On considère qu'il se produit au plus une anomalie par jour.

Soit X la variable représentant le coût journalier des anomalies pour l'entreprise.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Quel est le coût journalier moyen des anomalies ?

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

1. Soit l'intégrale : $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(2x)\,\mathrm{d}x$.

   À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que : $\mathrm{K} = \dfrac{\mathrm{e}^{\pi} - 1}{5}$.
2. Soient $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

   Calculer $\mathrm{I} + \mathrm{J}$ et $\mathrm{I} - \mathrm{J}$.

   En déduire les valeurs de I et J.
3. Linéariser $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$.

   Retrouver directement les valeurs de I et de J à l'aide de ce résultat et de la première question.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement de spécialité

Soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormal du plan. On considère la courbe $(\mathscr{C})$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 3\cos t\\ y & = & 2\sin t\end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit l'intervalle } [0~;~2\pi]$$

1. Reconnaître la nature de la courbe $(\mathscr{C})$ et en donner l'équation cartésienne.
Tracer $(\mathscr{C})$ (unité graphique 2 cm).

2. Exprimer en fonction de t, l'affixe z d'un point $M(t)$ de $(\mathscr{C})$.

3. Soit A le point d'affixe 2. Pour tout point M de $(\mathscr{C})$, on construit le point M' tel que le triangle AMM' soit direct, rectangle en A et tel que : $\text{A}M' = \dfrac{\text{A}M}{2}$.

a. Montrer que M' est l'image de M par une similitude directe que l'on précisera.

b. Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de t.

c. En déduire une représentation paramétrique de l'ensemble des points M' lorsque M décrit $(\mathscr{C})$.

d. Montrer que M' appartient à la courbe $(\mathscr{C}')$ d'équation cartésienne :

$$(x-2)^2 + \frac{4}{9}(y+1)^2 = 1.$$

Montrer que $(\mathscr{C}')$ est une conique dont on précisera le centre.

PROBLÈME **11 points**

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On cherche dans cette partie à résoudre l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 2y' + y = -x + 1$$

c'est-à-dire qu'on cherche à déterminer l'ensemble des fonctions numériques g deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout réel x : $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = -x + 1$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E$'$) : $y'' - 2y' + y = 0$.

2. Déterminer deux nombres réels m et p tels que la fonction u définie par : $u(x) = mx + p$ soit solution de l'équation différentielle (E).

3. Démontrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si la fonction $g - u$ est solution de l'équation différentielle (E$'$).

4. Résoudre l'équation différentielle (E).

5. Déterminer la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution de (E) et telle que : $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0$.

Partie B - Étude d'une solution de l'équation différentielle

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\text{e}^x - x - 1.$$

Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

2. a. Vérifier que, pour tout réel x : $f'(x) = x\text{e}^x + \text{e}^x - 1$.

b. Étudier le signe de $e^x - 1$ et celui de xe^x.

c. En déduire le sens de variation de f.

3. Tracer $(\mathscr{C})$ et (D).

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
On note a celle qui est positive. Montrer que : $0,8 \leqslant a \leqslant 0,81$.

Partie C - Détermination d'une valeur approchée de *a*

1. Soit x_0 un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse x_0 et on note x_1 l'abscisse du point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses.
Établir la relation : $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

On considère la fonction φ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par la relation

$$(1): \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

L'étude faite dans la partie B du problème montre que φ est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On remarquera que c$\varphi(a) = a$.

2. **a.** Vérifier que pour tout $x > 0$: $\quad \varphi'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$.
(on utilisera la relation (1) sans expliciter ni $f(x)$ ni $f'(x)$.

b. Calculer $f''(x)$.

c. Démontrer que f' et f'' sont croissantes sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

d. En déduire que, si x appartient à l'intervalle $[a\ ;\ 0,81]$:

$$0 \leqslant \varphi'(x) \leqslant \frac{f(0,81)f''(0,81)}{[f'(0,8)]^2}.$$

e. Démontrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a\ ;\ 0,81]$:

$$0 \leqslant \varphi(x) - a \leqslant 10^{-2}(x - a).$$

f. En déduire que, si $a \leqslant x \leqslant 0,81$, alors : $a \leqslant \varphi(x) \leqslant 0,81$.

3. On pose : $x_0 = 0,81$, $x_1 = \varphi(x_0)$ et $x_2 = \varphi(x_1)\cdot$

a. Démontrer que x_2 est une valeur approchée par excès à 10^{-6} près de a.

b. Donner, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de x_2.

Baccalauréat S Centres étrangers III juin 1997

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Six personnes jouent au bowling. On appelle « strike » le fait de renverser toutes les quilles d'un seul lancer de boule. Parmi les six personnes, quatre d'entre elles, qui ont l'expérience du jeu, réussissent le « strike » avec une probabilité égale à $\frac{3}{4}$. Les deux autres débutantes, réussissent le « strike » avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$.

Partie A

Un des six joueurs désigné par le hasard se prépare à lancer la boule.
On note E l'évènement : « c'est un des quatre joueurs expérimentés ». $\overline{E}$ est l'évènement contraire. On note enfin S l'évènement : « le joueur fait « strike » ».

1. Déterminer la probabilité de l'évènement $E \cap S$: « le joueur est expérimenté et réussit son « strike » ».
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $\overline{E} \cap S$: « le joueur est débutant et réussit son « strike » ».
3. En déduire la probabilité de l'évènement S.
4. Un « strike » vient d'être réussi. Quelle est la probabilité pour que le joueur qui l'a réussi soit un débutant?

Partie B

Parmi les six joueurs, on choisit un joueur A expérimenté, et un joueur B débutant.
Ils jouent chacun quatre parties; une partie consistant à lancer une seule boule : si c'est « strike », la partie est gagnée, sinon, elle est perdue. La probabilité de gagner une partie est donc égale à $\frac{3}{4}$ pour le joueur A et à $\frac{1}{4}$ pour le joueur B.

1. On note X le nombre de parties gagnées par le joueur A; donner la loi de probabilité de X (on donnera les résultats sous forme de fractions de dénominateur 256).
2. On note Y le nombre de parties gagnées par le joueur B; on suppose que la loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

$Y = y_i$	0	1	2	3	4
Probabilité de $Y = y_i$	$\frac{81}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$

Si x_i et y_i sont des éléments de l'ensemble $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, on suppose que les évènements « $X = x_i$ » et « $Y = y_i$ » sont indépendants.
Calculer la probabilité de l'évènement « $X < Y$ » c'est-à-dire que le joueur B gagne davantage de parties que le joueur A.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Soit $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ un repère orthonormal de l'espace, supposé direct.

1. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C.
   a. Donner les coordonnées du point G.

b. Montrer que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC).

2. On considère les points : $A'(2~;~0~;~0)$, $B'(0~;~2~;~0)$, $C'(0~;~0~;~3)$. Ces trois points définissent un plan noté $(A'B'C')$.

a. Déterminer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$ et en déduire qu'une équation cartésienne du plan $(A'B'C')$ est $3x+3y+2z=6$.

b. Montrer que le point $M(x~;~y~;~z)$ appartient à la droite (AC) si, et seulement s'il existe un nombre réel k tel que : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-k \\ y & = & 0 \\ z & = & k \end{array}\right.$.

c. Calculer alors les coordonnées du point K commun à la droite (AC) et au plan $(A'B'C')$.

3. **a.** Vérifier que le point L commun à la droite (BC) et au plan $(A'B'C')$ a pour coordonnées $(0~;~4~;~-3)$.

b. Montrer que les droites (AB), $(A'B')$ et (KL) sont parallèles.

c. Caractériser l'intersection des deux plans (ABC) et $(A'B'C')$, à l'aide de points définis précédemment.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Soit $\left(O,~\overrightarrow{OA},~\overrightarrow{OB},~\overrightarrow{OC}\right)$ un repère orthonormal de l'espace, supposé direct.
Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x~;~y~;~z)$, on note H son projeté orthogonal sur le plan (ABC) et K son projeté orthogonal sur la droite (AB).

1. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C.

a. Donner les coordonnées du point G.

b. Montrer que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC).

c. Donner une équation cartésienne de ce plan (ABC).

2. **a.** Montrer que : $\left|\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{OG}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{MH}$.

b. Calculer, en fonction de x, y, z, la distance de M au plan (ABC).

3. **a.** En interprétant la norme $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|$ du produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ comme une aire, exprimer la distance MK en fonction de cette norme.

b. En déduire que : $\text{MK} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2z^2+(1-x-y)^2}$.

4. On se place dans le plan (OAB) d'équation $z=0$ et on considère l'ensemble (Γ) des points du plan (OAB) qui sont équidistants du point O et du plan (ABC).

a. Montrer que (Γ) ne contient aucun point de la droite (AB).

b. Soit $M(x~;~y~;~0)$ un point du plan (OAB), n'appartenant pas à la droite (AB).

En utilisant les résultats des questions 2. et 3. calculer la valeur du rapport $\dfrac{\text{MH}}{\text{MK}}$.

c. En déduire la nature de l'ensemble (Γ) ; en donner un foyer, la directrice associée et l'excentricité.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

On considère, dans cette partie, la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)\left(1+\text{e}^{-x}\right).$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O,~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 4 cm.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout x réel.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f'.
   c. En déduire le signe de $f'(x)$, x appartenant à $\mathbb{R}$.
2. **a.** Déterminer le sens de variation de f.
   b. Préciser les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. **a.** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.
   b. Étudier le position relative de la courbe (C) et de la droite (Δ).
4. **a.** Déterminer l'abscisse du point de (C) où la tangente est parallèle à (Δ).
   b. Écrire une équation de cette tangente (T).
5. Tracer dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, les trois courbes (C), (Δ) et (T). On se limitera aux points dont l'abscisse est comprise entre 0 et 4.
6. Pour tout x réel supérieur ou égal à 1, on considère E l'ensemble des points M du plan, de coordonnées $(t\ ;\ y)$ vérifiant

$$1 \leqslant t \leqslant x, \quad t - 1 \leqslant y \leqslant f(t).$$

   Exprimer, à l'aide d'une intégrale, l'aire de l'ensemble E (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale), en unités d'aire.

Partie B

Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on note $A(x)$ l'intégrale

$$\int_1^x (t-1)\text{e}^{-t}\,\text{d}t.$$

1. Préciser le sens de variation sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ de la fonction A qui, à x associe $A(x)$.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que $A(x) = \dfrac{1}{\text{e}} - x\text{e}^{-x}$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} A(x)$.
4. **a.** Montrer que l'équation d'inconnue x réelle $A(x) = \dfrac{1}{2\text{e}}$ admet une seule solution α dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   b. Vérifier que : $2,6 < \alpha < 2,7$.
5. Soit h la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \ln(2x)$.
   a. Justifier que h est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   b. Montrer que l'équation $A(x) = \dfrac{1}{2\text{e}}$ équivaut à l'équation $h(x) = x$.
6. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 2$, $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$ et $v_{n+1} = h(v_n)$.
   (On admettra que pour tout entier naturel n, u_n et v_n appartiennent à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   a. Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant \alpha \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

   (On pourra utiliser la croissance de la fonction h).
   b. En déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près, par défaut.

Baccalauréat S La Réunion juillet 1997

Exercice 1 **5 points**

Une urne contient 8 jetons : trois jetons noirs et carrés, trois jetons noirs et ronds, un jeton vert et carré, un jeton vert et rond.
L'épreuve consiste à extraire, au hasard, deux jetons de l'urne selon une procédure qui est déterminée par le lancer d'une pièce truquée :

- si l'on obtient « PILE », on extrait les deux jetons simultanément,
- si l'on obtient « FACE », on extrait les deux jetons successivement avec remise.

Lors du lancer de la pièce, la probabilité d'apparition de « PILE » est $\dfrac{7}{15}$.
On note :
P l'évènement « on obtient PILE » ;
F l'évènement « on obtient FACE » ;
A l'évènement « les deux jetons tirés ont la même forme OU la même couleur » ;
E_1 l'évènement « obtenir deux jetons de la même couleur » ;
E_2 l'évènement « obtenir deux jetons de la même forme » ;
E_3 l'évènement « obtenir deux jetons de la même forme ET de la même couleur ».
Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

1. On lance la pièce.

  a. On suppose que l'on a obtenu « PILE ».
  Déterminer la probabilité conditionnelle des évènements E_1, E_2 et E_3.
  En déduire que la probabilité de l'évènement A, sachant que P est réalisé, est $\dfrac{11}{14}$.

  b. On suppose que l'on a obtenu « FACE ».
  Déterminer la probabilité conditionnelle des évènements E_1, E_2 et E_3.
  En déduire que la probabilité de l'évènement A, sachant que F est réalisé, est $\dfrac{13}{16}$.

2. Quelle est la probabilité de l'évènement A ?

3. Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on répète n fois l'épreuve, de manière indépendante.
Déterminer la probabilité p_n pour que l'évènement A se réalise à chaque épreuve.
Pour quelles valeurs de n, a-t-on $p_n > \dfrac{1}{2}$?

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
À tout point M du plan d'affixe z, différente de zéro, on associe les points M' et M'' d'affixes respectives z' et z'' définies par $z' = \text{i}z$ et $z'' = z^2$.

1. Cas particulier

Soit A le point d'affixe $a = 2 - \text{i}$ et B le point d'affixe $b = 2 + \text{i}$.
On appelle A$'$ et A$''$ les points associés à A,
On appelle B$'$ et B$''$ les points associés à B.

  a. Déterminer, sous forme algébrique, les affixes a' et a^2 des points A$'$ et A$''$. Prouver que A est le milieu du segment [A$'$A$''$].

  b. Déterminer, sous forme algébrique, les affixes b' et b'' des points B$'$ et B$''$.

  c. Calculer, sous forme algébrique, $\dfrac{b - b''}{b - b'}$.

   d. En déduire la nature du triangle B B′B″. Représenter sur une figure les points A, A′, A″, B, B′ et B″.

2. Cas général

M est un point quelconque d'affixe z différente de zéro. N est le point d'affixe $\overline{z}$. N' et N'' sont les points associés au point N.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

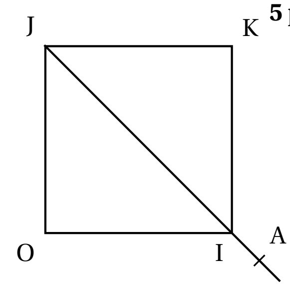
   a. Prouver que, si $z \neq 1$, l'angle $\left(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}\right)$ a pour mesure un argument de $\dfrac{z-1}{\mathrm{i}-1}$.

   b. Déterminer une relation entre x et y pour que $\dfrac{z-1}{\mathrm{i}-1}$ soit réel.

   c. Montrer que les points M, M' et M'' sont alignés si et seulement si $y = -x + 1$. (1)

   d. On suppose que l'affixe de M est différente de 1 et que la relation (1) est vérifiée. Prouver que $NN'N''$ est un triangle rectangle en N.

Exercice 2 (spécialité) **5 points**



Dans le plan orienté, OIKJ désigne le carré de côté 1 tel que $+\dfrac{\pi}{2}$ soit une mesure de $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$.

A est un point quelconque de la droite (IJ) différent de I.

s désigne la similitude directe de centre O qui transforme le point I en le point A.

Les images de J, K et A par s sont respectivement notées J′, K′ et A′.

1. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère OAK′J′ ?

   b. Prouver que les points J′, A et A′ sont alignés.

   c. Comparer les angles $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)$.

   d. Reproduire le dessin ci-dessus en prenant OI = 5 cm et construire les points J′, K′ et A′. (la construction sera expliquée)

   e. Prouver que A′O = A′K′.

2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$, on note dorénavant a l'affixe du point A et α un argument de a.

   a. Prouver que $a - 1$ admet pour argument $-\dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{3\pi}{4}$.

   b. En utilisant la symétrie d'axe (IJ), prouver que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{KA}}, \overrightarrow{\mathrm{KI}}\right)$.

   En déduire qu'un argument de $a - (1 + \mathrm{i})$ admet pour mesure $-\alpha - \dfrac{\pi}{2}$.

3. **a.** Prouver que si z' désigne l'affixe du point M' image du point M d'affixe z par s, $z' = az$.

   b. Déterminer k' et a' les affixes respectives des points K′ et A′ en fonction de a.

   c. On note z_1 et z_2 les affixes respectives de $\overrightarrow{\mathrm{KK'}}$ et de $\overrightarrow{\mathrm{K'A'}}$.

   En utilisant la question 2., prouver que z_1 est un réel et que z_2 est un imaginaire pur.

4. Prouver que K′ est le projeté orthogonal de A′ sur la droite (JK).

PROBLÈME

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 4 cm.

Dans tout le problème I désigne l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie A

On appelle f_0 et f_1 les fonctions définies sur I par $f_0(x) = \text{e}^x$ et $f_1(x) = x\text{e}^x$.
$\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ sont les courbes représentatives de f_0 et de f_1 dans le repère $\mathcal{R}$.

1. **Étude de la fonction f .**
   a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Étudier le signe de f_1', sur I et dresser le tableau de variation de f_1.
2. Vérifier que pour tout $x \in I$, $f_1'(x) = f_0(x) - f_1(x)$ (1)
3. Soit $x \in I$. On appelle M_0 et M_1 les points de $\mathcal{C}_0$ et de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse x. Déterminer selon les valeurs de x les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
4. Les graphiques
   a. Comment peut-on construire $\mathcal{C}_0$ à partir de la courbe d'équation $y = \text{e}^x$?
   Dessiner $\mathcal{C}_0$.
   b. Placer les points de $\mathcal{C}_1$ d'abscisses 0, 1, 2 en précisant les tangentes à $\mathcal{C}_1$ en ces points.

   c. Dessiner $\mathcal{C}_1$.

Partie B

On se propose de fabriquer, à la suite de f_0 et de f_1 des fonctions $f_2, f_3, \ldots, f_n$, dérivables sur I et satisfaisant aux conditions :

$$(2)\left\{\begin{array}{l}\text{pour tout } x \text{ élément de } I, \text{ pour tout } n \text{ entier naturel non nul,}\\ f_n'(x) \quad = \quad f_{n-1}(x) - f_n(x)\\ f_n(0) \quad = \quad 0\end{array}\right.$$

1. On pose pour tout x de I, $g_n(x) = f_n(x)\text{e}^x$, c'est-à-dire $f_n(x) = g_n(x)\text{e}^{-x}$.
   a. Calculer $f_n'(x)$ en fonction de $g_n(x)$ et de $g_n'(x)$ pour tout x de I.
   b. Montrer que f_n satisfait aux conditions (2) si et seulement si

$$(3)\left\{\begin{array}{l}\text{pour tout } x \text{ élément de } I, \text{ pour tout } n \text{ entier naturel non nul,}\\ g_n'(x) \quad = \quad \text{e}^x f_{n-1}(x)\\ g_n(0) \quad = \quad 0\end{array}\right.$$

2. Calcul de f_2. (On rappelle que $f_1(x) = x\text{e}^{-x}$.

   a. Calculer $g_2'(x)$ puis $g_2(x)$ pour $x \in I$.

   b. En déduire $f_2(x)$.
   c. Montrer par récurrence que pour tout x élément de I, pour tout n entier naturel non nul,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\text{e}^{-x}.$$

Partie C

Soit a un élément non nul fixé dans I. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a f_n(x)\,\mathrm{d}x$ où f_n est la fonction définie dans la deuxième partie.

1. Calculer $I_0(a)$.

2. En utilisant les conditions (2), montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!}\mathrm{e}^{-a}.$$

3. En déduire que pour tout $n > 0$, $I_n(a) = 1 - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right)\mathrm{e}^{-a}$.

4. Dans cette question, on pose $a = 1$. On appelle (u_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\mathrm{e}^{-1} = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $\mathscr{R}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$ et donner une interprétation géométrique de u_n.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, et pour tout $x \in [0~;~1]$, $f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n!}x^n$.

c. En déduire l'encadrement : pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$, puis la limite de u_n.

d. Déduire enfin que : $\mathrm{e} = \displaystyle\lim_{n \to +\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$.

Baccalauréat S Métropole groupe 1 bis [1] juin 1997

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Trois dés cubiques sont placés dans une urne.
Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6.
Le troisième est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1.
On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance.
On note A l'évènement : « les deux dés tirés sont normaux ».
On note B l'évènement : « les deux faces supérieures sont numérotées 6 ».

1. **a.** Définir l'évènement contraire de A que l'on notera $\overline{A}$.
   b. Calculer les probabilités de A et de $\overline{A}$?
2. **a.** Calculer $p(B/A)$, probabilité de B sachant que A est réalisé, puis $p(B \cap A)$.
   b. Calculer $p(B)$.
3. Calculer $p(A/B)$, probabilité de A sachant que B est réalisé.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ ayant comme unité graphique 4 cm. On note A, B et C les points d'affixes respectives 2i, -1 et i.

On considère l'application f de P$-\{\text{A}\}$ dans P qui, à tout point M de P$-\{\text{A}\}$ d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z+1}{z-2\text{i}}.$$

1. **a.** Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.
   b. Déterminer l'affixe du point C$'$ image de C. Quelle est la nature de quadrilatère ACBC$'$?
   c. Montrer que le point C admet un unique antécédent par f que l'on notera C$'$.
   Quelle est la nature du triangle BCC$'$?
2. Donner une interprétation géométrique de l'argument et du module de z'.
3. Déterminer, en utilisant la question précédente, quels sont les ensembles suivants :
   a. l'ensemble E_1 des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre réel strictement négatif.
   b. l'ensemble E_2 des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre imaginaire pur non nul
   c. l'ensemble E_3 des points M dont les images appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 3 cm. Tout point M du plan est repéré par son affixe z.

1. Amiens, Lille, Paris Créteil, Versailles, Rouen, Aix-Marseille, Montpellier, Nice-Corse, Toulouse

1. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M du plan tels que $|z| = 3$.
2. On considère la transformation T qui à tout point M du plan distinct de O associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

   a. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction du module et de l'argument de z.

   b. Déterminer et représenter l'ensemble E', dont les éléments sont les points M' images des points M de E. Préciser ses éléments caractéristiques.

3. Soit N le point d'affixe $-\frac{1}{z}$.
   Montrer que M' est le milieu de $[MN]$.
4. Soit A le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   Montrer que, lorsque le point M décrit la demi-droite [OA) privée du point O, le point N décrit une demi-droite D.
   Tracer D.
5. Montrer que l'image de la demi-droite [OA) privée du point O par la transformation T est une partie d'une hyperbole H. Représenter H après avoir donné ses éléments caractéristiques.

PROBLÈME **11 points**

PARTIE A

Soit la fonction φ définie dans $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^x + x + 1.$$

1. Étudier le sens de variation de φ et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule α et que l'on a :

$$-1,28 < \alpha < -1,27$$

3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan (unité graphique : 4 cm).

1. Montrer que : $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \varphi x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$. En déduire le sens de variation de f.
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Soit T la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
   Donner une équation de T et étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à T.
4. Chercher les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ et étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à D.

5. Faire le tableau de variations de f.
6. Tracer sur un même dessin $(\mathscr{C})$, T et D. La figure demandée fera apparaître les points de $(\mathscr{C})$ dont les abscisses appartiennent à $[-2\,;\,4]$.

PARTIE C

On considère la fonction g, définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{x}\right).$$

On note $(\mathscr{L})$ la courbe représentative de g dans le repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, I le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \vec{\imath}$, A le point d'abscisse 0 de $(\mathscr{L})$ et B son point d'abscisse 1.

1. Étudier brièvement les variations de g.
2. Donner une équation de la tangente en A à $(\mathscr{L})$.
3. On note P l'intersection de cette tangente avec le segment [IB].
   Calculer les aires des trapèzes OIPA et OIBA.
4. On admet que la courbe $(\mathscr{L})$ est située entre les segments [AP] et [AB]. Montrer alors que :

$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leqslant \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln\sqrt{2(1+\mathrm{e})}.$$

5. Au moyen d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(1+\mathrm{e}) - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

∽ Baccalauréat S groupe 2 bis [2] juin 1997 ∽

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

1. On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise.
   - **a.** Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.
   - **b.** Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au cours de ces quatre tirages.
2. On effectue maintenant quatre tirages successifs d'une boule avec remise. Répondre aux mêmes questions qu'à la question 1.
3. n étant un nombre entier strictement positif, on effectue n tirages successifs avec remise. On appelle P_n la probabilité d'obtenir au cours de ces n tirages une boule blanche uniquement au dernier tirage.
   - **a.** Calculer P_1, P_2, P_3 et P_n.
   - **b.** Soit $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n$.
     Exprimer S_n en fonction de n et déterminer la limite de S_n.

EXERCICE 2 (OBLIGATOIRE) **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, (unité graphique 3 cm).
On désigne par A le point d'affixe i.
À tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{z^2}{\mathrm{i} - z}$$

1. Déterminer les points M confondus avec leur image M'.
2. Étant donné un complexe z distinct de i, on pose : $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, avec x, y, x', y' réels.
   Montrer que :
   $$x' = \frac{-x\left(x^2 + y^2 - 2y\right)}{x^2 + (1-y)^2}$$
   En déduire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M dont l'image M' est située sur l'axe des imaginaires purs. Dessiner l'ensemble $\mathscr{E}$.
3. Trouver une relation simple liant les longueurs OM, AM et OM'. En déduire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O. Dessiner l'ensemble $\mathscr{F}$.
4. Dans toute cette question, on considère un point M d'affixe z, situé sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$. M' est le point d'affixe z' correspondant, et G l'isobarycentre des points A, M et M'.
   Calculer l'affixe z_G de G en fonction de z.
   Montrer que G est situé sur un cercle un centre O dont on précisera le rayon. Après avoir comparé les angles $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OG}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right)$, effectuer la construction de G. En déduire celle de M'.

2. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes, Nantes, Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

EXERCICE 2 (SPÉCIALITÉ) **5 points**

Le plan complexe P est muni du repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On fera une figure, à compléter au fur et à mesure des questions. On prendra 1 cm pour unité de longueur.
On considère le point J de coordonnées $\left(2\sqrt{3}\ ;\ 6\right)$ et le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre [OJ]. On note I son centre.
Les points A, de coordonnées $\left(2\sqrt{3}\ ;\ 0\right)$, et B, de coordonnées $(0\,;6)$, sont les projetés orthogonaux de J, respectivement sur les axes $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u}\right)$ et $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{v}\right)$. On remarquera que le cercle $(\mathscr{C})$ est circonscrit au rectangle OAJB.

1. Soit S la similitude directe de centre O transformant B en A.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de cette similitude.
   b. Déterminer les images I$'$, J$'$, A$'$ des points I, J et A par la similitude S.
   c. Soit M un point quelconque du cercle $(\mathscr{C})$, et M' son image par la similitude S.
   Quel est l'ensemble $(\mathscr{C}')$ décrit par M' lorsque M décrit $(\mathscr{C})$?
   Représenter $(\mathscr{C}')$ puis démontrer que, quel que soit le point M du cercle $(\mathscr{C})$, les points M, A et M? sont alignés.
2. Soit Ω le point de coordonnées $\left(4+2\sqrt{3}\ ;\ 2\right)$.
   On considère la rotation R de centre Ω et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.
   a. Montrer que J est l'image de J$'$ par R.
   b. Pour tout point M du plan P, on note M' son image par S et M'' l'image de M' par R. Déterminer l'image de J par la transformation $R\circ S$ (composée de R et de S), puis une mesure de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{\mathrm{J}M},\ \overrightarrow{\mathrm{J}M''}\right)$, où M est distinct de J .
   c. Montrer que JM = JM''. En déduire une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{J}M}$ et $\overrightarrow{\mathrm{J}M''}$, et conclure quant à la nature de la transformation $R\circ S$.

PROBLÈME **11 points**

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 2 cm.

Partie I : Étude d'une fonction *g*

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln x - x + 1$$

et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Etudier les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. Etudier les variations de g. En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.
3. On note $\mathscr{C}'$ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \ln x$ dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e et que, pour tout x élément de $[1\,;\mathrm{e}]$, on a :
$$x\ln x - x + 1 \leqslant \ln x$$
   On ne demande pas de représenter $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
4. a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :
$$J = \int_1^e (x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$$

b. Soit Δ le domaine plan défini par :

$$\Delta = \left\{M\left(x\,;\,y\right); 1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e} \quad \text{et} \quad g(x) \leqslant y \leqslant \ln x\right\}$$

Déterminer, en cm^2, l'aire de Δ. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire.

Partie II : Étude d'une fonction f.

Soit f la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x$$

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en 1. Pour l'étude de la limite en 1, on pourra utiliser un taux d'accroissement.
2. Déterminer le tableau de variation de f. On pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$.
3. Tracer la courbe représentative de f dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie III : Étude de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution notée α et que

$$3,5 < \alpha < 3,6$$

2. Soit h la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

a. Montrer que α est solution de l'équation $h(x) = x$.

b. Étudier le sens de variation de h.

c. On pose $I = [3,4]$. Montrer que pour tout x élément de I on a $h(x) \in I$ et

$$\left|h'(x)\right| \leqslant \frac{5}{6}$$

3. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 3 \text{et pour tout } n \geqslant 0\ u_{n+1} = h(u_n)$$

Justifier successivement les trois propriétés suivantes :

a. Pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{5}{6}|u_n - \alpha|$$

b. Pour tout entier naturel n,

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

c. La suite (u_n) converge vers α.

4. Donner un entier naturel p, tel que des majorations précédentes on puisse déduire que u_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Indiquer une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

Baccalauréat S Polynésie juin 1997

EXERCICE 1 **4 points**

Les questions 1, 2 *et* 3 *sont indépendantes.*
Tous les résultats de calcul de probabilité seront donnés sous forme d'une fraction irréductible.

Une classe de terminale S d'un lycée compte 30 élèves dont 10 filles.

1. À chaque séance du cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard trois élèves.
   Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : « Exactement deux des trois élèves interrogés sont des garçons »
   B : « Les trois élèves interrogés sont de même sexe »
   C : « Il y a au plus une fille parmi les trois élèves interrogés. »
2. Parmi les 19 internes de la classe, on compte 4 filles.
   On choisit au hasard dans cette classe deux délégués de sexes différents.
   Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   D : « Les deux délégués sont internes »
   E : « Un seul de deux délégués est interne ».
3. À la fin de chaque séance le professeur désigne au hasard un élève qui effacera le tableau. Un même élève peut être désigné plusieurs fois.
   a. Déterminer la probabilité p_n pour que le tableau soit effacé au moins une fois par une fille à l'issue de n séances.
   b. Déterminer le nombre minimal de séances pour que $p_n > 0{,}9999$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points M_n d'affixes

$$z_n = \left(\frac{1}{2}\text{i}\right)^n \left(1 + \text{i}\sqrt{3}\right)$$

où n est un entier naturel.

1. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n puis z_n en fonction de z_0 et n.
   Donner z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
2. Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité graphique : 4 cm).
3. Déterminer la distance $\text{O}M_n$ en fonction de n.
4. **a.** Montrer que l'on a $M_nM_{n+1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout n entier naturel.
   b. On pose $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} M_kM_{k+1}$ (c'est-à-dire $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$).
   Déterminer L_n en fonction de n puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.
5. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{O}M_0},\ \overrightarrow{\text{O}M_n}\right)$ en fonction de n.
   Pour quelles valeurs de n les points O, M_0 et M_n ; sont-ils alignés ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On considère dans un plan (P) un triangle équilatéral ABC de côté a (a est un réel strictement positif).

1. Construire le barycentre D du système $\{(\mathrm{A}\,;\,2), (\mathrm{B}\,;\,-2), (\mathrm{C}\,;\,-1)\}$.
2. **a.** Déterminer $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ en fonction de a.

   b. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et que le triangle BCD est rectangle en B.
3. Calculer les distances CD, BD et AD en fonction de a.
4. Pour tout point M du plan, on pose $f(M) = 2M\mathrm{A}^2 - 2M\mathrm{B}^2 - M\mathrm{C}^2$ et on désigne par (F) l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = 0$.

   a. Vérifier que C appartient à (F).

   b. Exprimer $f(M)$ en fonction de la distance $M\mathrm{D}$ et de a.

   c. Déterminer et construire (F).
5. Pour tout point M du plan, on pose $g(M) = 2\overrightarrow{M\mathrm{C}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}} + a^2$.

   a. Déterminer l'ensemble (G) des points M du plan tels que $g(M) = a^2$.

   b. Soit I le point d'intersection autre que C des ensembles (F) et (G).
   Montrer que le triangle CDI est équilatéral.

PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + \left(x^2 + 2\right)\mathrm{e}^{-x}$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - \left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^{-x}$$

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.
3. En déduire le tableau de variation de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis justifier que

$$0{,}35 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}36.$$

5. En déduire le signe de g.

Partie II : Étude de f

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel.
3. En déduire, à l'aide de la partie I, les variations de f et donner son tableau de variation.
4. **a.** Démontrer que :

$$f(\alpha) = \alpha\left(1 + 2\mathrm{e}^{-\alpha}\right)$$

   b. À l'aide de l'encadrement de α déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4×10^{-2}.
5. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$. Préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à Δ.

6. Donner une équation de la tangente T à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
7. Tracer Δ, T puis $(\mathscr{C})$.
8. **a.** Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\text{e}^{-x}$$

soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto \left(x^2 + 2\right)\text{e}^{-x}$.

b. Calculer en fonction de α l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$, Δ et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = 0$.

c. Justifier que :

$$\mathscr{A} = 4\text{e}^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$$

Partie III : Étude d'une suite

1. Démontrer que pour tout x de $[1\,;\,2]$:

$$1 \leqslant f(x) \leqslant 2$$

2. Démontrer que pour tout x de $[1\,;\,2]$:

$$0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{3}{4}$$

3. En utilisant le sens de variation de la fonction h définie sur $[1\,;\,2]$ par :

$$h(x) = f(x) - x$$

démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique β dans $[1\,;\,2]$.

4. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant 2$$

b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$\left|u_{n+1} - \beta\right| \leqslant \frac{3}{4}\left|u_n - \beta\right|$$

c. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$\left|u_n - \beta\right| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

e. Trouver un entier n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on ait :

$$\left|u_n - \beta\right| \leqslant 10^{-2}$$

Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 1997

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3 contenant chacune 2 boules indiscernables.
Dans U_1 une boule est marquée G, l'autre est marquée A; dans U_2 une boule est marquée 3, l'autre est marquée 5; dans U_3 une boule est marquée $\frac{1}{2}$, l'autre est marquée 2.
Une épreuve E consiste à tirer au hasard une boule dans chaque urne. On définit une suite u de la façon suivante :
si la boule tirée dans U_1 est marqué A, la suite est arithmétique, si elle est marquée G, la suite est géométrique; la boule tirée dans U_2 désigne le premier terme u_0 et la boule tirée dans U_3 désigne la raison.

1. Calculer la probabilité d'avoir :
   a. une suite u arithmétique;
   b. une suite u convergente;
   c. une suite u telle que u_4 soit un nombre entier pair.
2. Calculer la probabilité d'avoir une suite u qui ne soit pas convergente sachant qu'elle est géométrique.
3. Un joueur tire une boule dans chaque urne et définit ainsi une suite numérique u :
   — si u est géométrique, il gagne 5 F;
   — si u est arithmétique et $u_4 \leqslant 7$, il perd 4 F;
   — si u est arithmétique et $u_4 > 7$, il perd 6 F.
   Soit X la variable aléatoire égale au gain (algébrique) du joueur :
   — donner la « loi de probabilité » de X;
   — calculer l'espérance de X.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans le plan orienté, on considère le carré ABCD de centre O tel que AB = 6 cm et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}$. On définit les points P, Q, R, S de la façon suivante :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}.$$

Le but de l'exercice est de préciser la nature du quadrilatère PQRS *en utilisant deux méthodes différentes.*
Placer les points P, Q, R et S sur une figure.

1. Première méthode : utilisant les nombres complexes

   On considère le repère orthonormal $\left(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, les vecteurs unitaires étant respectivement colinéaires et de même sens que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, l'unité étant le cm.

   a. Déterminer les affixes a, b, c, d respectives des points A, B, C, D.
   Calculer les affixes p, q, r, s respectives des points P, Q, R, S.
   b. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{SR}$, puis le quotient $\frac{s-p}{q-p}$.
   c. Interpréter géométriquement ces résultats et en déduire la nature du quadrilatère PQRS?
2. **Deuxième méthode : géométrique**

   On note f la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer les images par f de A et B. Montrer que l'image de P par f est le point Q.

b. Déterminer les images de Q, R et S par f.

c. En utilisant ce qui précède, préciser et justifier la nature du quadrilatère PQRS.

PROBLÈME — 11 POINTS

Partie A : étude d'une fonction numérique

On considère la fonction numérique définie par :

$$f: \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, l'unité graphique est 1 cm.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$, [on pourra écrire $f(x)$ sous la forme : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(x\mathrm{e}^{x} + 1\right)$].
2. Étudier les variations de f.
3. Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}$. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.
4. Tracer D et $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie B : Étude d'une transformation du plan

Soit l'application r du plan (P) dans lui-même qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z.$$

1. Calculer le module et l'argument de $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$ et reconnaître r.
2. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ où x, y, x' et y' sont quatre réels. Calculer z en fonction de z'. En déduire x et y en fonction de x' et y'.
3. On suppose que le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ appartient à $\mathscr{C}$, montrer que les coordonnées x' et y' de M' image de M par r vérifient la relation :

$$y' = -x' + \sqrt{2}\ln\left(x\sqrt{2}\right).$$

Partie C : Étude d'une fonction numérique

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = -x + \sqrt{2}\ln\left(x\sqrt{2}\right).$$

Soit $\mathscr{C}'$ sa représentation graphique dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de g.
3. En utilisant éventuellement les résultats obtenus dans la partie B, tracer la courbe $\mathscr{C}'$ dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}$.

Partie D : Calcul d'aire

1. Calculer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \ln\left(x\sqrt{2}\right)\,\mathrm{d}x$ en utilisant une intégration par parties.

2. Soit D l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient :

$$1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \quad \text{et} \quad g(x) \leqslant y \leqslant f(x).$$

Calculer en cm^2 l'aire du domaine D ; on en donnera une valeur approcheée à 10^{-2}.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole septembre 1998

Exercice 1 **4 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Il n'est pas demandé de faire de figure.
Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2.
On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad I\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. **a.** Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, B et C.

2. Soit (Q) le plan d'équation :

   $$x + y - 3z + 2 = 0$$

   et (Q′) le plan de repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

   a. Pourquoi (Q) et (Q′) sont-ils sécants ?

   b. Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection (Δ) des plans (Q) et (Q′).

3. Écrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

4. On considère les points J et K de coordonnées respectives :

   $$J\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad K\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Déterminer avec soin l'intersection de la sphère (S) et de la droite (JK).

Exercice 2 **5 points**

1. On considère le polynôme P défini par :

   $$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16.$$

   a. Calculer $P(4)$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ tel que :
   $\left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{v}\right\| = 2$ cm.
   Soient A,B, C les points d'affixes respectives :

   $$a = 4 \qquad b = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad c = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$$

   a. Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$

On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

a. Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?

b. Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.

a. Montrer que le quadrilatère COFH est un carré.

b. Calculer l'affixe du point H.

c. Le triangle AGH est-il équilatéral ?

Problème **11 points**

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - 4y' + 4y = 0.$$

2. Déterminer la solution φ de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie les conditions :

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = -\mathrm{e}$$

Partie B

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x\mathrm{e}^{2x+1}.$$

a. Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$?

b. Étudier le sens de variation de de f.

c. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

d. Dresser le tableau de variations de f.

e. On appelle $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 4 cm).

Quelle est la tangente à $(\mathscr{C})$ au point O ?

Écrire une équation de la tangente T à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse (-1).

f. On appelle (Γ) la représentation graphique dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{x}.$$

Quelle est la tangente à (Γ) au point d'abscisse (-1) ?

2. On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 1 + \mathrm{e}x\mathrm{e}^{x}.$$

a. Étudier le sens de variation de h.

En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

b. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Γ).

c. Tracer, sur le même graphique, les courbes T, $(\mathscr{C})$ et (Γ).

3. Soit m un réel quelconque et M le point de la courbe (Γ) d'abscisse m.

a. Écrire une équation de la tangente D à (Γ) en M.

b. La tangente D coupe les axes de coordonnées en A et B.
Calculer, en fonction de m, les coordonnées du milieu J du segment $[AB]$.

c. Prouver que J appartient à $(\mathscr{C})$.

d. Tracer (D) et J pour $m = 0$.

Partie C

1. Soit x un réel quelconque. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x t\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit x un réel négatif.
Calculer l'aire $\mathscr{A}(x)$, exprimée en cm^2, de l'ensemble des points N du plan dont les coordonnées $(u,\ v)$ vérifient :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & \leqslant & u & \leqslant & 0 \\ 0 & \leqslant & v & \leqslant & f(x) \end{array}\right.$$

3. Calculer $\mathscr{A}(-1)$.

4. $\mathscr{A}(x)$ admet-elle une limite quand x tend vers moins l'infini ? Si oui laquelle ?

∽ Baccalauréat S Polynésie septembre 1997 ∾

EXERCICE 1 **5 POINTS**

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(\text{E} \qquad y'' - 5y' + 4y = 0.$$

2. Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = -2x + 1$.
3. On pose $u(x) = 2\text{e}^{x} - \text{e}^{4x}$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $u(x) \geqslant 0$.
4. On considère la partie de la courbe d'équation $y = u(x)$ pour $-1 \leqslant x \leqslant 0$.
   En la faisant tourner autour de l'axe des abscisses, on délimite un solide dont le volume est mesuré en unités de volume par l'intégrale

$$V = \pi \int_{-1}^{0} [u(x)]^2 \,\text{d}x.$$

   Calculer la valeur exacte de V.

EXERCICE 2 **5 POINTS**
Enseignement de spécialité

Partie A

Soient, dans l'espace E, 4 points A, B, C et D distincts deux à deux.

1. Montrer que ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, D est le barycentre du système $\{(\text{A}\,;\,1),\ (\text{B}\,;\,-1),\ (\text{C}\,;\,1)\}$.
2. On suppose que ABCD est un parallélogramme. Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace E tels que $\left\|\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{E}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \text{BD}$.
3. On suppose maintenant que ABCD est un rectangle. Déterminer l'ensemble (Σ) des points M de l'espace E tels que $M\text{A}^2 - M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = \text{BD}^2$.

Partie B

On considère dans l'espace E deux parallélogrammes ABCD et A′B′C′D′ ainsi que les milieux I, J, K et L de [AA′], [BB′], [CC′] et [DD′] respectivement.

1. Montrer que L est barycentre des points I, J, et K affectés de coefficients que l'on précisera.
   En déduire que IJKL est un parallélogramme.
2. Soient O, Q et P les centres respectifs des parallélogrammes IJKL, ABCD, et A′B′C′D′.
   Montrer que O est le milieu de [PQ].

EXERCICE 2 **6 POINTS**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (Unité graphique : 1 cm).

Soient les nombres complexes $a = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} + \text{i}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$ et $z_0 = 6 + 6\text{i}$ d'image A_0.

Pour tout n entier naturel non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par

$$z_n = a^n z_0.$$

Partie A

1. Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique.
   Écrire z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
2. Exprimer z_3 puis z_7 en fonction de a^2 ; en déduire l'expression de z_3 et z_7 sous forme exponentielle.
3. Placer les points A_0, A_1, A_3 et A_7 images respectives des complexes z_0, z_1, z_3 et z_7.

Partie B

Pour tout n entier naturel, on pose $|z_n| = r_n$.

1. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $r_n = 12\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.
2. En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Déterminer la limite de la suite (r_n) et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
4. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $\mathrm{O}A_p \leqslant 10^{-3}$ et donner alors une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{O}A_p}\right)$.

PROBLÈME **4 POINTS**

Le but du problème est l'étude d'une fonction f, d'une de ses primitives et d'une suite attachée à cette fonction. Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ avec $\left\|\overrightarrow{\imath}\right\| = 2$ cm et $\left\|\overrightarrow{\jmath}\right\| = 5$ cm.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que f est paire.
   Étudier ses variations sur $[0~;~+\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$.
   Tracer sa courbe $\mathscr{C}$.
2. Montrer que f établit une bijection de $[0~;~+\infty[$ sur $]0~;~1]$.
   On note y un réel quelconque de l'intervalle $]0~;~1]$. Exprimer en fonction de y le seul réel positif x vérifiant $f(x) = y$.

Partie B

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

(On admettra que pour tout réel x, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$).

1. Calculer $F'(x)$. En déduire que F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
2. **a.** Déterminer la limite de F en $+\infty$.
   b. Montrer que F est impaire.
   c. En déduire la limite de F en $-\infty$.
3. Soit λ un réel strictement positif. On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan constituée des points $M(x\,;\,y)$ tels que $\lambda \leqslant x \leqslant 2\lambda$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.
   Exprimer $\mathscr{A}(\lambda)$ en fonction de λ; donner la valeur exacte de $\mathscr{A}(1)$ et déterminer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Partie C

On pose $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ et pour tout naturel n non nul, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_0. Calculer u_3 à l'aide d'une intégration par parties.
   (Remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \times \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$).
2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant x^n$.
   En intégrant cette double inégalité sur $[0\,;\,1]$, montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Baccalauréat S Sportifs de haut-niveau septembre 1997

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n+1}{4} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 2 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{3v_n+1}{4} \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 d'une part et v_1, v_2, v_3 d'autre part.
2. Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 5 cm), tracer les droites D et Δ d'équations respectives $y = \dfrac{3x+1}{4}$ et $y = x$.
   Utiliser D et Δ pour construire sur l'axe des abscisses, les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3, ainsi que les points B_1, B_2, B_3 d'abscisses respectives v_1, v_2, v_3.
3. On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par $sn = u_n + v_n$
   a. Calculer s_0, s_1, s_2, s_3. À partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite (s_n) ?
   b. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (s_n) est une suite constante.
4. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.
   Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique.
   Donner l'expression de d_n en fonction de n.
5. En utilisant les résultats des questions 3. b. et 4. b., donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n.
6. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent. Préciser leurs limites.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm).
On considère les points A et C d'affixes respectives a et c. On suppose que les points O, A, C ne sont pas alignés.
On note B le point image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et D le point image de C par la rotation de centre O et d' angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Dans cette question, on suppose que $a = 3 + \dfrac{1}{4}\text{i}$ et $c = \dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Placer sur une figure les points O, A, B, C, D (on justifiera la construction du point C).
   Dans les questions suivantes, on revient au cas général
   On suppose que les points B et C sont distincts.
2. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AD}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$.
   Comparer les longueurs AD et BC et démontrer que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires.
3. On désigne par I le milieu du segment [AC]. En utilisant les affixes de deux vecteurs que l'on précisera, démontrer que la médiane (OI) du triangle OAC est une hauteur du triangle ODB et que BD = 2OI.
4. La médiane issue de O dans le triangle ODB est-elle une hauteur du triangle OAC ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère quatre points E, F, G, H non alignés, tels que EFGH soit un parallélogramme de centre O.

On désigne par A l'image de G par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

On désigne par B l'image de H par la rotation r' de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

On note I le milieu du segment [GH].

1. Placer ces différents éléments sur une figure.

L'objet de cet exercice est de démontrer que la médiane (OI) du triangle OGH est une hauteur du triangle OAB. À cet effet, on propose deux méthodes.

2. Emploi des nombres complexes

On rapporte le plan complexe à un repère orthonormal direct d'origine O, tel que l'affixe du point G est égale à 1. On note z l'affixe du point H.

Calculer les affixes des points I, A et B en fonction de z.

Prouver que les points O et I sont distincts ainsi que les points A et B.

Montrer que la droite (OI) est perpendiculaire à la droite (AB).

3. Emploi de transformations

On désigne par h l'homothétie de centre G et de rapport 2.

a. Déterminer les images par h des points O et I.

b. Déterminer l'image par r' du point E.

c. Conclure.

PROBLÈME **11 POINTS**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{si} \quad x>0 \quad \text{et} \quad f(0)=0.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 5 cm).

Le but du problème est d'étudier certaines propriétés de la fonction f.

A. Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$$

1. a. Calculer la dérivée g' de g.

Montrer que pour tout $x \in]0~;~+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2\left(x^2-1\right)}{x\left(x^2+1\right)^2}$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x.

2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

3. Déterminer la limite de g en 0.

4. a. Dresser le tableau des variations de g.

b. En déduire qu'il existe un unique nombre réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$.

5. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On ne demande pas de construire la courbe représentative de la fonction g.

B. Étude de la fonction f

1. Montrer que pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, on a $f'(x) = g(x)$. En déduire les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $xf(x)$.
(On pourra poser $h = \dfrac{1}{x^2}$).

b. En déduire que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

3. Étude de f en 0.

a. Déterminer la limite de f en 0. (On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = x\ln(x^2+1) - 2x\ln x$ et on utilisera le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.)

b. Étudier la dérivabilité de f en 0. Préciser la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point 0.

4. Encadrement de $f(\alpha)$.

a. Prouver que, pour tout élément x de $[0,5\ ;\ \alpha]$, $0 < f'(x) < f'(0,5)$.

b. En déduire que, pour tout élément x de $[0,5\ ;\ \alpha]$, $0 < f(\alpha) - f(0,5) < (\alpha - 0,5)f'(0,5)$, puis que $0 < f(\alpha) - f(0,5) < \dfrac{1}{10}f'(0,5)$.

c. En déduire une valeur décimale approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.

5. Dresser le tableau des variations de f. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

C. Calcul d'une aire

Soit λ, un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

1. En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $J_\lambda = \displaystyle\int_\lambda^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
Donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

2. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to 0} J_\lambda$.
On admet que cette limite est l'aire de la partie du plan constituée des points dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifient : $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$
En déduire la valeur de cette aire exprimée en cm^2.

∾ Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1997 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Monsieur M est chargé de ventes à domicile pour le bénéfice d'une association.
À chaque personne sollicitée, il propose l'achat d'un livre seul, ou d'une cassette seule, ou l'achat d'un livre et d'une cassette.
Après un premier bilan de son activité, monsieur M estime que la probabilité qu'une personne visitée choisie au hasard achète un livre (évènement L) est 0,2, la probabilité qu'elle achète une cassette (évènement C) est $0,1$ et la probabilité qu'elle n'achète rien (évènement R) est $0,75$.

Partie A

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   D : « La personne visitée achète un livre ou une cassette ».
   E : « La personne visitée achète un livre et une cassette ».
   F : « La personne visitée achète seulement un livre ».
   G : « La personne visitée achète seulement une cassette ».
2. Sachant que la personne visitée a acheté un livre, quelle est la probabilité qu'elle ait acheté aussi une cassette ?

Partie B

Monsieur M se présente successivement chez n personnes choisies au hasard. Calculer la probabilité p_n qu'une personne au moins lui achète un livre ou une cassette.
Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour avoir $p_n > 0,9$?

EXERCICE 2 **5 POINTS**
Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on donne un triangle ABC direct dont les angles sont aigus (c'est-à-dire que chacun des angles $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BA}\right)$, $\left(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right)$ admet une mesure comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$).
AEB est le triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{3}\quad [2\pi]$.
ACF est le triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AF}\right) = \dfrac{\pi}{3}\quad [2\pi]$.
On présentera les données sur une figure que l'on complétera progressivement.

1. En utilisant la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, démontrer que : CE = BF et
   $\left(\overrightarrow{EC},\ \overrightarrow{BF}\right) = \dfrac{\pi}{3}\quad [2\pi]$.
2. Les droites (EC) et (BF) se coupent en un point I.
   Démontrer que le cercle (C_1) circonscrit au triangle AEB et le cercle (C_2) circonscrit au triangle ACF passent par le point I.
3. Soit M le milieu de [EC] et N le milieu de [BF].
   a. Démontrer que le triangle AMN est équilatéral direct.
   b. Démontrer que le cercle (C) circonscrit au triangle AMN passe aussi par le point I.

PROBLÈME **11 POINTS**

La partie I est l'étude d'une fonction auxiliaire g nécessaire à l'étude de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$

L'étude de la fonction f fait l'objet de la partie II.
La partie III est l'étude de deux suites numériques associées.

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 2\ln x.$$

/medskip

1. Étudier le sens de variation de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0~;~+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}.$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal ? (unité graphique 2 cm).

1. Déterminer la limite de f en 0.
   Interpréter graphiquement le résultat.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{x}{2}$? est asymptote à la courbe (C).
   c. Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]0~;~+\infty[$.
   Montrer, en particulier, que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on déterminera.
3. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (Δ).
   Préciser les coordonnées de B.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α.
   Justifier l'encadrement : $0,34 < \alpha < 0,35$.
6. Tracer la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).

Partie III

On considère la suite numérique (x_n) définie par $x_n = \text{e}^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout nombre entier naturel n.

1. **a.** Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
   b. Montrer que (x_n) est une suite croissante.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $a_n = 4\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[f(x) - \frac{x}{2}\right]\,\text{d}x$.
   a. Donner une interprétation géométrique de a_n.
   b. Montrer que $a_n = \dfrac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n.
   En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.

Baccalauréat S Nouvelle Calédonie décembre 1997

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique et dispose d'un répondeur.
Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement son répondeur. Quand il est présent, il le branche une fois sur trois.
Quand un client téléphone, il a quatre chances sur cinq d'obtenir le répondeur et une chance sur cinq d'obtenir l'artisan.
On note $P(E)$ la probabilité d'un évènement E et $p(E/F)$ la probabilité conditionnelle de E sachant F.
Un client téléphone à l'artisan.
On note :

R l'évènement « le client obtient le répondeur » ;

A l'évènement « l'artisan est présent » ;

$\overline{A}$ l'évènement contraire de A ;

1. Déterminer la probabilité $P(R)$, ainsi que les probabilités conditionnelle $P(R/A)$ et $P\left(R/\overline{A}\right)$.
2. **a.** Exprimer $P(R)$ en fonction de $P(R/A)$, $P\left(R/\overline{A}\right)$ et $P(A)$.

   b. En déduire l'égalité $\dfrac{4}{5} = -\dfrac{2}{3}P(A) + 1$ et calculer la probabilité que l'artisan soit présent.
3. Un client téléphone ; il obtient le répondeur. Déterminer la probabilité que l'artisan soit présent.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

1. On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^2 + 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

   Résoudre cette équation dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
   Écrire les solutions sous forme trigonométrique.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
   Les points I et J du plan ont pour affixes respectives : $z_{\text{I}} = -\sqrt{3} + \text{i}$ et $z_{\text{J}} = -\sqrt{3} - \text{i}$.

   a. Tracer le cercle de centre O et de rayon 2, et placer les points I et J sur la figure.

   b. Montrer que le point J est l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

   c. En déduire la nature du triangle OIJ.
3. Soit B le milieu du segment [OI].

   a. Déterminer l'affixe du point B et placer le point B sur la figure.

   b. Préciser la nature du triangle JBO.
4. Soit A le point du plan défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\text{BA}} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{OJ}}$.

   a. Déterminer l'affixe du point A et placer le point A sur la figure.

   b. Vérifier que le point A est l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

   c. Montrer que le point A est le barycentre des points J, O, B affectés de coefficients que l'on déterminera.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

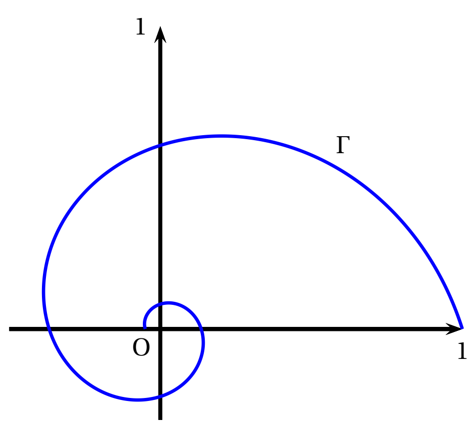
Enseignement de spécialité

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 15 cm).
Soit t un nombre réel positif. On note $M(t)$ le point de P de coordonnées $(x(t)\ ;\ y(t))$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) \\ y(t) & = & \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right). \end{array}\right.$$

Quand t varie dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, le point $M(t)$ parcourt une courbe paramétrée notée Γ.
On a représenté sur la figure donnée, la partie de Γ correspondant aux valeurs de t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,6]$.
Le but de l'exercice est d'étudier des propriétés géométriques de certains points de Γ.

1. **a.** Exprimer en fonction de t, l'affixe $z(t)$ du point $M(t)$.
   b. Préciser le module et un argument de $z(t)$.
2. Tracer les points $M(0)$, $M(1)$, $M(2)$, $M(3)$ et $M(4)$ sur la figure donnée en annexe.
   a. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, exprimer $z(t+1)$ en fonction de $z(t)$.
   En déduire que $M(t+1)$ est l'image de $M(t)$ par la similitude directe de centre O, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On note s cette similitude.
   b. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, exprimer $z(t+2)$ en fonction de $z(t)$.
   Justifier que $M(t+2)$ est l'image de $M(t)$ par une homothétie h dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier chaque réponse.
   a. Les points $M(2)$ et $h(M(0))$ sont confondus.
   b. Les points $M(1)$ et $M(3)$ sont symétriques par rapport au point O.
   c. Les points $M(n)$, où n est un entier naturel, sont les points d'intersection de Γ avec les axes de coordonnées.



PROBLÈME **11 POINTS**

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}} \text{ et } g(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

On note $\mathscr{C}$ et Γ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 4 cm).

A. Étude des fonctions f et g

1. **a.** Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes à $\mathcal{C}$.
   c. Prouver que le point Ω de coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
   d. On note T la tangente à $\mathcal{C}$ au point Ω. Déterminer le coefficient directeur de T.
   e. Représenter T et $\mathcal{C}$.
2. **a.** En observant que, pour tout nombre réel x, on a $g(x) = f(-x)$, montrer que Γ est l'image de $\mathcal{C}$ par une symétrie que l'on déterminera.
   b. Vérifier que, pour tout nombre réel x, on a $f(x) + g(x) = 1$. En déduire que Γ est l'image de $\mathcal{C}$ par une autre symétrie que l'on déterminera.
   c. Déterminer le cœfficient directeur de la tangente T' à Γ au point Ω.
   d. Représenter T' et Γ sur la figure de la question 1.

B. Calcul d'une aire

On note $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. En utilisant l'égalité de la question A. 2. b., calculer $I + J$.
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel t, $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}$.
   b. En déduire une primitive G de g sur $\mathbb{R}$, puis la valeur de J.
3. Calculer la valeur de I.
4. **a.** Prouver que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$, $f(x) \leqslant g(x)$.
   b. On note Δ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant x \leqslant & 1,\\ f(x) & \leqslant y \leqslant & g(x)\end{array}\right.$$

   On note A l'aire, exprimée en cm^2, du domaine A. Exprimer A en fonction de I et J. Donner une approximation décimale de A à 10^{-2} près.

C. Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère les fonctions h et H définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = \mathrm{e}^x \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \text{ et } H(x) = \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, +\infty[$ $h(x)$ est strictement positif.
   b. En déduire que H est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
2. On note h' la fonction dérivée de h.
   Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$
   $h(x) = h'(x) + g(x)$.
   En déduire $H(x)$ en fonction de x.
3. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, +\infty[$,

$$h(x) = \frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{e}^{-x}}.$$

   En déduire la limite de h en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de H en $+\infty$.
   Prouver finalement que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [H(x) - x] = 1 - 2\ln 2$.
   Interpréter graphiquement ce dernier résultat.