Baccalauréat S 2000
L'intégrale d'avril 2000 à mars 2001

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Tapuscrit : Denis Vergès

Baccalauréat S Pondichéry juin 2000

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une. Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise. On appelle clef numéro x la clef utilisée au x-ième essai.

1. On appelle D_1 l'évènement : « La clef numéro 1 n'ouvre pas la porte ». Calculer sa probabilité.
2. On appelle D_2 l'évènement : « La clef numéro 2 n'ouvre pas la porte ». Calculer la probabilité que l'évènement D_2 se réalise, sachant que l'évènement D_1 est réalisé.
   En déduire la probabilité de l'évènement $D_1 \cap D_2$.
   On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre pondéré.
3. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?
4. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, on note $(i\ ;\ j)$ l'évènement : « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros i et j », et $P(i\ ;\ j)$ la probabilité de cet évènement.
   a. Calculer $P(2\ ;\ 4)$.
   b. Calculer $P(4\ ;\ 5)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$; unité graphique 4 cm.
On appelle B le point d'affixe i et M_1 le point d'affixe :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-\text{i}).$$

1. Déterminer le module et un argument de z_1.
2. Soit M_2 le point d'affixe z_2, image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   Déterminer le module et un argument de z_2.
   Montrer que le point M_2 est un point de la droite (D) d'équation $y = x$.
3. Soit M_3 le point d'affixe z_3, image de M_2 par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}+2$.
   a. Montrer que $z_3 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$.
   b. Montrer que les points M_1 et M_3 sont situés sur le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.
4. Construire, à la règle et au compas, les points M_1, M_2 et M_3 en utilisant les questions précédentes ; on précisera les différentes étapes de la construction.
5. À tout point M du plan d'affixe z (distinct de B), on associe le point M', d'affixe Z telle que $Z = \dfrac{1}{\text{i}-z}$.
   Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan (M distinct de B) tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 2 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. **a.** Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

   b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.

   c. À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 7.

   d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?

   e. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   a. Montrer que si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.

   b. Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7.
   En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

$\star$ Étude de la fonction $g : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$

Soit la fonction g définie sur $]-3\,;\,3[$ par : $g(x) = \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$.

1. Étudier la parité de la fonction g.
2. **a.** Calculer les limites de g en -3 et en 3.

   b. Étudier le sens de variation de g sur $[0\,;3[$.
   Dresser son tableau de variation sur $]-3\,;\,3[$.
3. Soit $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormal d'unité graphique 4 centimètres. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction g dans ce repère.

   a. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

   b. Tracer dans le repère la courbe $(\mathscr{C})$ et sa tangente (T).
4. Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
5. **a.** Calculer la dérivée de la fonction $x \longmapsto xg(x)$.

   b. Calculer l'aire, exprimée en cm^2, de la portion de plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. On donnera la valeur exacte de cette aire, puis une valeur approchée au mm^2 près.

Partie B

$\star$ Étude d'une courbe paramétrée

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 centimètres.
Soit la courbe paramétrée (Γ) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t\left(3-t^2\right) \\ y(t) & = & tg(t) \end{array}\right. \quad \text{pour} \quad t \in [-2\;;\;2].$$

où g désigne la fonction étudiée dans la partie A. On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t)\;;\;y(t))$.

1. **a.** Comparer d'une part $x(t)$ et $x(-t)$ et d'autre par $y(t)$ et $y(-t)$.
   b. Par quelle transformation peut-on passer de $M(t)$ à $M(-t)$?
   En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.
2. Étudier la fonction $x\;:\;t \longmapsto t\left(3-t^2\right)$ et dresser son tableau de variations sur $[0\,;2]$.
3. En utilisant la partie **A.**, montrer que la fonction $t \longmapsto y(t)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$.
4. Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sur $[0\,;2]$.
5. Pour quelles valeurs de t l'abscisse de $M(t)$ est-elle nulle ?
   Préciser alors les ordonnées des points correspondants de (Γ).
6. Tracé de (Γ)
   a. Placer, dans le repère $\left(\mathrm{O},\;\vec{\imath},\;\vec{\jmath}\right)$, les points M(0), M(1), M$\left(\sqrt{3}\right)$ et M(2) qui correspondent respectivement aux valeurs 0, 1, $\sqrt{3}$ et 2 du paramètre t.
   b. Préciser un vecteur directeur des tangentes à (Γ) aux points M(0) et M(1) et tracer ces tangentes.
   c. Tracer (Γ).

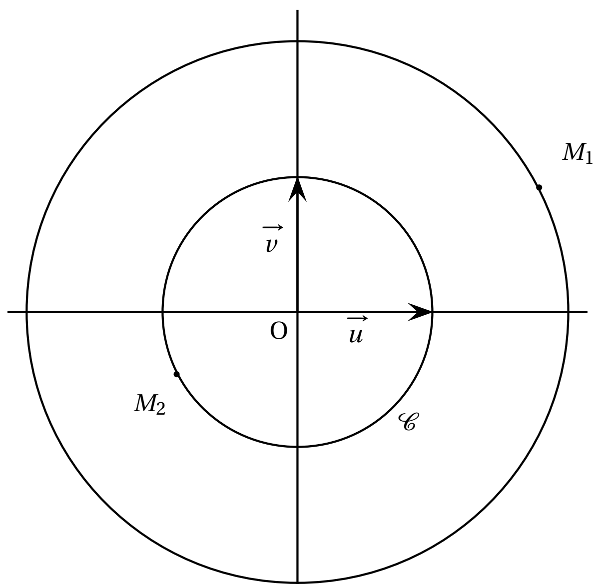
Baccalauréat S Amérique du Nord juin 2000

EXERCICE 1 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
Dans tout l'exercice, z est un nombre complexe non nul.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -\dfrac{1}{z}$, puis le point I milieu du segment $[MM']$. L'affixe de I est donc $\dfrac{1}{2}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$.
Note : les questions **2, 3** et **4** sont largement indépendantes.

1. **a.** Donner une relation entre les modules de z et z'.
   Donner une relation entre leurs arguments.

   b. Sur la figure ci-dessous est placé le point M_1 d'affixe z_1 sur le cercle de centre O et de rayon 2.
   Expliquer comment on peut obtenir géométriquement le point M'_1, puis le point I_1 milieu du segment $[M_1 M'_1]$. Effectuer cette construction.



2. Pour cette question, θ est un réel et M est le point d'affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

   a. Calculer sous forme algébrique l'affixe de I.

   b. Sur la figure jointe est placé le point M_2 d'affixe z_2 sur le cercle $\mathscr{C}$, de centre O et de rayon 1. Expliquer comment, en utilisant le résultat de la question **2 a**, on peut obtenir géométriquement le point I_2 milieu du segment $[M_2 M'_2]$.
   Effectuer cette construction.
   Donner (sans justification) l'ensemble décrit par I lorsque M décrit $\mathscr{C}$.

3. Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O.

   a. Déterminer les points M du plan complexe pour lesquels M et I sont confondus.

   b. Développer $(z - 2\mathrm{i})^2 + 3$.
   Déterminer les points M du plan complexe pour lesquels l'affixe de I est $2\mathrm{i}$.

4. Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O, d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels).

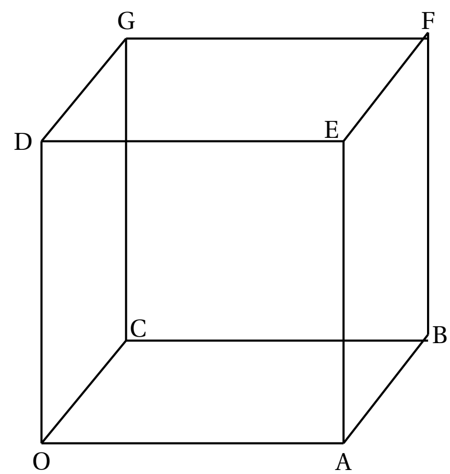
a. Exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de l'affixe de I.

b. Déterminer l'ensemble A des points M du plan pour lesquels I appartient à l'axe des abscisses.

c. Déterminer l'ensemble B des points M du plan pour lesquels I appartient à l'axe des ordonnées.

EXERCICE 2 5 points

Enseignement obligatoire



Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-dessus.

L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\,\overrightarrow{\mathrm{OC}},\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$. On désigne par a un réel strictement positif.

L, M et K sont les points définis par $\overrightarrow{\mathrm{O}L} = a\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, et $\overrightarrow{\mathrm{B}K} = a\overrightarrow{\mathrm{BF}}$.

1. **a.** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{D}M} \wedge \overrightarrow{\mathrm{D}L}$.

b. En déduire l'aire du triangle DLM.

c. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).

2. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).

a. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{O}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}K} = \overrightarrow{\mathrm{O}H} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}K}$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}H}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}K}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}H} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{O}K}$.

Démontrer que $\lambda = \dfrac{a}{a^2+2}$. En déduire que H appartient au segment [OK].

c. Déterminer les coordonnées de H.

d. Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{O}K}$. En déduire que $HK = \dfrac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de a.

EXERCICE 2 5 points
Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct OAB, rectangle et isocèle en O. On a donc $(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note R_{A} et R_{B} les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\dfrac{\pi}{2}$ et S_{O} la symétrie de centre O.

On place un point C, non situé sur la droite (AB) , on trace les carrés BEDC et ACFG directs. On a donc $(\overrightarrow{\text{B}E}, \overrightarrow{\text{BC}}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{A}G}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

1. **a.** Déterminer $\text{S}_{(\text{AO})} \circ S_{(\text{AB})}$ composée des réflexions d'axes (AB) et (AO).
   b. En écrivant R_{B} sous la forme d'une composée de deux réflexions, démontrer que $R_{\text{A}} \circ R_{\text{B}} = S_{\text{O}}$.
2. **a.** Déterminer l'image de E par $R_{\text{A}} \circ R_{\text{B}}$.
   b. En déduire que O est le milieu du segment [EG].
   c. On note R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle.
   Étudier l'image de C par la transformation $R_F \circ S_{\text{O}} \circ R_D$. Déterminer la transformation $\text{R}_{\text{F}} \circ S_{\text{O}} \circ R_D$.
   d. Placer H le symétrique de D par rapport à O.
   Démontrer que $R_F(H) = D$. Démontrer que le triangle FOD est rectangle et isocèle en O.

PROBLÈME 10 points

Soit f la fonction définie sur $[0,\ +\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & \dfrac{x^2+x+1}{x^2}\text{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x > 0 \\ f(0) & = & 0. \end{array}\right.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 5 cm).

Partie A

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
2. Pour $x > 0$, calculer $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$. Étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0. (on pourra utiliser, pour n entier naturel non nul, $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} u^n \text{e}^{-u} = 0$.
   Que peut-on en déduire pour la fonction f ? Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
3. Démontrer que pour tout x de $]0, +\infty[$ on a $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^4}\text{e}^{-\frac{1}{x}}$.
4. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f.

Partie B

On note g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - xf'(x).$$

1. Montrer que dans $]0\ ;\ +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.
2. Démontrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle α dont on justifiera un encadrement à 10^{-2} près.
3. On pose $A = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$. Encadrer A à 2×10^{-1} près (justifier) et montrer que $A = f'(\alpha)$.
4. Pour tout $a > 0$, on note T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Montrer que T_a a pour équation $y = Ax$. Tracer T_a, puis la courbe $\mathscr{C}$.
5. Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes T_a à $\mathscr{C}$ (en des points d'abscisses non nulles), seule T_α passe par l'origine O.
6. On admettra que T_α est au-dessus de $\mathscr{C}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   a. Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, suivant le réel m donné.
   b. Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$ selon le réel m donné.

Partie C

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Sans calculer explicitement u_n, déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
2. Démontrer que la fonction h, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Calculer u_n. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2000

Exercice 1 **4 points**

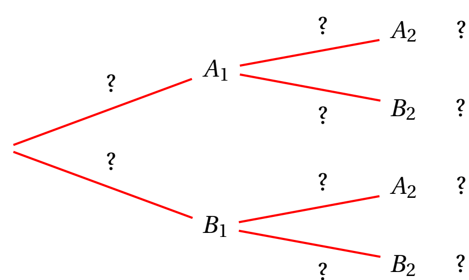
Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.
Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.
Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.
Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements suivants :
A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;
A_2 « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;
B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;
B_2 « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».

1. **a.** Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

   b. Calculer les probabilités de chacun des évènements suivants :

$$p(A_2/A_1),\ p(A_2/B_1) \text{ et } p(A_1 \cap A_2)$$

   c. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



   d. Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $p(A_2) = \dfrac{8}{11}$.

2. Le prix du billet pour le film A est de 30 F et de 20 F pour le film B.
   On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

1. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

   a. Calculer $P(-1)$.

   b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z) = (z+1)\left(z^2 + az + b\right).$$

   c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. (Unité graphique : 2 cm.) On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -1, \; z_{\text{B}} = 2 + \text{i}\sqrt{3}, \; z_{\text{C}} = 2 - \text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_{\text{G}} = 3.$$

a. Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G.

b. Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Calculer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_{\text{A}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{G}} - z_{\text{C}}}$. En déduire la nature du triangle GAC.

3. Soit (D) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(-\overrightarrow{M\text{A}} + 2\overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}\right) \cdot \overrightarrow{\text{CG}} = +12 \quad (1)$$

a. Montrer que G est le barycentre du système de points pondérés

$$\{(\text{A}, -1) \,;\, (\text{B}, 2) \,;\, (\text{C}, 2)\}.$$

b. Montrer que la relation (1) est équivalente à la relation $\overrightarrow{\text{G}M} \cdot \overrightarrow{\text{CG}} = -4$ (2).

c. Vérifier que le point A appartient à l'ensemble (D).

d. Montrer que la relation (2) est équivalente à la relation $\overrightarrow{\text{A}M} . \overrightarrow{\text{GC}} = 0$.

e. En déduire l'ensemble (D) et le tracer.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Les points $A_0 = \text{O}$; A_1 ; ... ; A_{20} sont les sommets d'un polygone régulier de centre A, à 21 côtés, de sens direct.
Les points $B_0 = \text{O}$; B_1 ; B_{14} sont les sommets d'un polygone régulier de centre B, à 15 côtés, de sens direct.
Soit r_{A} la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{21}$ et r_{B} la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{2\pi}{15}$.
On définit la suite (M_n) de points par :

— M_0 est l'un des points $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{20}$;
— pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = r_{\text{A}}(M_n)$.
On définit la suite (P_n) de points par :
— P_0 est l'un des points $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{14}$
— pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = r_{\text{B}}(P_n)$.

Le but de l'exercice est de déterminer, pour deux cas particuliers, l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant :

$$M_n = P_n = \text{O}.$$

1. Dans cette question, $M_0 = P_0 = \text{O}$.

a. Indiquer la position du point M_{2000} et celle du point P_{2000}.

b. Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que $M_n = P_n = \text{O}$.
En déduire l'ensemble S.

2. Dans cette question, $M_0 = A_{19}$ et $P_0 = B_{10}$.
On considère l'équation $(E) : 7x - 5y = 1$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.

a. Déterminer une solution particulière $(a\,;\,b)$ de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

c. En déduire l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant $M_n = P_n =$O.

Problème **11 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - 2x.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; unité graphique : 1 cm.

Partie A - Étude de f

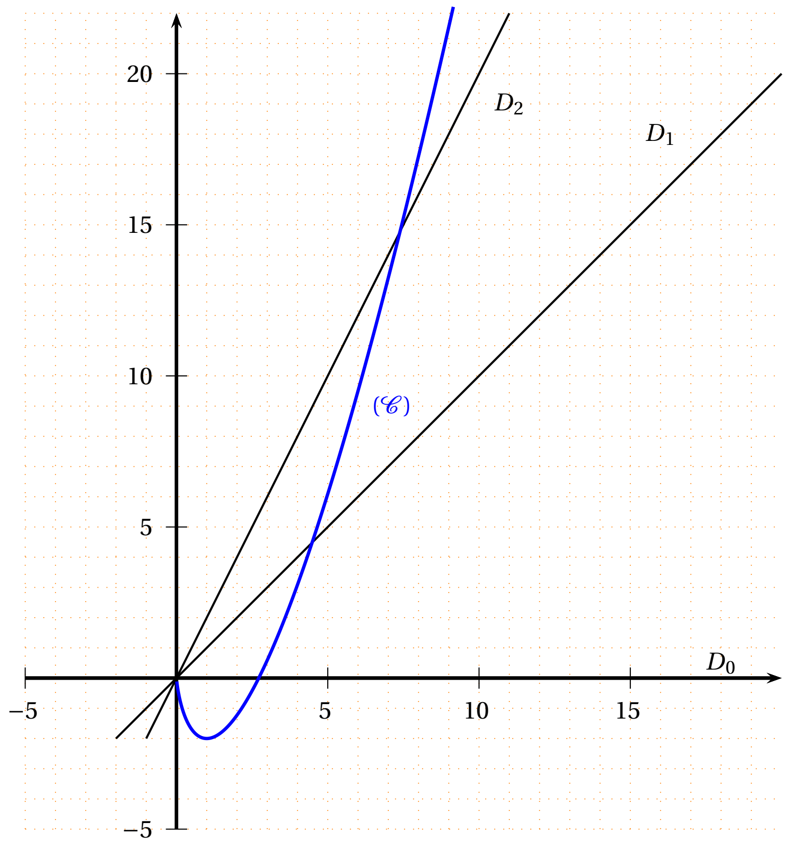
1. Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) = 2x\ln x - 2x$ puis que $f(x) = 2x\ln\dfrac{x}{\text{e}}$.
2. **a.** Étudier la limite de f en $+\infty$.
   b. Montrer que f est dérivable en tout $x > 0$; calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
   c. Étudier le sens de variation de f sur $]0~;~+\infty[$.
   d. Donner le tableau de variation de f sur $]0~;~+\infty[$.
3. Déterminer par le calcul l'abscisse du point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet sur l'intervalle $[1~;~5]$ une unique solution et en donner la valeur décimale arrondie à 10^{-2}.

Partie B - Calcul d'aires

1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$\left\{\begin{array}{l c l}
F(0) & = & 0\\
F(x) & = & x^2\ln x - 2 - \dfrac{3x^2}{2} \quad \text{si} \quad x > 0
\end{array}\right.$$

   a. On admet que $\displaystyle\lim_{x \to 0} x\ln x = 0$; montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.
   b. Montrer que, pour tout x appartenant à $]0~;~+\infty[$, $F'(x) = f(x)$.
2. On considère pour chaque entier n positif ou nul, la droite D_n d'équation $y = nx$.
   On trouvera ci-dessous un tracé de la courbe $(\mathscr{C})$ et des droites $D_0,~D_1,~D_2$.



a. Déterminer les coordonnées du point I_n, d'abscisse strictement positive, intersection de $(\mathscr{C})$ et de D_n.

On appelle P_n le point de l'axe des abscisses de même abscisse que I_n. Placer les points I_0, I_1, I_2, P_0, P_1, P_2 sur la figure donnée en annexe.

b. Déterminer la position relative de $(\mathscr{C})$ et de D_n pour les abscisses appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on considère le domaine A_n situé dans le quart de plan défini par $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, délimité par $(\mathscr{C})$, D_{n-1} et D_n.

On note a_n son aire, exprimée en unités d'aire.

a. Faire apparaître les domaines A_1 et A_2 sur la figure.

b. Calculer l'aire t_n du triangle $\text{O}P_nI_n$, en unités d'aire.

c. Calculer l'aire u_n, en unités d'aire, du domaine situé dans le quart de plan défini par $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, délimité par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, et les parallèles à l'axe des ordonnées passant par P_0 et P_n.

d. Vérifier que l'aire v_n en unités d'aire, du domaine situé dans le quart de plan défini par $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, délimité par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et D_n, est $v_n = t_n - u_n = \text{e}^2\left(\text{e}^n - 1\right)$.

e. Calculer alors a_n.

4. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique.

En préciser la raison et le premier terme.

Baccalauréat S Asie juin 2000

Exercice 1 4 points

Commun à tous les candidats

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$. On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les évènements suivants :
A_n : « Alice atteint la cible au n^{e} coup ».
B_n : « Alice rate la cible au n^{e} coup ».
On pose $P_n = p(A_n)$.
Pour les questions **1.** et **2.** on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

1. Déterminer p_1 et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
$$p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}.$$
3. Pour $n \geqslant 1$ on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_1 et la raison q.
4. Écrire u_n puis p_n en fonction de n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 2 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unité 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -\text{i}\,;\ z_{\text{B}} = 3\,;\ z_{\text{C}} = 2+3\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = -1+2\text{i}.$$

1. Placer sur une figure les points A, B, C et D.
2. **a.** Interpréter géométriquement le module et l'argument du complexe $\dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{D}} - z_{\text{B}}}$.
   b. Calculer le complexe $\dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{D}} - z_{\text{B}}}$.
   c. Que pouvez-vous conclure concernant les segments [AC] et [BD] ?
3. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.
   b. Calculer l'aire s_0 du quadrilatère ABCD.
4. **a.** Placer sur la figure précédente les points A_1, B_1, C_1 et D_1 tels que $\overrightarrow{\text{DA}_1} = \overrightarrow{\text{A}_1\text{B}_1} = \overrightarrow{\text{B}_1\text{C}}$, où les points A_1 et B_1 appartiennent à [DC], le quadrilatère $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1$ étant un carré situé à l'extérieur du quadrilatère ABCD.
   b. Tracer le carré $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1$ et déterminer son aire s_1.
5. **a.** On continue par le même procédé : un carré $\text{A}_n\text{B}_n\text{C}_n\text{D}_n$ étant déterminé, on considère les points A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} et D_{n+1} tels que $\overrightarrow{\text{D}_n\text{A}_{n+1}} = \overrightarrow{\text{A}_{n+1}\text{B}_{n+1}} = \overrightarrow{\text{B}_{n+1}\text{C}_n}$ où les points A_{n+1} et B_{n+1} appartiennent à $[\text{D}_n\text{C}_n]$, le quadrilatère $\text{A}_{n+1}\text{B}_{n+1}\text{C}_{n+1}\text{D}_{n+1}$ étant un carré situé à l'extérieur du carré $\text{A}_n\text{B}_n\text{C}_n\text{D}_n$.
   Tracer le carré $\text{A}_2\text{B}_2\text{C}_2\text{D}_2$.

b. Soit s_n l'aire du carré $A_nB_nC_nD_n$.
Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n, puis de n.
En déduire s_n , en fonction de n.

c. Déterminer, en fonction de n, l'aire S_n de la figure obtenue par la juxtaposition du quadrilatère ABCD et des carrés $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, … et $A_nB_nC_nD_n$.

d. La suite (s_n) est-elle convergente ? Préciser sa limite si elle existe.

Exercice 2 5 points
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Déterminer PGCD(2 688 ; 3 024).

2. Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.

a. Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes
(1) $2688x + 3024y = -3360$;
(2) $8x + 9y = -10$.

b. Vérifier que (1 ; −2) est une solution particulière de l'équation (2).

c. Déduire de ce qui précède les solutions de (2).

3. Soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives

$$x + 2y - z = -2 \quad \text{et} \quad 3x - y + 5z = 0.$$

a. Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).

b. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2).

c. En déduire l'ensemble E des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Problème 11 points

Partie A

Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; unité graphique : 5 cm.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Déterminer les asymptotes de $(\mathscr{C})$.
2. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\text{e}}~;~1\right]$ une solution unique, notée α.
   Déterminer un encadrement de α, d'amplitude 10^{-2}.
   Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ sur $]0~;~+\infty[$.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie B Calcul d'aire

1. Déterminer une équation de la tangente (D) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.
2. **a.** Soit φ la fonction définie, pour tout $x > 0$, par :

   $$\varphi(x) = x - x^2 + \ln x.$$

   Calculer $\varphi'(x)$.
   En déduire le sens de variation de φ, puis le signe de $\varphi(x)$, sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

   b. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \frac{\varphi(x)}{x}$.

   c. En déduire la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (D).
3. On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente (D).

   a. Hachurer ce domaine.

   b. Soit $\mathscr{A}$ son aire, en cm^2. Écrire la valeur exacte de $\mathscr{A}$ comme expression polynomiale du second degré en α.

Partie C Étude d'une suite

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{\text{e}}~;~\alpha\right]$. On note M_0 le point de $(\mathscr{C})$d abscisse x_0.

1. **a.** Donner une équation de la tangente (T_0) à $(\mathscr{C})$ en M_0, en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

   b. Soit x_1 l'abscisse du point d'intersection de (T_0) avec l'axe des abscisses. Écrire x_1 en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.
2. On considère la fonction h définie sur $\left]\frac{1}{\text{e}}~;~\alpha\right]$ par :

   $$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.\ \text{(On remarquera que } h(x_0) = x_1\text{).}$$

a. Montrer que $h'(x) = \dfrac{f''(x) \times f(x)}{[f'(x)]^2}$.

b. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe sur $\left]\dfrac{1}{\text{e}}\ ;\ \alpha\right]$.

c. En déduire que h est strictement croissante sur $\left]\dfrac{1}{\text{e}}\ ;\ \alpha\right]$, puis montrer que $x_1 < \alpha$.

d. En écrivant $h(x) - x = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, étudier le signe de $h(x) - x$ sur $\left]\dfrac{1}{\text{e}}\ ;\ \alpha\right]$

En déduire que $\dfrac{1}{\text{e}} < x_0 < x_1 < \alpha$.

3. a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $\left]\dfrac{1}{\text{e}}\ ;\ \alpha\right]$, $h(x)$ appartient à $\left]\dfrac{1}{\text{e}}\ ;\ \alpha\right]$.

b. On considère la suite (x_n) de réels définie par x_0 et $x_{n+1} = h(x_n)$ pour tout entier naturel n.

Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.

Baccalauréat S Centres étrangers juin 2000

Exercice 1 **5 points**

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions.
Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.

   a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes. »

   E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur. »

   b. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées.

   Établir la loi de probabilité de X.

   Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

   On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

   On effectue ainsi k tirages successifs.

   Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 km. Le plan $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ représente le sol.
Les deux « routes aériennes » à contrôler sont représentées par deux droites (D_1) et (D_2) , dont on connaît des représentations paramétriques :

$$(\text{D}_1)\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+\ a\\ y &=& 9+3a\\ z &=& 2\end{array}\right. \text{ avec } a\in\mathbb{R} \qquad (\text{D}_2)\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0,5+2b\\ y &=& 4\ +\ b\\ z &=& 4\ -\ b\end{array}\right. \text{ avec } b\in\mathbb{R}.$$

1. **a.** Indiquer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u_1}$ directeur de la droite (D_1) et d'un vecteur $\overrightarrow{u_2}$ directeur de la droite (D_2).

   b. Prouver que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.

2. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées S$(3\,;4\,;0,1)$, un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R) . Soit (P_1) le plan contenant S et (D_1) et soit (P_2) le plan contenant S et (D_2).

   a. Montrer que (D_2) est sécante à (P_1).

   b. Montrer que (D_1) est sécante à (P_2).

   c. Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites (D_1) et (D_2). Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD tel que
AB = BC = CD = DA = 5 et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA] et [BD].
On note (Δ) la médiatrice de [AB] et (Δ') la médiatrice de [CD].

1. Soit f l'isométrie du plan définie par $f(\text{A}) = \text{B}$, $f(\text{B}) = \text{O}$, $f(\text{D}) = \text{C}$.

a. Prouver que f est un antidéplacement.

b. Démontrer que s'il existe un point M invariant par f, alors M est équidistant des points A, B, C, D.

c. L'isométrie f admet-elle un point invariant ?

2. Soit σ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et r la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

a. Démontrer que $f = r \circ \sigma$.

b. A-t-on $f = \sigma \circ r$?

3. Soit s_1, la symétrie orthogonale d'axe (BC).

a. Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale s_2, telle que $r = s_1 \circ s_2$.

b. En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = s_1 \circ t_1$, où t_1 est une translation que l'on précisera.

4. Soit t_2 la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; on note t_2^{-1} sa réciproque et on pose $g = t_2^{-1} \circ f$.

a. Déterminer $g(\text{D})$, $g(\text{I})$, $g(\text{O})$. En déduire la nature précise de la transformation g.

b. Démontrer que $f = t_2 \circ g$. A-t-on $f = g \circ t_2$?

Problème **10 points**

Les buts du problème sont l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{\mathrm{e}^{x}},$$

puis la recherche de primitives de cette fonction.

Partie A - Étude de fonctions auxiliaires

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1).$$

a. On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$. En déduire la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

b. Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

c. Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x-1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

d. Étudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

e. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α, dans l'intervalle $\left[\mathrm{e}+1~;~\mathrm{e}^3+1\right]$ et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1~;~\alpha[$ et $]\alpha~;~+\infty[$.

2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}$$

a. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x)$ et prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

b. Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g\left(x^2\right)$ sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

c. Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $\left]1~;~\sqrt{\alpha}\right[$ et décroissante sur l'intervalle $\left]\sqrt{\alpha}~;~+\infty\right[$.

Partie B - Étude de la fonction *f*

1. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0~;~+\infty[$, on a

$$f(x) = \varphi\left(\mathrm{e}^{x}\right).$$

2. En déduire :

a. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

b. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c. Le sens de variation de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f(x) \leqslant \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

4. Reproduire le tableau suivant et le compléter en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près :

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

5. Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée, On prendra 10 comme valeur approchée de α.

Partie C - Recherche de primitives de f

1. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle :

$$y' + y = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

2. On pose $h(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1} - \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

a. Trouver une primitive H de h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

b. En déduire les primitives F de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Baccalauréat S Métropole juin 2000

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions.

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de l'évènement A et $p(A/B)$ la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard.

On appelle P l'évènement : « L'élève fait partie du club photo », et T l'événement : « L'élève fait partie du club théâtre ».

Montrer que les évènements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a. On appelle T_1 l'évènement : « Le premier élève appartient au club théâtre ».
Calculer $p(T_1)$.

b. On appelle T_2 l'évènement « L'élève pris en photo appartient au club théâtre ».
Calculer $p(T_2/\mathrm{T}_1)$, puis $p\left(T_2/\overline{T_1}\right)$. En déduire $p(T_2 \cap T_1)$ et $p\left(T_2 \cap \overline{T_1}\right)$.
(On pourra éventuellement utiliser un arbre.)

c. Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est $0,2$.

3. Toutes les semaines, on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.

Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm, on considère les points A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$ et B d'affixe $z_{\mathrm{B}} = 2$.

Soit un réel θ appartenant à l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.

On note M le point d'affixe $z = 1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$.

1. Montrer que le point M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon 1.

2. Exprimer l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{A}M})$ en fonction de θ.

En déduire l'ensemble E des points M quand θ décrit l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.

3. On appelle M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle -2θ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z' = \overline{z}$ puis que M' appartient à $(\mathscr{C})$.

4. Dans toute la suite, on choisit $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ et A$'$ l'image de A par r.

a. Définir l'image $(\mathscr{C}')$ du cercle $(\mathscr{C})$ par r.
Placer sur une figure A, B, $(\mathscr{C})$, M, $(\mathscr{C}')$ puis le point M' image de M par r.

b. Montrer que le triangle AMO est équilatéral.

c. Montrer que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent en O et en M'.

d. Soit le point P symétrique de M par rapport à A. Montrer que M' est le milieu de $[\mathrm{A}'P]$.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B et le point E tel que $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
Pour la figure, on prendra comme unité de longueur le centimètre et AB = 16. Cette figure sera complétée au fur et à mesure.
Soit un point C, distinct de A, tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{A}C}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
La droite parallèle à $(\mathrm{B}C)$ passant par E coupe la droite $(\mathrm{A}C)$ en F.
On appelle I le milieu de $[\mathrm{B}C]$, J le milieu de $[\mathrm{E}F]$ et D le point d'intersection des droites $(\mathrm{E}C)$ et $(\mathrm{B}F)$.
On note h_{A} l'homothétie de centre A qui transforme B en E et h_D l'homothétie de centre D qui transforme E en C.

1. Déterminer $h_{\mathrm{A}}(C)$ puis $h_D(F)$.
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h_D \circ h_{\mathrm{A}}$ puis de $h_{\mathrm{A}} \circ h_D$.
3. On appelle E' l'image de E par h_{A} et E'' l'image de E' par h_D.
   Représenter E', puis construire E'' en justifiant la construction.
4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h_D \circ h_{\mathrm{A}} \circ h_{\mathrm{A}} \circ h_D$.
5. Montrer que le quadrilatère $\mathrm{BE}CE''$ est un parallélogramme.
6. On appelle (Δ) l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
   (Δ) est donc une demi-droite ouverte d'origine A.
   Pour la suite, les points A, B, E sont fixes et le point C décrit (Δ).
   Déterminer et construire le lieu géométrique $(\Delta)''$ du point E''.

Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 5 cm).

Partie A

★ On considère la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f_1(x) = x\text{e}^{-x^2}$$

et on appelle $(\mathscr{C}_1)$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel positif x, $f_1'(x) = \text{e}^{-x^2} - 2x^2\text{e}^{-x^2}$. En déduire le sens de variation de f_1.
2. Calculer la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$). Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Dresser le tableau de variation de f_1.
4. On appelle (Δ) la droite d'équation $y = x$.
   Déterminer la position de $(\mathscr{C}_1)$ par rapport à (Δ).
5. Tracer $(\mathscr{C}_1)$ et (Δ).

Partie B

★ On considère la fonction f_3 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_3(x) = x^3\text{e}^{-x^2}$ et on appelle $(\mathscr{C}_3)$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel x positif, $f_3'(x)$ a même signe que $3-2x^2$. En déduire le sens de variation de f_3.
2. Déterminer les positions relatives de $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$.
3. Tracer $(\mathscr{C}_3)$ dans le même repère que $(\mathscr{C}_1)$ (on admettra que $(\mathscr{C}_3)$ a la même asymptote que $(\mathscr{C}_1)$ en $+\infty$).
4. On appelle (D) la droite d'équation $x = 1$. Soit $\mathscr{A}_1$ l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C}_1)$, les deux axes de coordonnées et la droite (D) et soit $\mathscr{A}_3$ l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C}_3)$ les deux axes de coordonnées et la droite (D).
   a. Calculer $\mathscr{A}_1$.
   b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathscr{A}_3 = -\dfrac{1}{2\text{e}} + \mathscr{A}_1$.

Partie C

★ On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n\text{e}^{-x^2}.$$

On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\dfrac{n}{2}}$.
   On note α_n, ce maximum.
2. On appelle S_n le point de $(\mathscr{C}_n)$ d'abscisse $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$.
   Montrer que, pour tout n, $(\mathscr{C}_n)$ passe par S_2. Placer S_1, S_2, S_3 sur la figure.

3. Soit la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}\left[-1+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$$

c'est-à-dire $g(x) = \exp\left[-\frac{x}{2}\left(-1+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]$.

a. Étudier le sens de variation de g.

b. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\alpha_n = g(n)$.
En déduire que tout point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2.

Baccalauréat S La Réunion juillet 2000

Exercice 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$(unité : 2 cm). On dit qu'un triangle équilatéral ABC est direct si et seulement si $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$. On pose $\text{j} = \text{e}^{2\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

1. **a.** Vérifier que 1 , j et j^2 sont solutions de l'équation $z^3 = 1$.

   b. Calculer $(1-\text{j})(1+\text{j}+\text{j}^2)$; en déduire que $1+\text{j}+\text{j}^2 = 0$.

   c. Vérifier que $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} + \text{j}^2 = 0$.

2. Dans le plan complexe, on considère trois points A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c.

   a. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

   b. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si : $a + b\text{j} + c\text{j}^2 = 0$.

3. À tout nombre complexe $z \neq 1$, on associe les points R, M et M' d'affixes respectives 1, z et $\overline{z}$.

   a. Pour quelles valeurs de z les points M et M' sont-ils distincts ?

   b. En supposant que la condition précédente est réalisée, montrer que l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que le triangle RMM' soit équilatéral direct est une droite privée d'un point.

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On désigne par Γ la courbe paramétrée, ensemble des points $M(\theta)$ dont les coordonnées $(x(\theta),\ y(\theta)$ sont définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(\theta) & = & 20\text{e}^{-\theta}\cos\theta \\ y(\theta) & = & 20\text{e}^{-\theta}\sin\theta \end{array}\right. \quad \text{où} \quad \theta \in [0\ ;\ +\infty[$$

1. Soient M et M_1, les points de Γ correspondant respectivement aux paramètres θ et $\theta + \pi$.

   a. Démontrer qu'il existe un réel k, indépendant de θ, que l'on déterminera, tel que

   $$\overrightarrow{\text{O}M_1} = k\overrightarrow{\text{O}M}.$$

   b. En déduire une transformation géométrique par laquelle, pour tout réel θ positif, M_1 est l'image de M.

2. On appelle Γ_1 la partie de Γ correspondant à θ élément de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

   a. Montrer que :

   $$x'(\theta) = -20\sqrt{2}\text{e}^{-\theta}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad y'(\theta) = -20\sqrt{2}\text{e}^{-\theta}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

   b. Étudier le sens de variations des fonctions x et y sur $[0\ ;\ \pi]$; rassembler les résultats dans un tableau unique et indiquer les points de Γ, en lesquels la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

3. Tracer Γ_1, ainsi que ses tangentes aux points $M(0)$, $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $M\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $M(\pi)$.
(unité graphique : 1 cm; on prendra la feuille de papier millimétré dans le sens de la longueur avec l'axe des ordonnées à 4 cm du bord gauche).

Exercice 2 (spécialité) 5 points

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a = n^3 - n^2 - 12n \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.
2. On pose $\alpha = 2n+1$ et $\beta = n+3$. On note d le PGCD de α et β.
   a. Établir une relation entre α et β indépendante de n.
   b. Démontrer que d est un diviseur de 5.
   c. Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n-2$ est multiple de 5.
3. Montrer que $2n+1$ et n sont premiers entre eux.
4. **a.** Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b.
   b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Problème 10 points

Le but du problème est l'étude simultanée de deux fonctions f et g (**partie A**), utilisées ensuite pour déterminer une valeur approchée d'un certain nombre réel noté C.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; (unité graphique : 2 cm).

Partie A :

Soient les fonctions f et g définies sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x - \mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = (1-x)\mathrm{e}^x.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ leurs courbes représentatives respectives

1. **a.** Déterminer les limites des fonctions f et g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
   c. Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g, sur l'ensemble des nombres réels.
2. Pour tout réel x, on pose $h(x) = f(x) - g(x)$.
   a. Montrer que, pour tout réel x, $h'(x) = 1 - g(x)$.
   b. En déduire le sens de variations de la fonction h sur l'ensemble des nombres réels.
   c. Démontrer que les courbe $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ admettent un unique point d'intersection, dont l'abscisse notée α, appartient à l'intervalle $[1\,;2]$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
   d. Étudier, suivant les valeurs de x, la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
3. Tracer la droite (Δ) et les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
4. Pour tout réel x, on pose $\theta(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\theta(x)$.

b. En déduire, sous la forme d'une expression rationnelle en α, l'aire en cm^2 du domaine limité sur le graphique par les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. À l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement de S_{20} d'amplitude 10^{-3}.

2. **a.** En utilisant le tableau de variations de la fonction g définie dans la **partie A**, démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$,

$$\mathrm{e}^x \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

b. En déduire que, pour tout nombre entier $k \geqslant 2$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} \leqslant \dfrac{k}{k-1}$, puis que, pour tout nombre entier $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln\left(\dfrac{k}{k-1}\right)$.

c. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, calculer $S_n - S_{n-1}$. En déduire que la suite (S_n) est décroissante.

3. Pour tout entier $n > 20$, on pose $u_n = S_{20} - S_n$.

a. Vérifier que pour tout entier $n > 20$, $u_n \geqslant 0$.

b. En utilisant le tableau de variations de la fonction f définie dans la **partie A**, démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1]$, $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$.

c. En déduire que pour tout nombre entier $k \geqslant 1$, $\dfrac{k+1}{k} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$, puis que, pour tout nombre entier $k \geqslant 1$, $\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

d. Vérifier que, pour tout entier naturel $n > 20$,

$$u_n = \ln\left(\frac{n}{20}\right) - \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

En raisonnant par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel $n > 20$,

$$\ln\left(\frac{n+1}{21}\right) \leqslant \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

e. En déduire que, pour tout entier naturel $n > 20$,

$$u_n = \ln\left(\frac{21}{20}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

puis que, pour tout entier naturel $n > 20$, $u_n \leqslant 0,049$.

4. On admet que la suite (S_n) est convergente de limite notée C.

a. Justifier l'encadrement $S_{20} - 0,049 \leqslant \mathrm{C} \leqslant S_{20}$.

b. Déterminer un encadrement de C d'amplitude 0,05.

∽ Baccalauréat S Liban juin 2000 ∾

Exercice 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes.
Dans les questions **1** et **2** on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.
Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les évènements suivants :
A « Les trois boules sont rouges. »
B « Les trois boules sont de la même couleur. »
C « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »

a. Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

b. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.
Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n+5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :
D « Tirer deux boules rouges. »
E « Tirer deux boules de la même couleur. »

a. Montrer que la probabilité de l'évènement D est

$$p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$

b. Calculer la probabilité de l'évènement E, $p(E)$ en fonction de n. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geqslant \frac{1}{2}$?

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les points A et B d'affixes respectives i et $-$ i.
Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distincte de $-$ i associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1+\text{i}z}{z+\text{i}}.$$

1. Quelle est l'image par l'application f du point O ?

2. Quel est le point qui a pour image par l'application f le point C d'affixe $1+\text{i}$?

3. Montrer que l'équation $\frac{1+\text{i}z}{z+\text{i}} = z$ admet deux solutions que l'on déterminera.

4. Vérifier que $z' = \frac{\text{i}(z-\text{i})}{z+\text{i}}$, en déduire $\text{O}M' = \frac{\text{A}M}{\text{B}M}$ et :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{M\text{B}}, \overrightarrow{M\text{A}}\right) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

5. Montrer que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application f situées sur un même cercle $(\mathscr{C})$ que l'on précisera.

6. Soit M un point du cercle de diamètre [AB] différent de A et de B, montrer que son image M' est située sur l'axe des abscisses.

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

1. Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives $a = 1 + \text{i}$; $b = -4 - \text{i}$. Soit f la transformation du plan $(\mathscr{P})$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{\text{O}M'} = 2\overrightarrow{\text{A}M} + \overrightarrow{\text{B}M}$.
   a. Exprimer z' en fonction de z.
   b. Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leqslant x \leqslant 8$ et $1 \leqslant y \leqslant 8$.
   Les coordonnées $(x' ; y')$ de M' sont alors : $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$.
   a. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y'. Écrire la liste des éléments de G et H.
   b. Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3.
   c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples $(x' ; y')$ de $G \times H$ tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.
   d. Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?
   e. En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est un multiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples $(x' ; y')$ qui conviennent. En déduire les couples $(x ; y)$ correspondant aux couples $(x' ; y')$ trouvés.

Problème **11 points**

★ Partie A - Préliminaires

1. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(t) = \text{e}^t - t - 1.$$
   Quel est le minimum de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$?
2. En déduire les inégalités suivantes :
   a. Pour tout réel t, $\text{e}^t \geqslant t + 1$, $\text{e}^t > t$ et $-t\text{e}^{-t} > -1$.
   b. Pour tout réel t tel que $t > -1$, $\ln(1 + t) \leqslant t$.
3. En déduire que pour tout réel x, $\ln\left(1 - x\text{e}^{-x}\right) < -x\text{e}^{-x}$.

★ Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^2 - 2\ln\left(\text{e}^x - x\right).$$

1. Montrer que $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln\left(1 - x\text{e}^{-x}\right)$. Quelle est la limite de f en $+\infty$? On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{2(x-1)\left(\text{e}^x - x - 1\right)}{\text{e}^x - x}$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   Dans un repère orthonormal (unité : 3 cm), on considère la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation $y = x^2 - 2x$ et $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f. Montrer que $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$ sont asymptotes en $+\infty$. Étudier les positions relatives des courbes $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$.

3. Donner une équation de chacune des tangentes $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ respectivement aux courbes $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisse 0.

4. Tracer dans un même repère les courbes $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$ et leurs tangentes $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

★ Partie C - Étude d'une intégrale

1. Soit n un entier naturel, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   - **a.** Démontrer que la suite u de terme général u_n est croissante.
   - **b.** Calculer u_n à l'aide d'une intégration par parties.
   - **c.** Déterminer la limite de la suite u_n .
2. L'aire du domaine (en unités d'aire) limité par les droites d'équation $x = 0$, $x = n$, la parabole $(\mathscr{P})$ et la courbe $(\mathscr{C})$ est définie par

$$I_n = -2\int_0^n \ln\left(1 - x\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$$

   - **a.** Montrer en utilisant la question 3. des préliminaires que $I_n \geqslant 2u_n$.
   - **b.** On admet que la suite (I_n) a pour limite l . Montrer que : $l \geqslant 2$.

∽ Baccalauréat S Polynésie juin 2000 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 4 cm. Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de -2, associe

$$Z = f(z) = \frac{z-2+\text{i}}{z+2\text{i}}.$$

1. Si $z = x + \text{i}y$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.

   On vérifiera que $\Re(Z) = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$.

   En déduire la nature de :

   a. l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel ;

   b. l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.

   c. Représenter ces deux ensembles.

2. On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - \text{i}$ et $z_B = -2\text{i}$.

   En remarquant que $Z = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$, retrouver les ensembles E et F par une méthode géométrique.

3. Calculer $|f(z) - 1| \times |z + 2\text{i}|$, et en déduire que les points M' d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
4 jetons blancs marqués 0 ;
3 jetons rouges marqués 7 ;
2 jetons blancs marqués 2 ;
1 jeton rouge marqué 5.

1. On tire simultanément 4 jetons du sac.

   Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les évènements suivants :

   A : « Les quatre numéros sont identiques ».

   B : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».

   C : « Tous les jetons sont blancs ».

   D : « Tous les jetons sont de la même couleur ».

   E : « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».

   a. Montrer que la probabilité de l'évènement B, est $\dfrac{4}{105}$.

   b. Calculer la probabilité des évènements A, C, D, E.

   c. On suppose que l'évènement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'évènement B.

   On établit la règle de jeu suivante :

— Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 F.
— Si le joueur peut former le nombre 7 000, il gagne 50 F.
— Si le joueur peut former le nombre 2 000, il gagne 20 F.
— Si le joueur peut former le nombre 0 000, il perd 25 F.
Pour tous les autres tirages, il perd 5 F.

G est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Établir la loi de probabilité de G et calculer l'espérance mathématique de G.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation (1) $ax+by=60$ (a et b entiers naturels donnés tels que $ab \neq 0$). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.
   a. On suppose que l'équation (1) a au moins une solution $(x_0\ ;\ y_0)$. Montrer que d divise 60.
   b. On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution $(x_0\ ;\ y_0)$ à l'équation (1).
2. On considère l'équation : (2) $\quad 24x+36y=60. \quad$ (x et y entiers relatifs).
   a. Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2).
   b. Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation. On appellera S l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ solutions.
   c. Énumérer tous les couples $(x\ ;\ y)$ solutions de (2) et tels que :
   $$-10 \leqslant x \leqslant 10.$$
   Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.
   d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), représenter l'ensemble E des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ telles que :
   $$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1+3t \\ y & = & 1-2t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$
   e. Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions $(x\ ;\ y)$ de l'équation (2) appartiennent à E.
   Comment peut-on caractériser S?

PROBLÈME **10 points**

Partie A

On considère la fonction numérique f, de la variable réelle x, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

On appelle $(\mathcal{C}_f)$ la courbe d'équation $y = f(x)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On prendra 2 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées, et 6 cm pour π unités sur l'axe des abscisses.

1. Montrer que, pour tout réel x, $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et l'existence d'une asymptote pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

2. Montrer que la fonction dérivée de f vérifie :
$f'(x) = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-x}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, pour x élément de $\mathbb{R}$.

3. On étudie la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$.
Recopier et compléter le tableau suivant :

x	$-\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ π
$x+\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$
Signe de $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$	

En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$.

4. Représenter la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ ainsi que les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ d'équations $y = -\mathrm{e}^{-x}$ et $y = \mathrm{e}^{-x}$.

5. Déterminer algébriquement sur $\mathbb{R}$, puis sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$, les coordonnées des points communs à :
   a. $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des abscisses.
   b. $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_1)$.
   c. $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

6. Déterminer un réel α tel que, pour $x \geqslant \alpha$, on ait $|f(x)| \leqslant 10^{-2}$.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. En calculant les dérivées successives de la fonction f jusqu'à l'ordre 4 (on rappelle que $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$), trouver une relation entre la fonction f et sa dérivée d'ordre 4 notée $f^{(4)}$.

2. En déduire qu'on peut choisir $F(x) = -\dfrac{1}{4}f^{(3)}(x)$.

3. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$. Montrer que $I = \dfrac{\mathrm{e}+1}{2}$.

Partie C

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Vérifier que $I_0 = I$ et interpréter I_0 comme l'aire d'un domaine plan. Hachurer ce domaine.

2. Montrer que, pour tout naturel n, $I_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{2}\left(\mathrm{e}^{-\pi}+1\right)$.

3. Prouver que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
Calculer sa raison.

4. Prouver que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2000

Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. Pour tout nombre complexe z, on considère

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261.$$

   a. Soit b un nombre réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(\mathrm{i}b)$. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

   b. Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β, que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = \left(z^2 + 9\right)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right).$$

   c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $f(z) = 0$.

2. Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal.

   a. Placer dans le plan $\mathscr{P}$ les points A, B, C et D ayant respectivement pour affixes : $a = 3\mathrm{i}$, $b = -3\mathrm{i}$, $c = 5 + 2\mathrm{i}$ et $d = 5 - 2\mathrm{i}$.

   b. Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G des points A, B, C, D.

   c. Déterminer l'ensemble E des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| = 10.$$

   Tracer E sur la figure précédente.

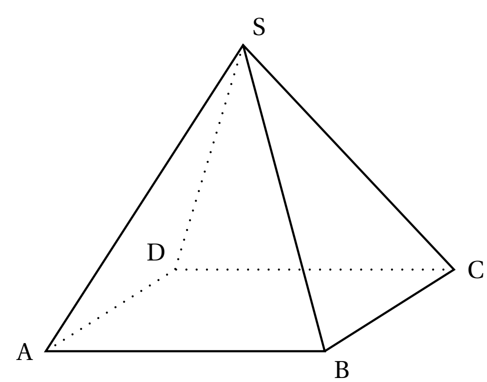
Exercice 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

1. Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ».

a. La fourmi se trouve en A.
Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :

- en A ?
- en B ?
- en C ?
- en D ?

b. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :
S_n l'évènement « la fourmi est au sommet S après n pas », et p_n la probabilité de cet évènement.



Donner p_1.
En remarquant que $\mathrm{S}_{n+1} = \mathrm{S}_{n+1} \cap \overline{\mathrm{S}_n}$, montrer que

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}\left(1 - p_n\right).$$

2. On considère la suite (p_n), définie pour tout nombre entier n strictement positif par : $\left\{\begin{array}{lcl} p_1 & = & \frac{1}{3} \\ p_{n+1} & = & \frac{1}{3}\left(1 - p_n\right) \end{array}\right.$.

a. Montrer par récurrence que, pout tout entier naturel n strictement positif, on a $p_n = \dfrac{1}{4}\left(1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$.

PROBLÈME **12 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

A. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+2\mathrm{e}^x} - \ln\left(1+2\mathrm{e}^x\right).$$

1. Calculer $g'(x)$ et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de g.
4. Donner le signe de $g(x)$.

B. Étude d'une fonction et calcul d'une aire

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\ln\left(1+2\mathrm{e}^x\right).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}g(x)$.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On pourra remarquer que :

   $$\text{si on pose } X = 1+2\mathrm{e}^x,\ f(x) \text{ s'écrit } 4\frac{X}{(X-1)^2}\frac{\ln X}{X}.$$
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer $\mathscr{C}$.
5. Soit α un réel strictement positif.

   a. Vérifier que, pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+2\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x} - 2\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+2}$.

   En déduire la valeur de l'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+2\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

   b. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

   $$J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Donner une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

C. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E})\ :\ y' + 2y = 2\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+2\mathrm{e}^x}.$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie **B)** est solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}') \ : \ y' + 2y = 0.$$

3. Résoudre (E′) et en déduire les solutions de (E).

∽ Baccalauréat S Métropole septembre 2000 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les résultats seront donnés à 10^{-3} *près.*

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.
Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1. On note :
- A_1 l'évènement « la personne est absente lors du premier appel » ;
- R_1 l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».

Quelle est la probabilité de R_1 ?

2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et, alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.

Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

A_2 l'évènement « la personne est absente lors du second appel » ;

R_2 l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel » ;

R l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire ».

Montrer que la probabilité de R est 0,176. (On pourra utiliser un arbre).

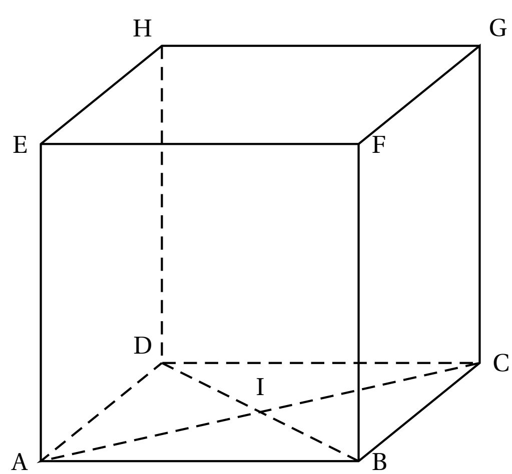
3. Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité pour que la réponse ait eu lieu lors du premier appel ?

4. On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Un enquêteur a une liste de 20 personnes à contacter. Quelle est la probabilité pour qu'une au moins des 20 personnes de la liste accepte de répondre au questionnaire ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire (hors-programme en 2002)

Les questions **1)** et **2)** sont indépendantes.
L'espace est muni d'un repère orthonormal direct.
ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre. Son arête *a* pour longueur 1, le centre de la face ABCD est le point I.
Aucune figure n'est demandée sur la copie.



1. **a.** Déterminer $\overrightarrow{\text{BC}} \wedge \overrightarrow{\text{BA}}$.

   b. En déduire l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points M de l'espace tels que :

$$\left(\overrightarrow{\text{BC}} \wedge \overrightarrow{\text{BA}}\right) \wedge \overrightarrow{\text{B}M} = \overrightarrow{0}.$$

   c. Déterminer l'ensemble $(\mathscr{F})$ des points M de l'espace tels que :

$$\left(\overrightarrow{\text{BC}} \wedge \overrightarrow{\text{BA}}\right) \cdot \overrightarrow{\text{B}M} = 0.$$

2. On appelle P le barycentre du système $\{(\text{A}, 2)\ ;\ (\text{C}, -1)\}$.

   a. Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.

   b. Soit $(\mathscr{G})$ l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|-\overrightarrow{M\text{A}} + 2\overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right\|.$$

   Déterminer l'ensemble $(\mathscr{G})$.
   Montrer que le point A appartient à l'ensemble $(\mathscr{G})$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. L'unité graphique est 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = 1, \quad b = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}, \quad c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}, \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}.$$

1. **a.** Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d.

   b. Représenter les points A, B, C et D.

   c. Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.
2. Montrer que les points D, A et C sont alignés.
3. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C.
4. On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement. Montrer que les points F, C et G sont alignés.
5. Déterminer l'affixe f du point F.
6. On considère la transformation φ qui à tout point M, d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' telle que :

$$Z' = \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}\overline{Z} + \frac{3}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   Pour toute droite δ du plan, on notera σ_δ la symétrie orthogonale d'axe δ.

   a. Soit r la transformation qui à tout point M_1 d'affixe Z_1, associe le point M_1' d'affixe Z_1', telle que :

$$Z_1' = \text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}Z_1 + \frac{3}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Déterminer la nature de r et donner ses éléments caractéristiques.

   b. En utilisant les nombres complexes, donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AO}}, \overrightarrow{\text{AB}}\right)$, puis déterminer la droite Δ telle que :

$$r = \sigma_\Delta \circ \sigma_{(\text{AO})}.$$

c. Montrer que $\varphi = r \circ \sigma_{(AO)}$. En déduire la nature de φ.

PROBLÈME **11 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$.
2. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

   b. En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 + \cos x + \sin x > 0$.

   c. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{1-x}$.

   b. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c. Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
4. **a.** Montrer que, sur l'intervalle $[0 ; \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. Représenter la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0; 4]$.

Partie B

On veut calculer l'aire, $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1. Montrer que : $\mathscr{A} = 2e - 2 + \displaystyle\int_0^1 \cos t e^{1-t}\,dt$.
2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \cos t\, e^{1-t}\,dt$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \sin t\, e^{1-t}\,dt$.

   a. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $I = -\cos 1 + e - J$ et $J = -\sin 1 + 1$.

   b. En déduire la valeur de I.
3. Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ à 10^{-2} près par défaut.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -1 - \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1. **a.** Montrer que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.
2. **a.** Déterminer $\ln\left(f(x)\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

   b. Étudier le sens de variation de la fonction H.

c. Déterminer le tableau de variations de H.

3. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$. (On ne demande pas de représenter Γ).
On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.

a. Étudier la position relative de Γ et de Δ.

b. Déterminer les abscisses des points communs à Γ et Δ.

4. **a.** Établir une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de Γ et T.

5. Montrer que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

∽ Baccalauréat S Polynésie septembre 2000 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k est un entier et $1 \leqslant k \leqslant 6$).
Ce dé a été pipé de telle sorte que :
• les six faces ne sont pas équiprobables,
• les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r,
• les nombres p_1, p_2, p_4 dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que : $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant 6$.

2. On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :
— A : « le nombre obtenu est pair »
— B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 »
— C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».

a. Calculer la probabilité de chacun de ces évènements.

b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

3. On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :
• d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires,
• d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.
Le joueur lance le dé :
• s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1,
• s'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.
On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet évènement.

a. Déterminer la probabilité de l'évènement $G \cap A$, puis la probabilité de l'évènement G.

b. Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

1. a. Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}}$.

b. En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AG}} \cdot \overrightarrow{\text{BD}}$ est nul.

c. Démontrer de même que le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AG}} \cdot \overrightarrow{\text{BE}}$ est nul.

d. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE. Déduire de **1. a.** que le point I est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE), et préciser la position du point I sur le segment [AG].

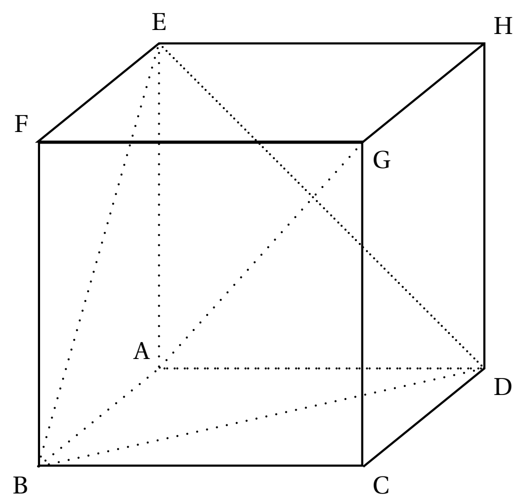
3. Dans cette question, l'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

a. Écrire une équation du plan (BDE).

b. Écrire une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point H et orthogonale au plan (BDE).

c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite Δ avec le plan (BDE).

d. En déduire la distance du point H au plan (BDE).



EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle de sens direct, AEFB et ADGH sont des carrés de sens direct.

1. Le but de cette première question est de démontrer que les droites (AC), (EG) et (FH) sont concourantes. Pour cela on note I le point d'intersection des droites (EG) et (FH) et on introduit :

• l'homothétie h_1 de centre I qui transforme G en E.

• l'homothétie h_2 de centre I qui transforme F en H.

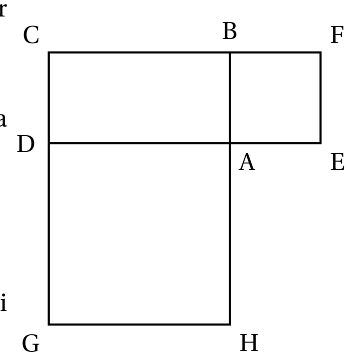
a. Déterminer l'image de la droite (CG) par l'homothétie h_1 puis par la composée $h_2 \circ h_1$.

b. Déterminer l'image de la droite (CF) par la composée $h_1 \circ h_2$.

c. Justifier l'égalité :

$$h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2.$$

En déduire que la droite (AC) passe aussi par le point I.



2. On se propose ici de démontrer que la médiane issue du sommet A du triangle AEH est une hauteur du triangle ABD. On note O le milieu du segment [EH].

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$.

b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BD}$ et conclure.

3. Dans cette question, on étudie la similitude directe S qui transforme A en B et D en A.

On pose AB = 1 et AD = $k \quad (k > 0)$.

a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude S.

b. Déterminer l'image de la droite (BD), puis l'image de la droite (AO), par cette similitude S.

c. En déduire que le point d'intersection Ω des droites (BD) et (AO) est le centre de la similitude S.

PROBLÈME **10 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x + 1 - x\mathrm{e}^{x-1}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

A. Étude de la fonction *f*
et construction de la courbe $(\mathscr{C})$

1. Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$ (on pourra écrire $x\mathrm{e}^{x-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x\mathrm{e}^{x}$).

2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $-\infty$ et préciser la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite Δ.

3. **a.** Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en - ∞.

c. Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de f' pour tout réel x.

d. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4. Soit I l'intervalle $[1{,}9\,;\,2]$. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α.

5. Tracer la droite Δ et la courbe $(\mathscr{C})$ (unité graphique : 2 cm).

B. Recherche d'une approximation de α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par :

$$g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right).$$

1. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction g sur I et démontrer que, pour tout x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.

3. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{9}$.

4. Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n).$$

On déduit de la question **B 2** que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle I. On ne demande pas de le démontrer.

a. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{9}|u_n - \alpha|$.

b. En déduire, en raisonnant par récurrence, que :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}.$$

c. En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

C. Calcul d'aire

1. En intégrant par parties, calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\alpha} x\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x$.

2. a. Déterminer, en unités d'aire, l'aire $\mathscr{A}$ de la portion de plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$.

b. Démontrer qu'on peut écrire $\mathscr{A} = (\alpha - 1)\left(\alpha - \dfrac{1}{\alpha}\right)$.

∽ Baccalauréat série S Nouvelle – Calédonie ∾ décembre 2000

Exercice 1 **5 points**

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :
A(4 ; 0 ; 0), B(2 ; 4 ; 0), C(0 ; 6 ; 0), S(0 ; 0 ; 4), E(6 ; 0 ; 0) et F(0 ; 8 ; 0).

1. Réaliser une figure comportant les points définis dans l'exercice que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que E est le point d'intersection des droites (BC) et (OA).
3. On admettra que F est le point d'intersection des droites (AB) et (OC).
   a. Déterminer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{SE} \wedge \overrightarrow{EF}$. En déduire l'équation cartésienne du plan (SEF).
   b. Calculer les coordonnées du point A′ barycentre des points pondérés (A, 1) et (S, 3).
   c. On considère le plan P parallèle au plan (SEF) et passant par A′. Vérifier qu'une équation cartésienne de P est $4x + 3y + 6z - 22 = 0$.
4. Le plan P coupe les arêtes [SO], [SA], [SB] et [SC] de la pyramide SOABC respectivement aux points O′, A′, B′ et C′.
   a. Déterminer les coordonnées de O′.
   b. Vérifier que C′ a pour coordonnées $\left(0\ ;\ 2\ ;\ \dfrac{8}{3}\right)$.
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (SB), en déduire les coordonnées du point B′.
5. Vérifier que O′A′B′C′ est un parallélogramme.

Exercice 2 **5 points**

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

   $$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

   Préciser le module et un argument de chacune des solutions.

   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

   $$(-\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 3)^2 - 2(-\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 3) + 2 = 0.$$

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives
   $z_A = 1 + \mathrm{i}$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 2z_B$.
   a. Déterminer les formes algébriques de z_B et z_C.
   b. Placer les points A, B et C.
   c. Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle ($\mathscr{C}$) de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$.
   d. Calculer $\dfrac{z_C - 3}{z_A - 3}$; en déduire la nature du triangle IAC.
   e. Le point E est l'image du point O par la translation de vecteur $2\overrightarrow{IC}$. Déterminer l'affixe du point E.

f. Le point D est l'image du point E par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Déterminer l'affixe du point D.

g. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 2 **spécialité**

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$.
S est l'ensemble des couples (x, y) tels que PGCD$(x\,;\ y) = y - x$.

1. **a.** Calculer le PGCD(363 ; 484).
   b. Le couple (363 ; 484) appartient-il à S ?
2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n\,;\ n+1)$ appartient-il à S ?
   Justifier votre réponse.
3. **a.** Montrer que $(x\,;\ y)$ appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$.
   b. En déduire que pour tout couple $(x\,;\ y)$ de S on a :
   PPCM $(x\,;\ y) = k(k+1)(y-x)$.
4. **a.** Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.
   b. En déduire l'ensemble des couples $(x\,;\ y)$ de S tels que
   PPCM $(x\,;\ y) = 228$.

Problème **10 points**

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

et on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. **a.** Déterminer la limite de u en $-\infty$.
   b. Montrer que, pour tout x réel, on a $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.
   En déduire la limite de u en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que $[u(x) + 2x]$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.
   b. Montrer que pour tout x réel, on a $u(x) > 0$. En déduire le signe de $[u(x) + 2x]$.
   c. Interpréter graphiquement ces résultats.
3. **a.** Montrer que la dérivée de la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u'(x) = \frac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

   b. Étudier les variations de la fonction u.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et son asymptote oblique.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x \frac{-1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t.$$

et (Γ) sa courbe représentative.

1. Justifier que pour tout x réel on a $f(x) = \ln u(x)$ en utilisant la question **A 3. a**.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$, puis en $+\infty$ et étudier les variations de f.
3. **a.** Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe (Γ) au point d'abscisse 0.

   b. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) + x$. Montrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi(0) = 0$. En déduire la position de la courbe (Γ) par rapport à la tangente (T).
4. Tracer sur le même graphique la courbe (Γ) et la tangente (T).

Partie C

1. On pose $\alpha = \dfrac{1-\mathrm{e}^2}{2\mathrm{e}}$, montrer que $u(\alpha) = \mathrm{e}$ et en déduire $f(\alpha)$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_\alpha^0 \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\,\mathrm{d}x$.
3. Soit V une primitive de u et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}$.

   a. Montrer que $u\left(\dfrac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}\right) = \mathrm{e}^{-t}$.

   b. Justifier que $V \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est définie par

   $$\left(V\circ g\right)'(t) = \frac{1+\mathrm{e}^{-2t}}{2}.$$

   c. En déduire que $V(0) - V(\alpha) = (V\circ g)(0) - (V\circ g)(-1) = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1+\mathrm{e}^{-2t}}{2}\,\mathrm{d}t$,

   puis que $\displaystyle\int_\alpha^0 u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.
4. On admet que pour tout x réel, $f(x) < u(x)$.
   Déduire des questions précédentes l'aire, en unité d'aires, du domaine limité par les courbes $(\mathscr{C})$, (Γ) et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$.

Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2000

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher.
On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac, puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac.
Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
À chaque tirage de **deux boules**, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$.
On désigne par D le disque de centre O et de rayon 1,7.
Les résultats seront donnés sous forme de **fraction irréductible**.

1. Placer dans le plan muni du repère $(\text{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les points correspondant aux différents résultats possibles.
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A « Le point M est sur l'axe des abscisses » ;
   B « Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ».
3. **a.** Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme $x^2 + y^2$. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Calculer son espérance mathématique E(X).
   b. Montrer que la probabilité de l'évènement « le point M appartient au disque D » est égale à $\dfrac{4}{9}$.
4. On tire 5 fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi 5 points du plan.
   Quelle est la probabilité de l'évènement suivant :
   C : « Au moins un de ces points appartient au disque D » ?
5. On renouvelle n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi n points du plan.
   Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un de ces points appartient à D » soit supérieure ou égale à 0,999 9.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats qui n'ont pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$(unité graphique : 2 cm).

1. **a.** Donner l'écriture algébrique du nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\text{i}z - 2 = 4\text{i} - z$. On donnera la solution sous forme algébrique.
2. On désigne par I, A et B les points d'affixes respectives 1, 2i et 3 + i.
   a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.
   b. Calculer l'affixe z_C du point C image de A par la symétrie de centre I.
   c. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z_\text{C} - z_\text{B}}{z_\text{A} - z_\text{B}}$.
   En déduire le module et un argument de ce nombre. (z_A et z_B désignent les affixes des points A et B).

d. Soit D le point d'affixe z_D tel que $z_D - z_C = z_A - z_B$.
Montrer que ABCD est un carré.

3. Pour tout point M du plan, on considère le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MI}$.

b. Montrer que le point K défini par $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{AB}$ est le milieu du segment [AD].

c. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|2\overrightarrow{AB}\right\|.$$

Construire Γ.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm). On désigne par m un nombre réel. On considère la transformation T_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = (m + i)z + m - 1 - i$$

Partie A

1. Peut-on choisir m de telle sorte que T_m soit une translation ?

2. Déterminer le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.

Partie B

Dans la suite de l'exercice on pose $m = 1$.

1. a. Calculer l'affixe du point Ω invariant par T_m.

b. Pour tout nombre complexe z différent de 1, calculer $\dfrac{z'-1}{z-1}$.

En interprétant géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z'-1}{z-1}$, démontrer que T_1 est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

c. Démontrer que, pour tout nombre z on a : $z' - z = i(z-1)$. En déduire que si M est distinct de Ω , alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M.

2. On définit dans le plan une suite (M_n) de points en posant :

$$M_0 = O,\ M_1 = T_1(M_0),\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul : } M_n = T_1(M_{n-1}).$$

a. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan muni du repère $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = \Omega M_n$. Démontrer que la suite (d_n) est une suite géométrique. Converge-t-elle ?

PROBLÈME **11 points**

Partie A étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.

1. Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.
   On désigne par Δ la droite d'équation $y = x+1$ et par Γ la courbe d'équation $y = \text{e}^x$.
   a. Que représente la droite Δ pour la courbe Γ ?
   b. Tracer dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ la droite Δ et donner l'allure de Γ.
2. **a.** Démontrer que pour tout réel t, $\text{e}^t \geqslant t+1$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b. En déduire que pour tout réel t, $\text{e}^{-t} + t + 1 \geqslant 2$, et que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ on a : $\dfrac{1}{x} + \ln x + 1 \geqslant 2$.

Partie B étude d'une fonction.

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = (x+1)\ln x.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. **a.** Étudier le sens de variations de g en utilisant la **partie A**.
   b. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.
2. **a.** Déterminer une équation de la tangente D à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   b. On appelle h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = g(x) - 2x + 2$.
   étudier le sens de variations de h. On pourra utiliser la question **A 2 b**.
   En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.
   c. étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.
3. Tracer $\mathscr{C}$ et D dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \displaystyle\int_n^{n+1} g(x)\,\text{d}x$.
   a. Donner une interprétation géométrique de U_n.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul on a :

$$g(n) \leqslant U_n \leqslant g(n+1).$$

   c. En déduire le sens de variation de la suite (U_n).
   d. La suite (U_n) est-elle convergente ?

Partie C étude d'une primitive.

G désigne la primitive de g sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en 1.
On a donc : pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $G(x) = \displaystyle\int_1^x g(t)\,\text{d}t$.

1. Quel est le signe de $G(x)$ suivant les valeurs de x ?
2. Calculer $G(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Déterminer les limites de G en 0 et en $+\infty$.
   Pour l'étude en $+\infty$, on pourra mettre x en facteur dans l'expression $G(x)$.
   Pour l'étude en 0, on admettra que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.

∽ Baccalauréat série S Nouvelle-Calédonie ∾ mars 2001

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+9}\right).$$

et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique relative à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les images de 0 et de 4 par f, puis l'antécédent de 0 par f.

  a. Calculer la limite de f en $+\infty$.

  b. Montrer que, pour tout x réel, $\sqrt{x^2+9} + x = \dfrac{9}{\sqrt{x^2+9} - x}$ et en déduire la limite de f en $-\infty$.

2. Montrer que, pour tout réel, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. On considère la fonction g définie, pour tout x réel, par

$$g(x) = \frac{1}{2}\text{e}^{x} - \frac{9}{2}\text{e}^{-x}$$

et $(\mathscr{C}')$ sa représentation graphique dans le même repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

  a. Démontrer que, pour tout x réel, $(g \circ f)(x) = x$.
  On admettra de même que, pour tout x réel, $(f \circ g)(x) = x$.

  b. En déduire que le point $M(x\,;\,y)$ appartient à $(\mathscr{C})$ si, et seulement si, le point $M'(y\,;\,x)$ appartient à $(\mathscr{C}')$.

  c. Démontrer que la fonction g est négative sur $[0\,;\,\ln 3]$.

4. Soit D_1 et D_2 les domaines définis par :

$$D_1 = \left\{ M(x\,;\,y) \left| \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant \ln 3 \\ g(x) \leqslant y \leqslant 0 \end{array} \right. \right\} \quad ; \quad D_2 = \left\{ M(x\,;\,y) \left| \begin{array}{l} -4 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{array} \right. \right\}.$$

Les domaines D_1 et D_2 ont la même aire, calculer cette valeur commune en unités d'aire.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points A $(1\,;2\,;2)$, B $(3\,;2\,;1)$ et C $(1\,;3\,;3)$.

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan. Donner une équation de ce plan.

2. On considère les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives :
$(\text{P}_1) : x - 2y + 2z - 1 = 0$; $(\text{P}_2) : x - 3y + 2z + 2 = 0$.

  a. Montrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants. On notera (Δ) leur droite d'intersection.

  b. Montrer que le point C appartient à la droite (Δ).

c. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{u}(2\ ;\ 0\ ;\ -1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

d. En déduire une représentation paramétrique de la droite (Δ).

3. Pour déterminer la distance du point A à la droite (Δ) de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2k+1 \\ y &=& 3 \\ z &=& -k+3 \end{array}\right. \qquad (k \in \mathbb{R}),$$

on considère le point M de paramètre k de la droite (Δ).

a. Déterminer la valeur de k pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient orthogonaux.

b. En déduire la distance du point A à la droite (Δ).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice, x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$.
S est l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ tels que P.G.C.D. $(x\ ;\ y) = y - x$.

1. a. Calculer le P.G.C.D. (363 ; 484).

b. Le couple (363 ; 484) appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n\ ;\ n+1)$ appartient-il à S ? Justifier votre réponse.

3. a. Montrer que $(x\ ;\ y)$ appartient à S si, et seulement si, il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$.

b. En déduire que, pour tout couple $(x\ ;\ y)$ de S, on a :
P.P. C.M. $(x\ ;\ y) = k(k+1)(y-x)$.

4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b. En déduire l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ de S tels que P.P.C.M. $(x\ ;\ y) = 228$.

PROBLÈME **10 points**

Il est possible que certains des résultats, à démontrer dans ce problème, ne soient pas lisibles sur l'écran de votre calculatrice graphique.

Partie A

⋆ Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{10(x-8)}{x(x-1)}$$

et on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative relative à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Déterminer les limites de f quand x tend vers 1 par valeurs inférieures et quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

c. En déduire les asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$.

2. a. Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

b. Montrer que $f'(x)$ s'annule pour $\alpha = 8 + 2\sqrt{14}$ et pour $\beta = 8 - 2\sqrt{14}$.

c. Dresser le tableau de variation de f

3. Soit I le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

a. Déterminer une équation de la droite (Δ) tangente en I à la courbe $(\mathscr{C})$.

b. Montrer que le point L, intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec son asymptote horizontale, appartient à la droite (Δ).

c. Représenter la partie de la courbe $(\mathscr{C})$ pour les valeurs de x strictement supérieures à 1 (unités graphiques : 1 cm en abscisse et 3 cm en ordonnée).

4. a. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x élément de l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, on ait $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$.

b. Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 8.
Calculer, en unités d'aire, en fonction de λ, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 8$ et $x = \lambda$.

c. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Partie B

⋆ **Probabilités**

Une urne contient n boules $(n > 8)$ dont 3 jaunes et 5 vertes.
Les autres boules sont rouges.
I. Étude d'un cas particulier : $n = 16$. Il y a donc 8 boules rouges.

1. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur, on la remet, puis on effectue un nouveau tirage d'une boule.
Déterminer la probabilité des évènements suivants :
— A : « On obtient deux boules rouges »,
— B : « On obtient une boule rouge puis une boule verte ou une boule verte puis une boule rouge »,
— C : « On obtient une boule rouge puis une boule jaune ou une boule jaune puis une boule rouge »,
— D : « On obtient au moins une boule rouge ».

2. On effectue maintenant un *tirage simultané de deux boules* de l'urne.
Déterminer la probabilité des évènements :
— A' « On obtient deux boules rouges »,
— B' « On obtient une boule rouge et une boule verte ».

II. n quelconque $(n > 8)$ Il y a donc $(n-8)$ boules rouges.

1. Comme dans le cas particulier précédent, on tire une boule de l'urne, on note sa couleur, on la remet, puis on effectue un nouveau tirage d'une boule. Déterminer en fonction de n la probabilité de l'évènement :
« Obtenir une boule rouge puis une boule verte, ou une boule verte puis une boule rouge ».

2. On revient au **tirage simultané de deux boules :**

a. Déterminer en fonction de n la probabilité de l'évènement :
« Obtenir deux boules rouges ».

b. Calculer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement :
« Obtenir une boule rouge et une boule verte ».

c. En utilisant les variations de la fonction f étudiée dans la partie **A**, indiquer les valeurs de n qui rendent p_n maximum, puis indiquer la valeur de ce maximum.