Baccalauréat S 2002

L'intégrale d'avril 2002 à mars 2003

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

∽ Baccalauréat S Pondichéry avril 2002 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique 2 cm. On désigne par A le point d'affixe $z_{\text{A}} = 1$, et par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre A et de rayon 1.

Partie A

Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $z_{\text{B}} = 1 + \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et E le point d'affixe $\left(1 + z_{\text{B}}^2\right)$.

1. **a.** Montrer que le point B appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

   b. Déterminer une mesure en radians de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{\text{AF}} ; \overrightarrow{\text{AB}}\right)$. Placer le point B.
2. **a.** Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $(z_{\text{B}} - z_{\text{A}})$ et $(z_{\text{E}} - z_{\text{A}})$.

   b. En déduire que les points A , B et E sont alignés.
3. Placer le point E.

Partie B

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' où $z' = 1 + z^2$.

1. Pour $z \neq 0$ et $z \neq 1$, donner, à l'aide des points A, M et M', une interprétation géométrique d'un argument du nombre complexe $\dfrac{z'-1}{z-1}$.
2. En déduire que A, M et M' sont alignés si et seulement si $\dfrac{z^2}{z-1}$ est un réel.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

Partie A

Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes.
On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne .

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
2. On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

   a. Montrer que $p(n) = \dfrac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$

   b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n)$. Interpréter ce résultat.

Partie B

Pour les questions suivantes $n = 4$.

1. Calculer $p(4)$.
2. Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

   Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois. Il mise au départ la somme de 30 euros.

   Pour chaque tirage :

— si les deux boules sont de même couleur, il reçoit alors 40 euros,
— si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5 euros.

On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme reçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif).

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance de X.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Calculer le P.G.C.D. de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.

Soit u la suite numérique définie par :
$u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

2. Calculer les termes $u_2,\ u_3$ et u_4 de la suite u.

3. **a.** Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de u_n et u_{n+1}.

4. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$.

a. Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. Déterminer, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

PROBLÈME — 11 points

La partie **B** peut être traitée indépendamment de la partie **A**.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; unité graphique : 2 cm. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{nx}\left(1 + \mathrm{e}^x\right)}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse seulement aux fonctions f_0 et f_1 correspondant respectivement à $n = 0$ et $n = 1$.

On considère d'abord la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$.

1. **a.** Déterminer la limite de $f_0(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

b. Déterminer la limite de $f_0(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. En déduire les asymptotes de $\mathscr{C}_0$.

2. Montrer que le point K $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_0$
3. Étudier les variations de f_0.
4. **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_0$ au point K.
   b. Justifier que, pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}_0$, il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $g(x)$, où $g(x) = 2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 2 - x$.
   c. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
   d. Déterminer, en les justifiant, les signes de $g''(x)$, $g'(x)$ et $g(x)$ suivant les valeurs de x.
   e. En déduire la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}_0$.
5. Tracer $\mathcal{C}_0$ et T dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
6. **a.** Montrer que pour tout réel x, les points $M(x\,;\,f_0(x))$ et $M'\left(x\,;\,f_1(x)\right)$ sont symétriques par rapport à la droite (d) d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
   b. Comment obtient-on $\mathcal{C}_1$ à partir de $\mathcal{C}_0$? Tracer $\mathcal{C}_1$.

Partie B

Étude de la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $u_0 = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.
2. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_1.
3. Montrer que la suite u est positive.
4. On pose $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$,
   a. Montrer que, pour tout x réel, $k(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{nx}\left(1+\mathrm{e}^x\right)}$.
   b. Etudier le signe de $k(x)$ pour $x \in [0\,;\,1]$.
   c. En déduire que la suite u est décroissante.
5. **a.** Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$u_{n-1} + u_n = \frac{1-\mathrm{e}^{-(n-1)}}{n-1}.$$

   b. Calculer u_2.
6. Soit v la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 2 par :

$$v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}.$$

   a. Calculer la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.
   b. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

   c. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Baccalauréat S Amérique du Nord juin 2002

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice comporte deux parties qui peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie I

1. Dans un questionnaire à choix multiple (Q. C. M.), pour une question donnée, 3 réponses sont proposées dont une seule est exacte.

   Un candidat décide de répondre au hasard à cette question.

   La réponse exacte rapporte n point(s) et une réponse fausse fait perdre p point(s).

   Soit N la variable aléatoire qui associe, à la réponse donnée par le candidat, la note algébrique qui lui sera attribuée pour cette question.

   a. Donner la loi de probabilité de N.

   b. Quelle relation doit exister entre n et p pour que l'espérance mathématique de N soit nulle ?

2. À un concours un candidat doit répondre à un Q. C. M. de 4 questions comportant chacune trois propositions de réponse dont une seule est exacte. On suppose qu'il répond à chaque question, au hasard. Calculer la probabilité qu'il réponde correctement à 3 questions exactement (donner cette probabilité sous forme de fraction irréductible puis sa valeur arrondie au centième).

Partie II

Répondre au Q. C. M. proposé sur la feuille annexe (à rendre avec la copie).

Document à rendre avec la copie

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Il est seulement demandé d'entourer la réponse choisie pour chacune des quatre questions.

L'absence de réponse à une question ne sera pas pénalisée.

a. On dispose de dix jetons numérotés de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour former un « paquet ». Combien de « paquets » contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi former ?

Réponse 1 : 180	Réponse 2 : 330	Réponse 3 : 110

b. A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé tels que :

$$p(\text{A}) = 0,4 \quad p(\text{B}) = 0,5 \quad p(\overline{\text{A} \cup \text{B}}) = 0,35.$$

Combien vaut $p(\text{A} \cap \text{B})$?

Réponse 1 : $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,1$	Réponse 2 : $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,25$	Réponse 3 : Les données sont insuffisantes pour répondre.

c. A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé tels que $p(\text{B} \cap \text{A}) = \dfrac{1}{6}$, $p_{\text{A}}(\text{B}) = 0,25$ (probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé). Combien vaut $p(\text{A})$?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
$p(\text{A}) = \dfrac{2}{3}$	$p(\text{A}) = \dfrac{1}{24}$	$p(\text{A}) = \dfrac{1}{12}$

d. Une variable aléatoire X a pour loi de probabilité :

x_i	1	2	4
p_i	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$

Combien vaut l'écart type de X ?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
$\sigma = \dfrac{3}{2}$	$\sigma = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$	$\sigma = 2$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère l'application F du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1 + \text{i})z + 2.$$

1. Soit A le point d'affixe $-2 + 2\text{i}$.
Déterminer les affixes des points A′ et B vérifiant respectivement $\text{A}' = F(\text{A})$ et $F(\text{B}) = \text{A}$.

2. Méthode de construction de l'image de M.

a. Montrer qu'il existe un point confondu avec son image. On notera Ω ce point et ω son affixe.

b. Établir que pour tout complexe z distinct de ω, $\dfrac{z' - z}{\omega - z} = -\text{i}$.
Soit M un point distinct de Ω.
Comparer MM' et $M\Omega$ et déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$.
En déduire une méthode de construction de M' à partir de M.

3. Étude de l'image d'un ensemble de points.

a. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ, des points du plan dont l'affixe z vérifie $|z + 2 - 2\text{i}| = \sqrt{2}$.
Vérifier que B est un point de Γ.

b. Démontrer que, pour tout z élément de $\mathbb{C}$

$$z' + 2 = (1 + \text{i})(z + 2 - 2\text{i}).$$

Démontrer que l'image par F de tout point de Γ appartient au cercle Γ‘ de centre A′ et de rayon 2.
Placer O, A, B, A′, Γ et Γ' sur une même figure.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque.
Exemples d'éléments de (E) : 2 002 ; 3 773 ; 9 119. Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1. **a.** Décomposer 1 001 en produit de facteurs premiers.
   b. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.
2. **a.** Quel est le nombre d'éléments de (E) ?
   b. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?
3. Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme $\overline{abba}$.
   a. Montrer que : « n est divisible par 3 » équivaut à « $a+b$ est divisible par 3 ».
   b. Montrer que : « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ».
4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

Partie B : Étude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile.
On admet que pour tout élément n de (F), il existe des entiers naturels p et q tels que :

$$n = 2000 + 4p \quad \text{et} \quad n = 2002 + 11q.$$

1. On considère l'équation (e) : $4p - 11q = 2$ où p et q sont des entiers relatifs.
   Vérifier que le couple (6, 2) est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).
2. En déduire que tout entier n de (F) peut s'écrire sous la forme $2\,024 + 44\,k$ où k est un entier relatif.
3. À l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).
   N. B. : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 :
   2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.

PROBLÈME **10 points**
Commun à tous les candidats

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \ln(\mathrm{e}^x + kx) - x.$$

Soit $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).
Étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.
On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

1. Étudier le sens de variation de g.
2. En déduire que pour tout réel a positif ou nul $\ln(1+a) \leqslant a$.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f_1(x) = \ln(\mathrm{e}^x + x) - x$.

1. Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,
   $f_1(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B : Étude et propriétés des fonctions f_k.

1. Calculer $f_k(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$
$f_k(x) = \ln\left(1 + k\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_k, en $+\infty$.
3. **a.** Dresser le tableau de variation de f_k.

   b. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, on a $f_k(x) \leqslant \dfrac{k}{\mathrm{e}}$.
4. Déterminer une équation de la tangente T_k à $\mathscr{C}_k$ au point O.
5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$.
Étudier la position relative de $\mathscr{C}_p$ et $\mathscr{C}_m$.
6. Tracer les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.

Partie C : Majoration d'une intégrale.

Soit λ un réel strictement positif, on note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_k$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.

1. Sans calculer $\mathscr{A}(\lambda)$, montrer que $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant k\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
3. On admet que $\mathscr{A}(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda) \leqslant k$.
Interpréter graphiquement ce résultat

∽ Baccalauréat S Antilles–Guyane juin 2002 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20 % des chaudières sont sous garantie.
Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\dfrac{1}{100}$.
Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\dfrac{1}{10}$.
On appelle G l'évènement suivant : « la chaudière est sous garantie ».

1. Calculer la probabilité des évènement suivants :
   A : « la chaudière est garantie et est défectueuse » ;
   B : « la chaudière est défectueuse ».
2. Dans un logement la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de $\dfrac{1}{41}$.
3. Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse. On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.
4. Au cours de la période de contrôle, on a trouvé 5 chaudières défectueuses. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles soit sous garantie ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, (unité graphique 2 cm).
On considère les points I et A d'affixe respectives 1 et -2. Le point K est le milieu du segment [IA].
On appelle $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [IA]. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

1. Soit B le point d'affixe $b = \dfrac{1+4\text{i}}{1-2\text{i}}$. Écrire b sous forme algébrique et montrer que B appartient au cercle $(\mathscr{C})$.
2. Soit D le point du cercle $(\mathscr{C})$ tel que l'angle $\left(\overrightarrow{\text{KI}}, \overrightarrow{\text{KD}}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ où k est un entier relatif et soit d l'affixe de D.
   a. Quel est le module de $d + \dfrac{1}{2}$? Donner un argument de $d + \dfrac{1}{2}$.
   b. En déduire que $d = \dfrac{1}{4} + 3\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
   c. Déterminer un réel a vérifiant l'égalité $\dfrac{1+2\text{i}a}{1-\text{i}a} = \dfrac{1}{4} + 3\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
3. Soit x un réel non nul et M le point d'affixe $m = \dfrac{1+2\text{i}x}{1-\text{i}x}$. On pose $Z = \dfrac{(m-1)}{(m+2)}$.
   Calculer Z et en déduire la nature du triangle AIM.

4. Soit N un point, différent de A du cercle ($\mathscr{C}$) et n son affixe.
Démontrer qu'il existe un réel y tel que $n = \dfrac{1+2\mathrm{i}y}{1-\mathrm{i}y}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$ (unité graphique 4 cm)

1. On considère les points A, B , C , D et E d'affixes respectives :

$$Z_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}},\ Z_{\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}},\ Z_{\mathrm{C}} = -1,\ Z_{\mathrm{D}} = -\mathrm{i} \text{ et } Z_{\mathrm{E}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

   a. Faire la figure

   b. Montrer que EA = ED et que EB = EC.
   Montrer que (OE) est la médiatrice du segment [AD] et du segment [BC]

   c. Déterminer les points K et L images respectives de A et de B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$. Placer les points K et L sur la figure.

2. On considère l'application F qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe $Z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{Z}$, où $\overline{Z}$ désigne le conjugué de Z.

   a. Justifier l'égalité $F = R \circ S$ où S est la réflexion ou symétrie axiale d'axe (OI) et R une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

   b. Montrer que F est une réflexion dont on précisera l'axe.

3. Soit G l'application qui, à tout point M d'affixe Z associe le point M'' dont l'affixe Z'' définie par la formule $Z'' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{Z} + 1$.
Déterminer une application T telle que $G = T \circ F$. En déduire que G est un antidéplacement.

PROBLÈME **11 points**

Pour tout entier naturel n, on considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{(1-n)x}}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Partie A - Étude de f_0 et de f_1

On appelle f_0 la fonction définie par $f_0(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
On appelle $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ les courbes représentatives respectivement de f_0 et de f_1 dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 5 cm).

1. Déterminer la limite de f_0 en $-\infty$ puis en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f_0 et étudier son sens de variation.
3. Montrer que le point $\mathrm{I}\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_0$.
4. Déterminer une équation de la tangente en I à $\mathscr{C}_0$.
5. Montrer que pour tout réel x, $f_1(-x) = f_0(x)$.
6. Par quelle transformation simple $\mathscr{C}_1$ est-elle l'image de $\mathscr{C}_0$? Construire $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

Partie B Calcul d'une aire

1. Montrer que pour tout réel x, $f_0(x) + f_1(x) = 1$.
2. Soit a un réel positif ou nul. Calculer $\displaystyle\int_0^a f_0(x)\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int_0^a f_1(x)\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire l'aire $\mathcal{A}(a)$ de la partie du plan définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & \leqslant x \leqslant & a \\ f_1(x) & \leqslant y \leqslant & 1 \end{array}\right.$$

4. Déterminer la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

Partie C Étude d'une suite

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que pour tout entier n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{\mathrm{e}^n - 1}{\mathrm{e}^n}$.
3. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $u_{n+1} + u_n$.
4. Montrer que pour tout réel x de $[0\,;1]$

$$\frac{\mathrm{e}^{(1-n)x}}{1+\mathrm{e}^x} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x}.$$

5. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) puis la limite de (u_n).

Baccalauréat S Asie juin 2002

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'évènement « Amélie est arrêtée par le n^{e} feu rouge ou orange » et $\overline{E_n}$, l'évènement contraire. Le feu orange est considéré comme un feu rouge.

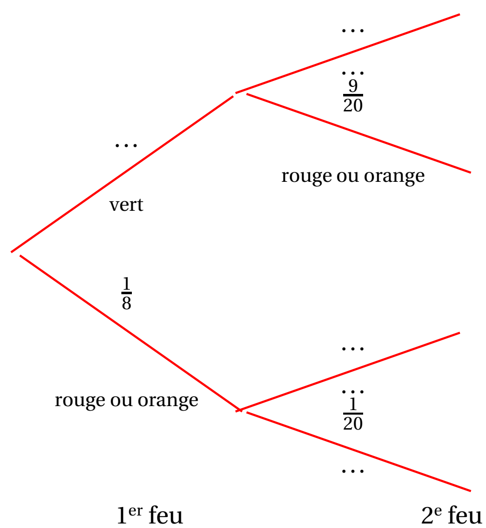
Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E_n}$. La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\dfrac{1}{8}$.

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

• la probabilité que le $(n+1)^{\text{e}}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le n^{e} feu est rouge ou orange, vaut $\dfrac{1}{20}$.

• la probabilité que le $(n+1)^{\text{e}}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le n^{e} feu est vert, est égale à $\dfrac{9}{20}$.

1. On s'intéresse, tout d'abord, aux deux premiers feux tricolores.
   a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   b. On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X.
2. On se place maintenant dans le cas général.
   a. Donner les probabilités conditionnelles $p_{\text{E}_n}(E_{n+1})$ et $p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$.
   b. En remarquant que $E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup \left(E_{n+1} \cap \overline{E_n}\right)$, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,
   $$p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}q_n.$$
   c. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.
3. Soit la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = 28p_n - 9$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.

b. Exprimer u_n, puis p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite, si elle existe, de p_n, quand n tend vers $+\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

1. Dans le plan complexe $(\mathscr{P})$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives 3, 4i, $-2+3\text{i}$ et $1-\text{i}$.

a. Placer les points A, B, C et D dans le plan.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.

2. On considère dans l'ensemble des complexes les équations :

$$z^2-(1+3\text{i})z-6+9\text{i}=0 \quad (1) \quad \text{et} \quad z^2-(1+3\text{i})z+4+4\text{i}=0 \quad (2)$$

a. Montrer que l'équation (1) admet une solution réelle z_1, et l'équation (2) une solution imaginaire pure z_2.

b. Développer $(z-3)(z+2-3\text{i})$, puis $(z-4\text{i})(z-1+\text{i})$.

c. En déduire les solutions de l'équation :

$$\left(z^2-(1+3\text{i})z-6+9\text{i}\right)\left(z^2-(1+3\text{i})z+4+4\text{i}\right)=0.$$

d. Soit z_0 la solution dont la partie imaginaire est strictement négative. Donner la forme trigonométrique de z_0.

e. Déterminer les entiers naturels n tels que les points M_n d'affixes z_0^n soient sur la droite d'équation $y=x$.

3. On appelle f l'application qui au point M, d'affixe z, associe le point M', d'affixe z' telle que :

$$z'=z^2-(1+3\text{i})z-6+9\text{i}.$$

a. On pose $z=x+\text{i}y$ et $z'=x'+\text{i}y'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b. Déterminer une équation de l'ensemble (H) des points M pour lesquels $f(M)$ appartient à l'axe des ordonnées.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On considère les suites (x_n) et $\left(y_n\right)$ définies par $x_0=1$, $y_0=8$ et

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \frac{7}{3}x_n+\frac{1}{3}y_n+1 \\ y_{n+1} & = & \frac{20}{3}x_n+\frac{8}{3}y_n+5 \end{array}\right., \quad n\in\mathbb{N}$$

1. Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x-y+3=0$. En déduire que $x_{n+1}=4x_n+2$.

2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.

3. Montrer que :
   a. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.
   b. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.
4. a. Montrer, par récurrence, que $x_n = \dfrac{1}{3}\left(4^n \times 5 - 2\right)$.
   b. En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel n.

PROBLÈME **10 points**

Partie 1

On définit la fonction u sur $\mathbb{R}^*$ par

$$u(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln|x|.$$

1. Étudier les variations de la fonction u sur $\mathbb{R}^*$. Préciser la valeur de l'extremum relatif de u.
2. Étudier les limites de u en 0, et en $+\infty$.
3. On considère l'équation $u(x) = 0$.
   a. Montrer qu'elle n'admet qu'une seule solution sur $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ et en déduire qu'elle est la seule sur $\mathbb{R}^*$; cette solution sera notée α.
   b. Donner un encadrement de α par deux nombres rationnels de la forme $\dfrac{n}{10}$ et $\dfrac{n+1}{10}$, avec n entier.
4. En déduire le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

Partie 2

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les limites de f en 0, en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Pour tout x réel, déterminer le nombre dérivé $f'(x)$.
3. En utilisant les résultats déjà établis, donner les variations de la fonction f et le tableau de variations de f.
4. a. Démontrer que $f(\alpha) = 3\alpha - \dfrac{1}{2\alpha^2}$.
   b. En utilisant l'encadrement de α trouvé à la **partie 1 3**, prouver que $1,6 < f(\alpha) < 2,1$.
   La construction de $\mathscr{C}$ n'est pas demandée.

Partie 3

Soit M le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et M' le point de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, où M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.

1. Déterminer x' et y' en fonction de x et y.
2. a. Démontrer qu'une équation de la courbe Γ à laquelle appartient M' lorsque M décrit la courbe $\mathscr{C}$ est la suivante : $y = -2x - \dfrac{\ln|x|}{x^2}$.

b. Étudier la position relative des courbes Γ et $\mathscr{C}$.

Partie 4

On considère un réel m supérieur ou égal à 1.

1. On note $A(m)$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^m \left[2x - f(x)\right]\,\mathrm{d}x$. Calculer $A(m)$. (On utilisera une intégration par parties.)
2. Déterminer, si elle existe, la limite de $A(m)$ quand m tend vers $+\infty$.

Baccalauréat S Centres étrangers juin 2002

Calculatrice autorisée

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{l c l} u_{n+1} &=& \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n)\\ v_{n+1} &=& \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n)\end{array}\right.$$

1. On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
   a. Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.
   b. Déterminer la limite de la suite w.
2. a. Montrer que la suite u est croissante.
   b. Montrer que la suite v est décroissante.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.
3. On admet que les suites u et v convergent. Montrer qu'elles ont alors même limite que l'on appellera ℓ.
4. On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par : $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   a. Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante.
   b. Déterminer alors la valeur de ℓ.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = \dfrac{\text{i}}{2}$.

$\mathscr{T}$ est l'application qui, à tout point M, d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$2zz' = \text{i}(z + z').$$

1. On appelle I et J les points d'affixes respectives : $z_{\text{I}} = 1$, $z_{\text{J}} = \text{i}$. Soit K le milieu du segment [IJ].
   a. Déterminer l'affixe z_{K} de K.
   b. Déterminer les affixes des images des points I, J, K par l'application $\mathscr{T}$.
   c. En déduire que $\mathscr{T}$ ne conserve pas les milieux.
2. Déterminer les points invariants par $\mathscr{T}$.
3. Montrer que $M' = \mathscr{T}(M)$ si et seulement si $\left(z' - \dfrac{\text{i}}{2}\right)\left(z - \dfrac{\text{i}}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$.
4. En déduire l'image par $\mathscr{T}$ du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1.

Exercice 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$\mathbf{E} : x^2 + y^2 = p^2$$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation **E** est sans solution.
   On suppose désormais $p \neq 2$ et que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation **E**.
2. Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux.
   a. Montrer que x et y sont de parités différentes.
   b. Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p.
   c. En déduire que x et y sont premiers entre eux.
3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire : $p = u^2 + v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.
   a. Vérifier qu'alors le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right|\ ;\ 2uv\right)$ est solution de l'équation **E**.
   b. Donner une solution de l'équation **E**, lorsque $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.
4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation **E** est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.
   a. $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?
   b. Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

PROBLÈME **11 points**

Pour chaque entier naturel n, on définit, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction notée f_n par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} + n \ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A : Étude du cas particulier $n = 0$

f_0 est donc la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f_0(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

1. Construire dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction exponentielle, puis tracer sa tangente au point d'abscisse 0.
2. Résolution graphique d'une inéquation :
   a. Justifier graphiquement l'inégalité suivante :
   $$\text{pour tout réel } u,\ \mathrm{e}^u \geqslant u + 1.$$
   b. En déduire que pour tout réel x,
   $$\mathrm{e}^{-x} + x - 1 \geqslant 0, \text{ puis que, } 1 + (x-1)\mathrm{e}^x \geqslant 0.$$
3. Limites :
   a. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de f_0 en 0.
4. Sens de variations :
   a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ on a $f_0'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)+1}{x^2}$.
   b. En déduire le sens de variation de f_0.
5. On appelle $\mathscr{C}_0$ la courbe représentative de f_0 dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ pour lequel l'unité graphique est 2 cm.
   Tracer $\mathscr{C}_0$ dans ce repère et placer le point A de coordonnées $(0 ; 1)$.

Partie B : Étude de la famille de fonctions f_n pour $n \geqslant 1$
On appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ précédent.

1. Déterminer le sens de variation de f_n sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en 0.
   En déduire que $\mathscr{C}_n$ possède une asymptote qu'on précisera.
3. Étudier les positions respectives des courbes $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_n$.
4. Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.
5. **a.** Montrer qu'il existe un unique réel α_1, appartenant à l'intervalle $[0,2~;~0,9]$ tel que $f_1(\alpha_1) = 0$.
   b. Montrer que $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout entier naturel $n > 1$.
   c. Pour tout entier naturel $n > 1$, montrer qu'il existe un unique réel α_n appartenant à l'intervalle $[\alpha_1~;~1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
6. **a.** En utilisant la **partie A** montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0~;~1]$,
   $$\frac{\text{e}^x - 1}{x} \leqslant \text{e} - 1.$$
   b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, $\ln(\alpha_n) \geqslant \dfrac{1-\text{e}}{n}$, puis que, $\alpha_n \geqslant \text{e}^{\frac{1-\text{e}}{n}}$.
   c. Déterminer la limite de la suite (α_n).
7. Construire sur le graphique précédent, les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$.

Partie C : Étude d'une suite d'intégrales
Pour tout entier naturel n, on appelle I_n l'intégrale

$$I_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x)\,\text{d}x.$$

1. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.
2. Étudier le sens de variation de la suite (I_n).
3. Démontrer que l'aire comprise entre les courbes $\mathscr{C}_{n+1}$, et $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \dfrac{3}{2}$ est constante.

Baccalauréat S Métropole juin 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.
   On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.
   Soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées respectives $(a\,;\,-5\,;\,1-a)$ et $(1+b\,;\,1\,;\,b)$.
   Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à $\dfrac{1}{4}$.
2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.
   Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.
   Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.
   Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.
   Pour tout entier n, on désigne par :
   A_n l'évènement : « A gagne la n-ième partie »,
   B_n l'évènement : « B gagne la n-ième partie »,
   C_n l'évènement : « le jeu continue après la n-ième partie »
   a. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.
   b. Exprimer $p(C_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et montrer que $p(C_n) = \left(\dfrac{5}{8}\right)^n$.
   Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et en déduire que $p(\text{A}_n) = \dfrac{3}{16}\left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}$.
3. **a.** Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
   b. Déterminer le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$[unité graphique : 2 cm].

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
   On pose $a = \sqrt{3} + \text{i}$ et $b = \sqrt{3} - \text{i}$. Écrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b.
2. **a.** Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r. Écrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.
   b. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{3}{2}$. Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h. Placer B' sur la figure précédente.
3. Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle $\text{O}A'B'$ et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C.

a. Justifier les égalités suivantes :

$$c\overline{c} = R^2 \qquad (c-2\mathrm{i})\left(\overline{c}+2\mathrm{i}\right) = R^2 \qquad \left(c+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\left(\overline{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right) = R^2.$$

b. En déduire que $c-\overline{c} = 2\mathrm{i}$ puis, que $c+\overline{c} = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

c. En déduire l'affixe du point C et la valeur de R.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation

$$(\mathrm{E})\ :\ 6x+7y = 57$$

où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u,\ v)$ tel que $6u+7v = 1$; en déduire une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ de l'équation (E).

b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
On considère le plan (P) d'équation : $6x+7y+8z = 57$.
On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan P dont les coordonnées $x,\ y$ et z sont des entiers naturels.

a. Montrer que l'entier y est impair.

b. On pose $y = 2p+1$ où p est un entier naturel.
Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p+z$ par 3 est égal à 1.

c. On pose $p+z = 3q+1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels $x,\ p$ et q vérifient la relation : $x+p+4q = 7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d. En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats

Partie A
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[(x+(1-x)\mathrm{e}^{2x}\right].$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, (unité graphique 2 cm)

1. **a.** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + (1 - 2x)\mathrm{e}^{2x}$.
   a. Étudier le sens de variation de u.
   Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0 ; 1]$.
   Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.
   b. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

Partie B

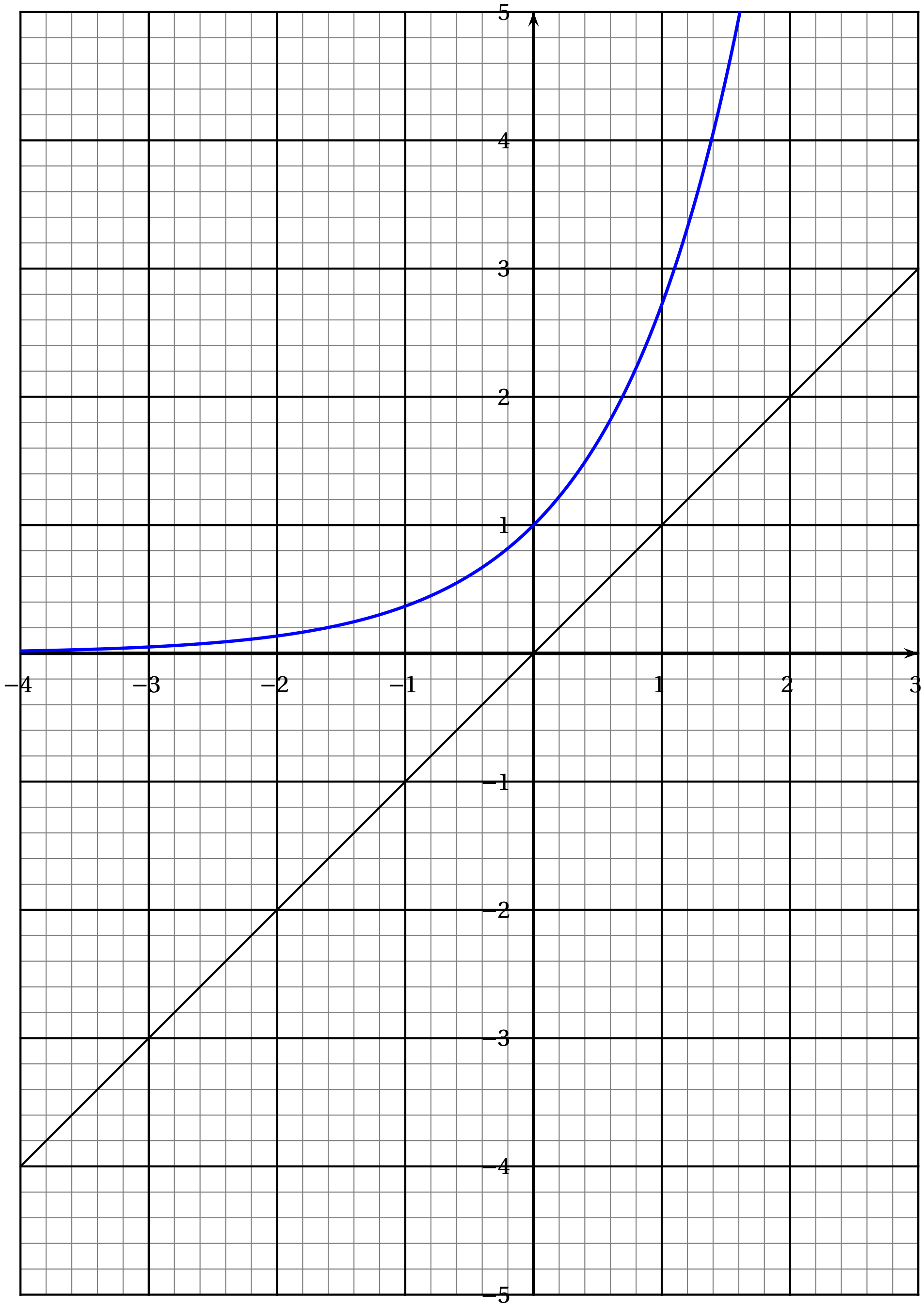
Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^x$ et la droite D d'équation $y = x$. Les courbes Γ et D sont tracées sur la feuille annexe.

1. Soit t un réel ; on désigne par M, le point de Γ d'abscisse t.
   La tangente à Γ au point M_t coupe l'axe des ordonnées au point N_t.
   Déterminer les coordonnées du point N_t.
2. On désigne par P_t le point de D d'abscisse t et par G_t l'isobarycentre des points O, M_t, P_t et N_t. Le point G_t est donc le barycentre des points pondérés (O ; 1), $(M_t ; 1)$, $(P_t ; 1)$ et $(N_t ; 1)$.
   a. Placer les points M_{-2}, P_{-2}, et N_{-2} puis construire, en justifiant, le point G_{-2} sur la feuille annexe.
   b. Déterminer en fonction de t les coordonnées du point G_t.
3. Quel est l'ensemble des points G_t quand t décrit $\mathbb{R}$?

Partie C

1. Construire la courbe $\mathscr{C}$ de la **partie A** sur la feuille annexe.
2. Calculer l'aire $\mathscr{A}$, en cm^2, du domaine plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

Annexe problème



Baccalauréat S La Réunion juin 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence, ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées.

La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce truquée est $\frac{3}{4}$.

La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce équilibrée est $\frac{1}{2}$.

On suppose que les différents lancers dont il sera question dans la suite sont indépendants les uns des autres.

La probabilité d'un évènement A est notée $p(A)$. On désigne par $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

La probabilité conditionnelle de A sachant que l'évènement B est réalisé est notée $p(A/B)$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On prend une pièce au hasard et on la lance :
   soit T l'évènement : « la pièce est truquée »,
   soit P l'évènement : « on obtient PILE ».
   a. Calculer la probabilité d'obtenir « Pile » (on pourra s'aider d'un arbre).
   b. Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu « PILE » ?
2. On prend une pièce au hasard et on la lance quatre fois.
   — si au cours des quatre lancers on obtient quatre fois « Pile », on décide d'éliminer la pièce,
   — dans le cas contraire, on décide de conserver la pièce.
   On note E l'évènement « la pièce est éliminée ».
   a. Quelle est la probabilité que la pièce soit éliminée sachant qu'elle est équilibrée ?
   b. Quelle est la probabilité que la pièce soit conservée sachant qu'elle est truquée ?
   c. Quelle est la probabilité d'avoir pris une pièce équilibrée et de l'avoir éliminée ou d'avoir pris une pièce truquée et de l'avoir conservée ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

On considère l'application f du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = z^3 - 3z^2 + 3z.$$

1. On considère les points B et C d'affixes respectives i et $\text{i}\sqrt{3}$.
   Calculer les affixes des points images de O, B et C par f. Placer les points B, C et leurs images B′ et C′ sur une figure. L'application f conserve-t-elle l'alignement ?

2. Montrer qu'un point M d'affixe z est invariant par f si et seulement si z vérifie l'équation M d'affixe z est invariant par f si et seulement si z vérifie :

$$z^3 - 3z^2 + 2z = 0.$$

En déduire que f possède trois points invariants, dont on déterminera les affixes.

3. **a.** Montrer pour tout z de $\mathbb{C}$ l'égalité suivante :

$$z' - 1 = (z-1)^3.$$

b. Soit z un nombre complexe différent de 1, on note r le module de $z-1$ et α un argument de $z-1$. Exprimer le module r' et un argument α' de $z'-1$ en fonction de r et de α.

Soit A le point d'affixe 1, déduire des résultats précédents une relation entre la distance AM' et la distance AM, et une relation entre une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{A}M'}\right)$ et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{A}M}\right)$.

c. Montrer que si M appartient au cercle Γ de centre A de rayon $\sqrt{2}$, alors M' appartient à un cercle Γ' de même centre dont on déterminera le rayon.

4. Montrer que, si M appartient à une demi-droite ouverte D d'origine A passant par le point B, alors M' appartient à une demi-droite D$'$ que l'on déterminera.

Justifier l'appartenance du point B$'$ à Γ' et à D$'$.

Compléter la figure avec les différents éléments : Γ, Γ', D et D$'$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. Dans cette question on considère l'application s du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = -\text{i}\overline{z}.$$

a. Montrer que s est une réflexion d'axe noté D et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $1-\text{i}$.

b. Soit D$'$ la droite d'équation $y = -1$, on appelle s' la réflexion d'axe D$'$.

Calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}\right)$.

Déterminer géométriquement la composée $r = s' \circ s$.

c. Déterminer l'écriture complexe de r.

2. Dans cette question un considère l'application p du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z_1 = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\text{i}\overline{z} = \frac{z+z'}{2}.$$

a. Soit le point A d'affixe $z = 2+\text{i}$, déterminer l'affixe du point A_1 image de A par p.

b. Montrer que tout point M a son image M_1 située sur la droite d'équation $y = -x$.

c. Définir géométriquement, en utilisant les questions précédentes, l'application p.

3. On considère l'application f définie par $f = s' \circ p$.
Construire l'image A$''$ du point A par f.
Montrer que $s \circ p = p$ et en déduire que $f = r \circ p$. Montrer que, tout point M du plan a son image par f sur une droite Δ, que l'on déterminera.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire comme propriété géométrique pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie B

On considère le point A du plan de coordonnées $(1\,;0)$ et on s'intéresse au minimum de la distance AM où M est un point de la courbe $\mathscr{C}$.

1. M étant un point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$, calculer en fonction de x la distance AM.
2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x-1)^2 + \frac{\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2}{4}.$$

   a. Calculer $g'(x)$.

   b. On désigne par g'' la fonction dérivée seconde de g. Calculer $g''(x)$. Montrer que pour tout x réel :

$$g''(x) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2.$$

   c. En déduire les variations de g' sur $\mathbb{R}$.

   d. Montrer qu'il existe un unique nombre réel α de l'intervalle $[0\,;1]$ vérifiant $g'(\alpha) = 0$.
   Vérifier l'inégalité suivante : $0,46 \leqslant \alpha \leqslant 0,47$.
   Déterminer le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x.

   e. Déterminer les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$). Quel est le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction g ?

3. Établir que la distance AM est minimum au point M_α d'abscisse α de la courbe $\mathscr{C}$.
   Placer le point M_α sur le graphique.
4. En utilisant la définition de α, montrer les égalités :

$$\alpha - 1 = -\frac{1}{2} f(2\alpha)$$

   puis :

$$g(\alpha) = \frac{1}{4}\left[f(2\alpha)\right]^2 + \left[f(\alpha)\right]^2.$$

   Utiliser les variations de f et le résultat suivant, $0,46 \leqslant \alpha \leqslant 0,47$ pour encadrer $g(\alpha)$; en déduire un encadrement de la distance AM_α d'amplitude $2 \cdot 10^{-2}$.

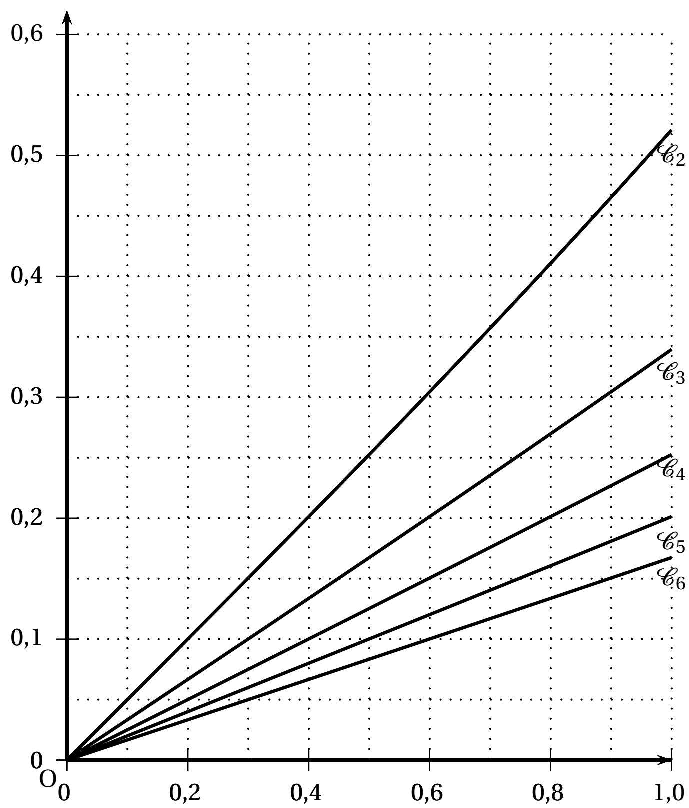
Partie C

Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{e^{\frac{x}{n}} - e^{-\frac{x}{n}}}{2}.$$

On appelle $\mathcal{C}_n$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions $f_2, f_3, f_4, f_5,$ et f_6 soit respectivement les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_6$ obtenues à l'aide d'un logiciel.

1. Calculer l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f_1 \, dx$.
2. On considère pour n entier naturel non nul l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n \, dx$.
   Interpréter géométriquement I_n.
   Calculer pour n entier naturel quelconque, I_n en fonction de n.
3. Que peut-on conjecturer sur la convergence de la suite (I_n) ?
   Montrer que $I_n = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{1}{n}\right)} - \dfrac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{\left(-\frac{1}{n}\right)}\right]$ et en déduire la limite de la suite (I_n) en $+\infty$.



Baccalauréat S Polynésie juin 2002

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On dispose d'une grille à trois lignes et trois colonnes. Une machine M_1 place au hasard un jeton dans une case de la grille, puis une machine M_2 place de même un jeton sur la grille dans une case libre et enfin une troisième machine M_3 place un jeton dans une case libre.

A	B	C	
			1
			2
			3

On note les évènements suivants :

- H : « Les trois jetons sont alignés horizontalement » ;
- V : « Les trois jetons sont alignés verticalement » ;
- D : « Les trois jetons sont alignés en diagonale » ;
- N : « Les trois jetons ne sont pas alignés ».

Les nombres demandés seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. Calculer les probabilités des trois évènements H, V et D.
En déduire que la probabilité de N est égale à $\dfrac{19}{21}$.

2. On considère la variable aléatoire X définie par :
- $X = 20$, lorsque H ou V est réalisé ;
- $X = \alpha$, lorsque D est réalisé ;
- $X = -2$, lorsque N est réalisé.

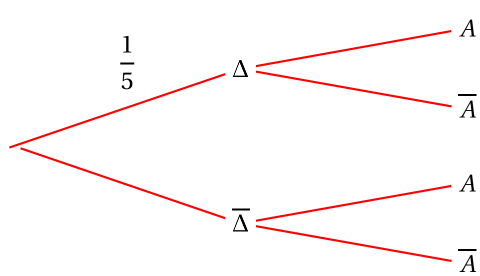
Déterminer α pour que l'espérance de X soit nulle.

3. Dans cette question, on se place dans le cas où la machine M_1 est déréglée ; elle place alors le premier jeton dans l'un des coins de la grille.
On note Δ l'évènement : « la machine M_1 est déréglée ».

a. Calculer la probabilité d'avoir un alignement horizontal c'est-à-dire $p_\Delta(H)$, puis de même, d'avoir un alignement vertical $p_\Delta(V)$, d'avoir un alignement en diagonale $p_\Delta(D)$.

b. En déduire que la probabilité d'avoir un alignement horizontal ou vertical ou diagonal, est égale à $\dfrac{3}{28}$.

4. A désigne l'évènement « les trois jetons sont alignés horizontalement ou verticalement ou en diagonale ». On admet que $p(\Delta) = \dfrac{1}{5}$. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant en précisant les cinq probabilités correspondantes :



Calculer $p(A)$). (On pourra remarquer que $p_\Delta(A)$ et $p_{\overline{\Delta}}\left(\overline{A}\right)$ ont déjà été calculées.)

5. On ne sait pas lorsque l'on joue, si la machine M_1 est en bon état de marche. On joue une partie et on constate que les trois jetons sont alignés. Déterminer la probabilité pour que la machine M_1 soit déréglée.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité 2 cm, on considère les points M d'affixe z, M_1 d'affixe $\overline{z}$, A d'affixe 2 et B d'affixe 1.
Soit f l'application de $\mathscr{P}$ privé de A dans $\mathscr{P}$, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}.$$

1. Déterminer les points invariants par f.

2. Soit C le point d'affixe $2\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)$.
Montrer que C′ est le milieu du segment [OC].

3. **a.** Calculer pour tout $z \neq 2$, le produit $\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right)$.

b. En déduire :
— la valeur de $\text{A}M_1 \cdot \text{B}M'$,
— une expression de $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{B}M'}\right)$ en fonction de $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M_1}\right)$.

c. Justifier les relations :

$$\begin{array}{ll} (1) & \text{A}M \cdot \text{B}M' = 6 \\ (2) & \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{B}M'}\right) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M}\right). \end{array}$$

d. Application : construire l'image D′ du point D d'affixe $2+2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

2. On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$ et on note δ le PGCD de α et β.

a. Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.

b. Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n-2)$ est multiple de 5.

3. On considère les nombres a et b définis par :

$$\begin{array}{rcl} a & = & n^3+2n^2-3n \\ b & = & 2n^2-n-1 \end{array}$$

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n-1)$.

4. **a.** On note d le PGCD de $n(n+3)$ et de $(2n+1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.

b. En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.

c. Application :
Déterminer Δ pour $n = 2001$;
Déterminer Δ pour $n = 2002$.

PROBLÈME **15 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - \mathrm{e}^{-x}$$

et l'on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité 3 cm.

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$?
2. Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f pour x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 0.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique u. Montrer que u appartient à $[1\,;\,2]$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u.
5. Tracer (T) et $(\mathscr{C})$ sur la même figure.
6. **a.** Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$, $\dfrac{x-1}{x+1} = a + \dfrac{b}{x+1}$.

   b. En déduire l'aire en cm^2 du domaine plan limité par (T), $(\mathscr{C})$ et la droite d'équation $x = 1$ (on admettra que T est au-dessus de $(\mathscr{C})$).

Partie B

n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer $f_n'(x)$ et donner son signe sur $[0\,;\,+\infty[$. Préciser $f_n(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
   Dresser le tableau de variations de f_n.
2. **a.** Calculer $f_n(n)$; quel est son signe ?

   b. Démontrer, par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{n+1} > 2n+1$.
   En déduire le signe de $f_n(n+1)$.

   c. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $[n\,;\,n+1]$; cette solution sera notée u_n.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$.
4. **a.** En remarquant que, pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$: $\dfrac{x-n}{x+n} = 1 - \dfrac{2n}{x+n}$, montrer que la valeur moyenne, M_n de f_n sur $[0\,;\,u_n]$ est égale à :

$$1 - \frac{1}{u_n} + \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{u_n} - 2\left(\frac{n}{u_n}\right)\ln\left(\frac{u_n}{n} + 1\right)$$

   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.

∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane ∾ septembre 2002

EXERCICE 1

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}.$$

a. Soit la suite (v_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$; montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

2. On considère deux dés, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.

On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.

On désigne par A_n l'évènement « on utilise le dé A au n-ième lancer »,
par $\overline{A_n}$ l'évènement contraire de A_n,
par R_n l'évènement « on obtient rouge au n-ième lancer »,
par $\overline{R_n}$ l'évènement contraire de R_n,
par a_n et r_n les probabilités respectives de A_n et R_n.

a. Déterminer a_1.

b. Déterminer r_1. Pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.

c. En remarquant que, pour tout $n \geqslant 1$, $R_n = (R_n \cap A_n) \cup \left(R_n \cap \overline{A_n}\right)$, montrer que $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$.

d. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup \left(\overline{A_n} \cap \overline{R_n}\right)$.

e. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,
$a_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$, puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

f. En déduire l'expression de r_n en fonction de n puis la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2
Enseignement obligatoire

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 1 + \text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{B}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{i}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme trigonométrique de z_{A} et celle de z_{B}.

2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $(\mathscr{C})$ d'affixe $\text{e}^{\text{i}\alpha}$, $\alpha \in [0\,;\,2\pi]$.
On considère l'application f qui tout point M de $(\mathscr{C})$, associe
$f(M) = M\text{A} \times M\text{B}$.

a. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante :

$$e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha.$$

b. Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

c. En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.

3. **a.** En utilisant **2 c**, montrer qu'il existe deux points M de $(\mathscr{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.

b. En utilisant **2 c**, montrer qu'il existe un seul point M de $(\mathscr{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

EXERCICE 2
Enseignement de spécialité

Dans le plan, on considère deux segments [AC] et [BD] tels que

$$\text{AC} = \text{BD} \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{BD}}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

On désigne par M le milieu de [AC] et par N celui de [BD]. On appelle $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$ et $(\mathscr{C}_4)$ les cercles de diamètres respectifs [AB], [BC], [CD] et [DA].
On pourra s'aider de la figure ci-jointe.

1. **a.** Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D. Quel est l'angle de r ? Montrer que le centre I de r appartient aux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$.

b. Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B. Quel est l'angle de r' ? Montrer que le centre J de r' appartient aux cercles $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$.

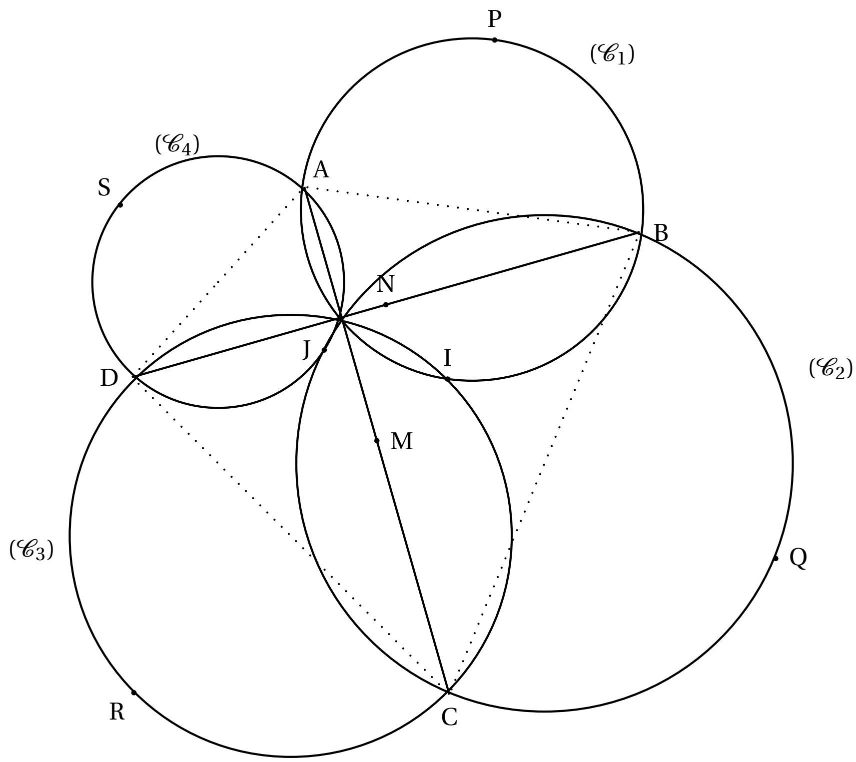
c. Quelle est la nature du quadrilatère INJM ?

2. On désigne par P et R les points diamètralement opposés à I sur, respectivement $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$ et par Q et S les points diamètralement opposés à J sur, respectivement $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$.

Soit s la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a. Quelles sont les images par s des points D, N, B ?

b. En déduire que J est le milieu de [PR].



PROBLÈME

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 0 \\ f(x) &= (\ln x) \times \ln(1-x), \quad \text{pour} \quad x \in]0\,;\,1[\end{cases}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm).
On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$, ainsi que le résultat suivant :

$$\text{pour} \quad \alpha > 0, \quad \lim_{x\to 0} x^{\alpha} \ln x = 0.$$

Partie A - Étude de la fonction *f*

1. **a.** Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

   b. En déduire la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{f(x)}{x}$; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[, \quad f\left(\dfrac{1}{2}-x\right) = f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)$.

   Que peut-on en conclure pour $\mathscr{C}$?

3. Soit φ la fonction définie sur $]0\,;\,1[$ par :

$$\varphi(x) = (1-x)\ln(1-x) - x\ln x.$$

   a. Déterminer $\varphi'(x)$, puis montrer l'égalité $\varphi''(x) = \dfrac{2x-1}{x(1-x)}$; en déduire les variations de φ' sur $]0\,;\,1[$.

b. Montrer que φ' s'annule en deux valeurs α_1 et α_2 sur $]0\,;1[$ (on ne cherchera pas à calculer ces valeurs). Donner le signe de φ' sur $]0\,;1[$.

c. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\varphi(x)$ et la limite quand x tend vers 1 de $\varphi(x)$. Calculer $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $]0\,;1[$.

4. **a.** Montrer que $f'(x)$ a même signe que $\varphi(x)$ sur $]0\,;1[$.

b. Donner le tableau de variations de f.

c. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;\,1[$, les inégalités suivantes sont vraies :

$$0 < (\ln x) \times \ln(1-x) \leqslant (\ln 2)^2.$$

d. Tracer $\mathscr{C}$.

Partie B - Encadrement d'une intégrale

Pour $t \in \left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$, on pose :

$$I_1(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x \ln x\,\mathrm{d}x, \quad I_2(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x^2 \ln x\,\mathrm{d}x, \quad I(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** À l'aide d'intégrations par parties, montrer que :

$$I_1(t) = -\frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}t^2 \ln t + \frac{t^2}{4};$$

$$I_2(t) = -\frac{\ln 2}{24} - \frac{1}{72} - \frac{t^3 \ln t}{3} + \frac{t^3}{9}.$$

b. Déterminer les limites de $I_1(t)$ et de $I_2(t)$ quand t tend vers 0.

2. Soit g et h les fonctions définies sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$ par :

$$g(x) = -\left[x + \frac{x^2}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}.$$

a. Étudier sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$ les variations de la fonction

$$x \longmapsto \ln(1-x) - g(x).$$

b. En déduire que, pour tout $x \in \left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$:

$$\ln(1-x) \leqslant g(x).$$

c. Par un procédé analogue, montrer que pour tout $x \in \left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$:

$$\ln(1-x) \geqslant h(x).$$

d. En déduire un encadrement de $f(x)$ sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$.

3. **a.** Montrer que $-I_1(t) - \frac{1}{2}I_2(t) \leqslant I(t) \leqslant -I_1(t) - I_2(t)$.

b. En supposant que $I(t)$ admet une limite notée ℓ quand t tend vers 0, donner un encadrement de ℓ.

Baccalauréat S Métropole septembre 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun tous les candidats

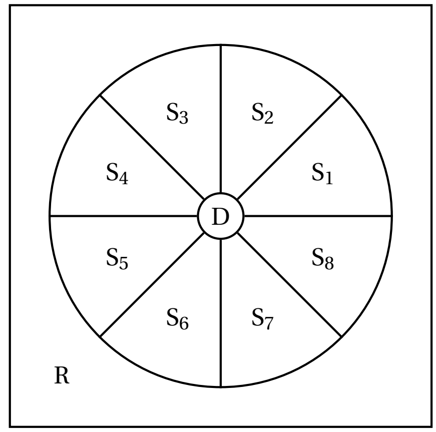
Un carré de côté 20 cm est partagé selon les 10 zones suivantes :

— un disque D de rayon 1 cm,

— 8 secteurs S_1, S_2, ..., S_8 de même aire délimités par les frontières du disque D et du disque D′ de même centre et de rayon 9 cm,

— une zone R entre le disque D′ et le bord du carré.

On place un point aléatoirement dans le carré. La probabilité de placer le point dans une zone quelconque du carré est proportionnelle à l'aire de cette zone.



1. **a.** Déterminer la probabilité $p(\text{D})$ pour que le point soit placé dans le disque D.

   b. Déterminer la probabilité $p(\text{S}_1)$ pour que le point soit placé dans le secteur S_1.

2. Pour cette question **2.**, on utilisera les valeurs approchées suivantes :
   $p(\text{D}) = 0{,}008$ et pour tout k appartenant à $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$,
   $p(\text{S}_k) = 0{,}0785$.
   À cette situation aléatoire est associé le jeu suivant :
   — un point placé dans le disque D fait gagner 10 euros ;
   — un point placé dans le secteur S_k fait gagner k euros pour tout k appartenant à $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$;
   — un point placé dans la zone R fait perdre 4 euros.
   On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu.

   a. Calculer la probabilité $p(\text{R})$ pour que le point soit placé dans la zone R.
   Calculer l'espérance de X.

   b. On joue deux fois de suite. On a donc placé deux points de manière indépendante dans le carré. Calculer la probabilité d'obtenir un gain total positif ou nul.

   c. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. On joue n fois de suite. On a donc placé n points de manière indépendante dans le carré.
   Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins un point placé dans le disque D.
   Déterminer la plus petite valeur de n telle que $p_n \geqslant 0,9$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i. À tout point M, distinct de A et d'affixe z, est associé le point M' d'affixe Z définie par :

$$Z = \frac{(1-\text{i})(z-\text{i})}{z-1}.$$

1. **a.** Calculer l'affixe du point C′ associé au point C d'affixe $-\text{i}$.

b. Placer les points A, B et C.

2. Soit $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y désignent deux nombres réels.

a. Montrer l'égalité :

$$Z = \frac{(x-1)^2+(y-1)^2-1}{(x-1)^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}.$$

b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel.

c. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que $\mathrm{Re}(Z)$ soit négatif ou nul.

3. a. Écrire le nombre complexe $(1-\mathrm{i})$ sous forme trigonométrique.

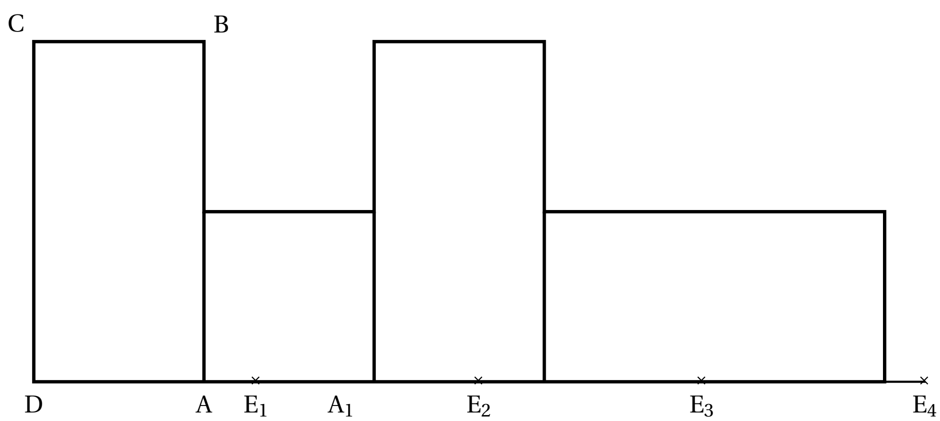
b. Soit M un point d'affixe z, distinct de A et de B. Montrer que : $\frac{(1-\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-1} \in \mathbb{R}*$ si et seulement s'il existe un entier k tel que $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}}, \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

c. En déduire l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}}, \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

d. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}}, \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



On considère un rectangle direct ABCD vérifiant : AB = 10 cm et AD = 5 cm.

1. Faire une figure : construire ABCD, puis les images respectives M, N et P de B, C et D par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

2. a. Construire le centre Ω de la rotation r' qui vérifie $r'(\mathrm{A}) = \mathrm{N}$ et $r'(\mathrm{B}) = \mathrm{P}$. Déterminer l'angle de r'.

b. Montrer que l'image de ABCD par r' est AMNP.

c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r^{-1} \circ r'$.

3. On considère les images successives des rectangles ABCD et AMNP par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DM}}$. Sur la demi-droite [DA), on définit ainsi la suite de points $(A_k)_{k\geqslant 1}$ vérifiant, en cm, $\mathrm{D}A_k = 5 + 15k$. Sur la même demi-droite, on considère la suite de points $(E_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant, en cm, $\mathrm{D}E_n = 6,55n$.

a. Déterminer l'entier k tel que E_{120} appartienne à $[A_k,\ A_{k+1}]$. Que vaut la longueur A_kE_{120} en cm ?

b. On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale n_0 le point E_{n_0} est confondu avec un point A_k.
Montrer que si un point E_n est confondu avec un point A_k alors
$131n - 300k = 100$.
Vérifier que les nombres $n = 7\,100$ et $k = 3\,100$ forment une solution de cette équation.
Déterminer la valeur minimale n_0 recherchée.

PROBLÈME **11 points**

Partie A :

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x} - 1}$.
   a. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
   b. Calculer $g'(x)$. Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variations.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,\infty[$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est donnée sur la feuille annexe avec sa tangente au point d'abscisse e.
On admet l'égalité suivante : $f(x) = 2x\left[a(\ln x)^2 + b\ln x + c\right]$ où a, b et c désignent trois réels.

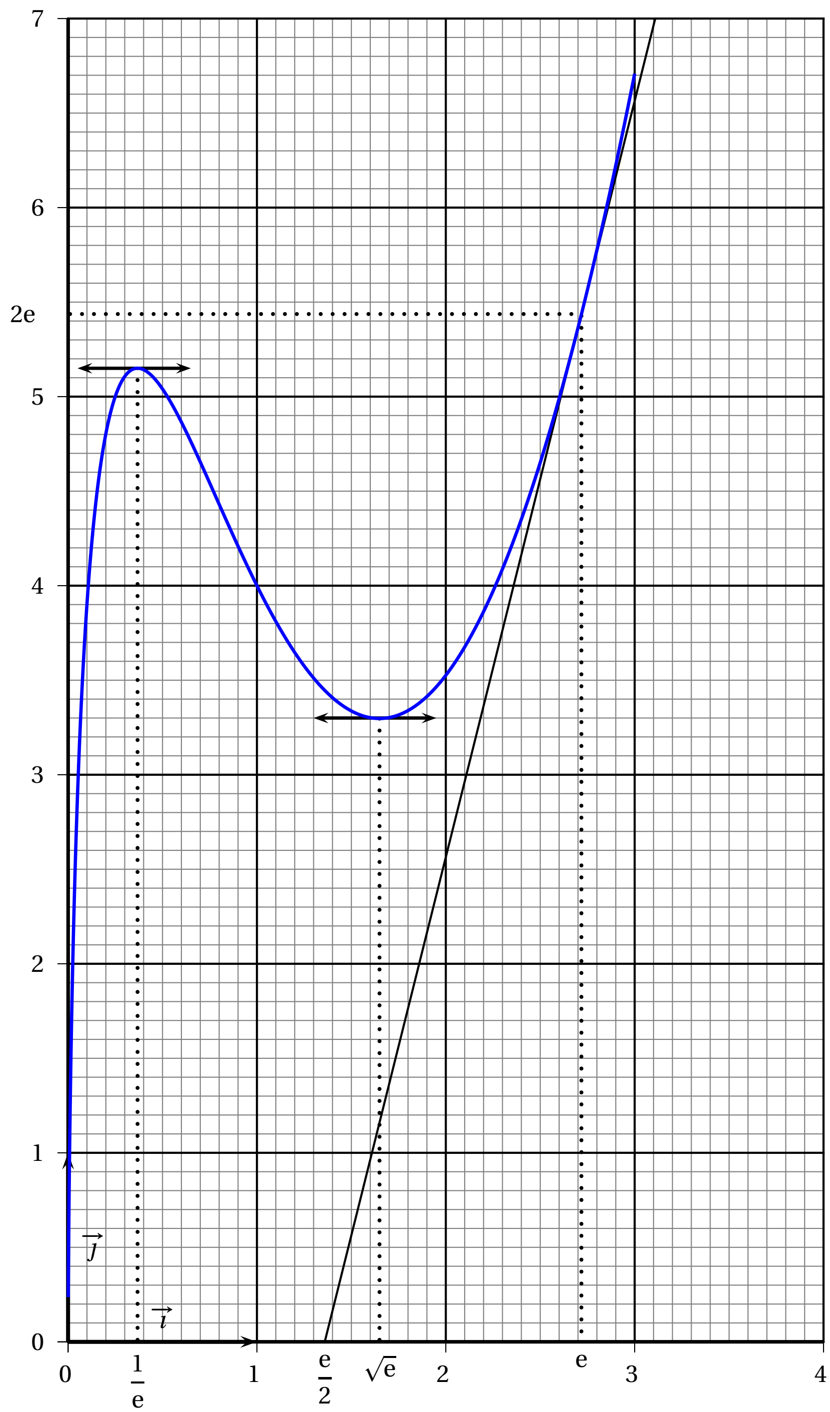
1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.
2. À l'aide des informations données sur le graphique, déterminer les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$, $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ et $f'(\mathrm{e})$.
3. En déduire l'égalité : $f(x) = 2x\left[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right]$ pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$.
4. Déterminer la limite de f en 0. On pourra poser $t = -\ln x$ et vérifier pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$ l'égalité :
$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-t}\left[2t^2 + 3t + 2\right].$$
5. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
6. Montrer pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$ l'égalité : $f'(x) = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1)$.
7. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

Partie C :

1. Tracer, dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ de la feuille annexe, la courbe représentative Γ de la fonction g étudiée en **partie A**.
2. **a.** Montrer que pour tout $x > 0$, on a $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} - 1} - 1$.
   b. Calculer, et exprimer en unités d'aire, l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{4}$ et $x = 2$.
3. Soit φ la fonction définie sur $[0{,}1\,;\,0{,}3]$ par : $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.
   a. Montrer que, pour tout x appartenant $[0{,}1\,;\,0{,}3]$, on a : $\varphi'(x) > 0$.
   b. Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède une solution unique α sur $[0{,}1\,;\,0{,}3]$ et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie D :

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.
2. On définit la fonction h sur $]0\ ;\ +\infty[$ par l'expression suivante : $h = g \circ f$.
   a. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de h.
   b. Déterminer le sens de variation de h sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   c. Montrer que $h(\alpha) = g \circ f(\alpha)$. Déterminer une valeur approchée de $h(\alpha)$ à 10^{-4} près.



∽ Baccalauréat S Polynésie septembre 2002 ∾

EXERCICE 1

Une compagnie d'assurance automobile fait un bilan des frais d'intervention, parmi ses dossiers d'accidents de la circulation.

- 85 % des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle.
- 20 % des dossiers entraînent des frais de dommages corporels.
- 12 % des dossiers entraînant des frais de réparation matérielle entraînent aussi des frais de dommages corporels.

Soit les évènements suivants :
R : le dossier traité entraîne des frais de réparation matérielle
D : le dossier traité entraîne des frais de dommages corporels.

1. En utilisant les notations R et D, exprimer les trois pourcentages de l'énoncé en termes de probabilités; les résultats seront donnés sous forme décimale.
2. Calculer la probabilité pour qu'un dossier :
   a. entraîne des frais de réparation matérielle et des frais de dommages corporels;
   b. entraîne seulement des frais de réparation matérielle;
   c. entraîne seulement des frais de dommages corporels;
   d. n'entraîne ni frais de réparation matérielle ni frais de dommages corporels;
   e. entraîne des frais de réparation matérielle sachant qu'il entraîne des frais de dommages corporels.
3. On constate que 40 % des dossiers traités correspondent à des excès de vitesse et parmi ces derniers 60 % entraînent des frais de dommages corporels.
   a. On choisit un dossier; quelle est la probabilité pour que ce dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels?
   b. On choisit cinq dossiers de façon indépendante. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels.

EXERCICE 2

Partie A

1. z_1 et z_2 sont des nombres complexes; résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_1\sqrt{3}-z_2 & = & -2\\ z_1 \quad -z_2\sqrt{3} & = & -2\mathrm{i}\end{array}\right.$$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct de centre O, d'unité graphique 4 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = -\sqrt{3}+\mathrm{i}, \qquad z_{\mathrm{B}} = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

   Donner les écritures de z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.
   Placer les points A et B.
3. Calculer module et argument de $\dfrac{z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}}$.
   En déduire la nature du triangle ABO et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.

4. Déterminer l'affixe du point C tel que ACBO soit un losange. Placer C. Calculer l'aire du triangle ABC en cm^2.

Partie B

Soit f la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} z.$$

1. Définir cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.
2. Quelles sont, sous forme exponentielle, les affixes de A$'$, B$'$, et C$'$ images par f de A, B et C ?
3. Quelle est l'aire du triangle A$'$B$'$C$'$ en cm^2 ?

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, toutes les courbes demandées seront tracées dans ce repère (unité graphique 4 cm).

Partie A - Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1},$$

Γ est sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier la parité de f.
2. Montrer que pour tout x appartenant $\mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$.
3. Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$? En déduire les équations des asymptotes éventuelles à Γ.
4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations ; en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. **a.** α étant un nombre appartenant à $]-1\ ;\ 1[$, montrer que l'équation $f(x) = \alpha$ admet une solution unique x_0. Exprimer alors x_0 en fonction de α.

   b. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Partie B - Tangentes à la courbe

1. Déterminer une équation de la tangente Δ_1 à Γ au point d'abscisse 0.
2. Montrer que pour tout nombre t réel, $f'(t) = 1 - [f(t)]^2$. En déduire un encadrement de $f'(t)$.
3. Pour x positif ou nul, déterminer un encadrement de $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$, puis justifier que $0 \leqslant f(x) \leqslant x$. Quelles sont les positions relatives de Γ et Δ_1 ?
4. Déterminer une équation de la tangente Δ_2 à Γ au point A d'ordonnée $\frac{1}{2}$.
5. Montrer que le point B de la courbe Γ, d'ordonnée positive, où le coefficient directeur de la tangente est égal à $\frac{1}{2}$ a pour coordonnées :

$$\left(\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

6. Tracer Γ, Δ_1 et Δ_2. On placera les points A et B.

Partie C - Calcul d'intégrales

1. Montrer que $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$; en déduire une primitive de f.
2. Quelle est l'aire en cm^2 de la surface comprise entre Γ, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$?
   Hachurer cette surface sur la représentation graphique.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.
4. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x\left(1 - [f(x)]^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{\mathrm{e}^2 + 1} - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2 + 1}{2\mathrm{e}}\right).$$

   En déduire $\displaystyle\int_0^1 x[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2002

Exercice 1 5 points

Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
Si les trois boules tirées sont rouges, le joueur gagne 100 €; si exactement deux boules tirées sont rouges, il gagne 15 € et si une seule est rouge il gagne 4 €. Dans tous les autre cas, il ne gagne rien.
Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le gain en euros du joueur lors d'un jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Pour un jeu, la mise est de 10 €. Le jeu est-il favorable au joueur, c'est-à-dire l'espérance mathématiques est-elle strictement supérieure à 10 ?
3. Pour l'organisateur, le jeu ne s'avérant pas suffisamment rentable, celui-ci envisage deux solutions :
   — soit augmenter la mise de 1 €, donc passer à 11 €,
   — soit diminuer chaque gain de 1 €, c'est-à-dire ne gagner que 99 €, 14 € ou 3 €.

   Quelle est la solution la plus rentable pour l'organisateur ?

Exercice 2 5 points
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère le polynôme P de la variable complexe z, défini par :

$$P(z) = z^3 + \left(14 - \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z^2 + \left(74 - 14\mathrm{i}\sqrt{2}\right) z - 74\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

   a. Déterminer le nombre réel y tel que iy soit solution de l'équation $P(z) = 0$.

   b. Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$

   c. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

   a. Placer les points A, B et I d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = -7 + 5\mathrm{i}$; $z_{\mathrm{B}} = -7 - 5\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{I}} = \mathrm{i}\sqrt{2}$.

   b. Déterminer l'affixe de l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

   c. Placer le point C d'affixe $z_{\mathrm{C}} = 1 + \mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point N tel que ABCN soit un parallélogramme.

   d. Placer le point D d'affixe $z_{\mathrm{D}} = 1 + 11\mathrm{i}$. Calculer $Z = \dfrac{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{B}}}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. Justifier que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 2 5 points
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.
On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1. **a.** Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.
   b. En déduire que $S = x + y$ et $P = xy$ sont premiers entre eux.
   c. Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).
2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.
3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : $SP = 84$.
4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b & = & 84 \\ ab & = & d^3 \end{array}\right. \text{ avec } d = \text{pgcd}(a\ ;\ b)$$

(On pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux)

Problème 10 points

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (Unités graphiques : 2 cm).

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (3 + x)\text{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, puis en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. Construire la courbe (Γ) représentative de f dans $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\text{I} = \displaystyle\int_{-3}^{0} x\text{e}^{-\frac{x}{2}}\,\text{d}x$ et en déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine défini par les couples $(x,\ y)$ tels que $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ et $x \leqslant 0$.
5. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. Soit α la solution non nulle, montrer que : $-2 < \alpha < -\dfrac{3}{2}$.
   b. Plus généralement, déterminer **graphiquement** suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Partie B

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 3\text{e}^{\frac{x}{2}} - 3$.

1. Démontrer que $f(x) = 3$ si et seulement si $\varphi(x) = x$
2. Soit φ' et $\varphi''(x)$ les dérivées première et seconde de la fonction φ.
   a. Calculer, pour tout réel x, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$. Justifier que $\varphi'(\alpha) = \dfrac{\alpha + 3}{2}$.
   b. Étudier le sens de variation de φ', puis celui de φ.

   On se place désormais dans l'intervalle $\text{I} = [-2\ ;\ \alpha]$.
3. Montrer que, pour tout x appartenant I ;
   a. $\varphi(x)$ appartient à I.
   b. $\dfrac{1}{2} \leqslant \varphi'(x) \leqslant \dfrac{3}{4}$
   c. En déduire, à l'aide d'une intégration, que pour tout x de l'intervalle I, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{2}(\alpha - x) \leqslant \varphi(\alpha) - \varphi(x) \leqslant \frac{3}{4}(\alpha - x).$$

4. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & \varphi(u_n) \end{array}\right.$$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n appartient à l'intervalle I.

b. Justifier que, pour tout entier n,

$$0 \leqslant \alpha - u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}(\alpha - u_n) \qquad \text{puis que} \qquad 0 \leqslant \alpha - u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

d. Déterminer le plus petit entier p tel que : $\left(\dfrac{3}{4}\right)^p \leqslant 10^{-2}$.

Donner une approximation décimale 10^{-2} près de u_p, à l'aide d'une calculatrice, puis une valeur approchée de α à 2×10^{-2} près.

Baccalauréat S Amérique du Sud décembre 2002

EXERCICE 1 **5 points**

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ on appelle A et B les points d'affixes respectives 2 et -2. À tout point M d'affixe z, z différent de 2, on associe le point N d'affixe $\overline{z}$ et M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{2z-4}{\overline{z}-2}$$

1. Calculer z' et $\left|z'\right|$ lorsque $z = 5$ puis lorsque $z = 1+\text{i}$.
2. **a.** Interpréter géométriquement $|z-2|$ et $\left|\overline{z}-2\right|$.

   b. Montrer que, pour tout z distinct de 2, $|z'| = 2$. En déduire une information sur la position de M'.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z ($z \neq 2$) tels que $M' = \text{B}$.
4. On note $Z_{\overrightarrow{\text{A}M}}$ et $Z_{\overrightarrow{\text{B}M'}}$, les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{\text{A}M}$ et $\overrightarrow{\text{B}M'}$.
   Montrer que, pour tout point M distinct de A et n'appartenant pas $\mathcal{E}$, le quotient $\dfrac{Z_{\overrightarrow{\text{A}M}}}{Z_{\overrightarrow{\text{B}M'}}}$ est un nombre réel. Interpréter géométriquement ce résultat.
5. Un point M distinct de A, n'appartenant pas $\mathcal{E}$, étant donné, proposer une méthode géométrique pour construire le point M'. On illustrera par une figure.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite d'entiers définie par $a_n = 111\ldots11$ (l'écriture décimale de a_n est composée de n chiffres 1). On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2 001.

1. En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{10^n-1}{9}$.
2. On considère la division euclidienne par 2 001 : expliquer pourquoi parmi les 2 002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.
   Soit a_n et a_p deux termes de la suite admettant le même reste ($n < p$).
   Quel est le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2 001 ?
3. Soit k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$.
   Démontrer l'égalité $a_m - a_k = a_{m-k} \times 10^k$.
4. Calculer le PGCD de 2 001 et de 10.
   Montrer que si 2 001 divise $a_m - a_k$, alors 2 001 divise a_{m-k}.
5. Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2 001.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes.
Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois ; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.
   a. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.
   b. Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?
   c. Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?
2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.
   a. Montrer que la probabilité de l'évènement « la 3^{e} boule tirée est noire » vaut $\dfrac{1}{4}$.
   b. Certains pensent que l'évènement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

PROBLÈME **10 points**

A. Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boldsymbol{g(x) = \mathrm{e}^{x}(1-x)+1.}$$

1. Étudier le sens de variation de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1{,}27\,;\,1{,}28]$; on note α cette solution.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty\,;\,0[$.
   Justifier que $g(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

B. Étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1}+2.}$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interprter graphiquement ce résultat.
2. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x+2$ est une asymptote pour $\mathscr{C}_f$.
   c. Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (d).
3. **a.** Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la partie **A)**.
   b. Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha+q$.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α.

C. Encadrements d'aires

Pour tout entier naturel n, tel que $n \geqslant 2$, on note $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan, dont les coordonnées vérifient : $2 \leqslant x \leqslant n$ et $2 \leqslant n \leqslant f(x)$ et on appelle $\mathscr{A}_n$ son aire, exprimée en unités d'aire.

1. Faire apparaître $\mathscr{D}_5$ sur la figure.

2. Démontrer que pour tout x, tel que $x \geqslant 2$, on a :

$$\frac{7}{8}x\mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1} \leqslant x\mathrm{e}^{-x}.$$

3. On pose $I_n = \displaystyle\int_2^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.

4. Écrire un encadrement de $\mathscr{A}_n$ en fonction de I_n.

5. On admet que $\mathscr{A}_n$ a une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour la limite de $\mathscr{A}_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?
Donner une interprétation géométrique de ce dernier résultat.

Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie mars 2003

Exercice 1 5 points

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère la transformation ponctuelle f qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 1.$$

1. Déterminer les antécédents du point O.
2. Existe-t-il des points invariants par f ? Si oui, préciser leurs affixes respectives.
3. Montrer que deux points symétriques par rapport à O ont la même image. Que peut-on dire des images de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?
4. Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + \text{i})$. Déterminer l'affixe du point A′ image de A par f puis prouver que les points O, A et A′ sont alignés.
5. Soit θ un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ et N le point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\theta}$.

   a. Montrer que N appartient au cercle (X) de centre O et de rayon 1.

   b. Lorsque θ varie, montrer que N', image du point N par f reste sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

   c. Vérifier que $\overrightarrow{\text{O}N'} = 2\cos\theta\overrightarrow{\text{O}N}$. En déduire que les points O, N et N' sont alignés.

   d. Expliquer la construction du point N'.

Exercice 2 5 points

Une société de maintenance de photocopieurs désire optimiser ses prestations au niveau des entreprises, afin de proposer un abonnement adapté à ses services.
On note, pour n entier naturel non nul, I_n l'évènement « La société intervient durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur » et $p_n = p\left(I_n\right)$ la probabilité de l'évènement I_n.
Le bureau d'étude a mis en évidence les résultats suivants pour une entreprise déterminée :

- $p\left(I_1\right) = p_1 = 0,75$.
- Sachant qu'il y a eu une intervention durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale à $0,04$.
- Sachant qu'il n'y a pas eu d'intervention durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale à $0,64$.

On rappelle que $\overline{A}$ est l'évènement contraire de l'évènement A et que $p_B(A)$ est la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

Partie 1

1. Préciser $p_{I_n}\left(I_{n+1}\right)$ et $p_{\overline{I_n}}\left(I_{n+1}\right)$ puis calculer $p\left(I_{n+1} \cap I_n\right)$ et $p\left(I_{n+1} \cap \overline{I_n}\right)$ en fonction de $p_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.
2. En déduire $p_{n+1} = -0,6p_n + 0,64$.

3. On considère la suite (q_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $q_n = p_n - 0,4$.

   a. Démontrer que (q_n) est une suite géométrique.

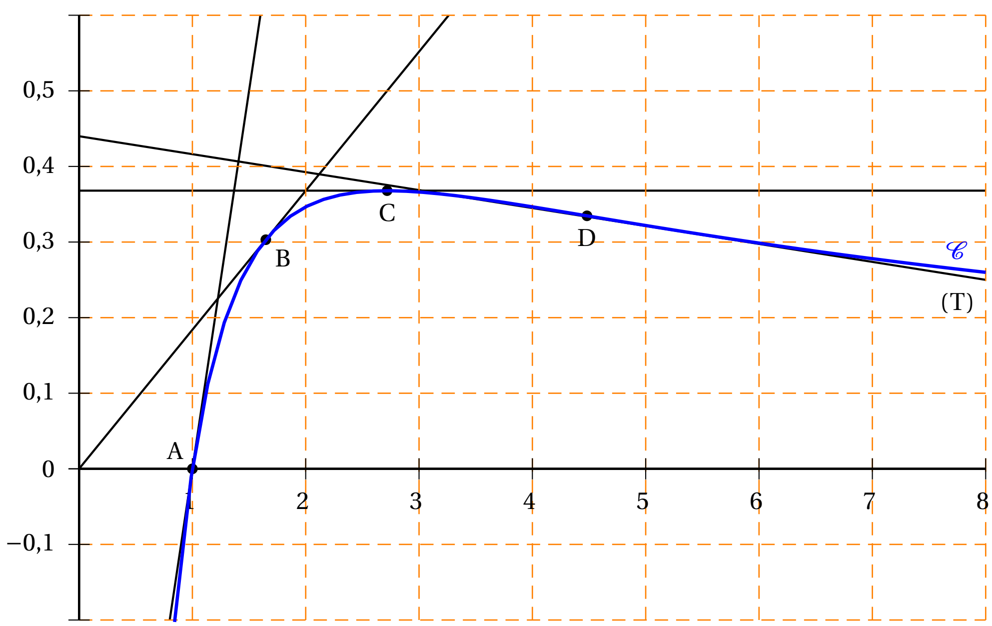
   b. En déduire q_n puis p_n en fonction de n.

   c. Donner une valeur approchée de p_6 à 10^{-3} près par excès.

PARTIE 2

Le même mois, la société de maintenance installe un photocopieur dans 10 entreprises. Six mois plus tard, elle désire libérer une partie de son personnel afin de proposer un stage de mise à niveau.
On estime que la probabilité d'intervention du service de maintenance durant ce mois auprès de chacune de ces entreprises est égale à 0,373.
Donner, à 10^{-3} près par excès, la probabilité qu'il y ait au moins un déplacement du service de maintenance durant ce mois (on supposera que les interventions dans les différentes entreprises sont des évènements indépendants).

Exercice 3 **10 points**



PARTIE I

Sur la figure ci-dessus est tracée dans un repère orthogonal la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f où f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Les points A, B, C et D sont les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1, $\sqrt{\mathrm{e}}$, e et $\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}$; de plus, A appartient à l'axe des abscisses. La droite (T) est la tangente à $\mathscr{C}$ au point D.

1. Dans cette question, on ne demande qu'une observation graphique.
   Avec la précision permise par ce graphique :

   a. Donner une estimation à 5×10^{-2} près des coefficients directeurs des tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A, B, C et D.

   b. Préciser combien la courbe $\mathscr{C}$ admet de tangentes horizontales, de tangentes passant par l'origine, de tangentes de coefficient directeur 1. Pour chacune de ces tangentes, donner l'abscisse du point de contact avec la courbe $\mathscr{C}$.

c. Choisir le seul tableau pouvant décrire les variations de la fonction dérivée de f. Justifier ce choix.

x	0		e		$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	

x	0		$\text{e}\sqrt{\text{e}}$		$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	

x	0		$+\infty$
		$\nearrow$	

2. On rappelle que $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f.
On admet que la fonction dérivée de f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

a. Étudier les variations de g. Cela corrobore-t-il votre choix dans la question **1. c.** ?

b. Déterminer les limites de g en 0, puis en $+\infty$.

c. Calculer $g(1)$, $g\left(\text{e}\sqrt{\text{e}}\right)$; puis démontrer que l'équation $g(x) = 1$ n'a qu'une seule solution. Quelle observation de la question **1. b.** a-t-on démontrée ?

d. Expliquer pourquoi f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \int_1^x \left(\frac{1 - \ln t}{t^2}\right) \text{d}t.$$

Calculer $f(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.

Partie II

On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

1. Étudier les variations de f, préciser ses limites en 0 puis en $+\infty$.

2. On cherche à justifier les observations de la question **I. 1.** concernant les tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ qui sont horizontales, qui ont un coefficient directeur égal à 1 ou qui passent par le point O origine du repère.
Démontrer que, dans chacun de ces cas, une seule tangente vérifie la condition donnée, préciser les abscisses des points de contact correspondants (on pourra utiliser les résultats démontrés dans la partie **I. 2. c.** et préciser ces points.

3. Étude de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point D (le point D a pour abscisse $\text{e}\sqrt{\text{e}}$).

a. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$ au point D est

$$y = \frac{-x + 4\text{e}\sqrt{\text{e}}}{2\text{e}^3}.$$

b. Montrer que le signe de $\left(2\text{e}^3 \ln x + x^2 - 4\text{e}x\sqrt{\text{e}}\right)$ détermine la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à cette tangente.

c. On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi(x) = 2\text{e}^3 \ln x + x^2 - 4\text{e}x\sqrt{\text{e}}.$$

À partir des variations de φ, déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente (T).

Partie III Calcul d'aires

1. Démontrer que les abscisses des points A, B et C sont les trois premiers termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison. Vérifier que l'abscisse de D est le quatrième terme de cette suite.
2. Soit x_0 un nombre réel strictement supérieur à 1 et E le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0. On considère les droites Δ_A, Δ_B, Δ_C, Δ_D et Δ_E parallèles à l'axe des ordonnées et passant respectivement par A, B, C, D et E.

   On note U_1 l'aire de la partie du plan limite par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites Δ_A et Δ_C ; U_2 l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites Δ_B et Δ_D et U_3 l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites Δ_C et Δ_E

   a. Calculer U_1, puis U_2.

   b. Déterminer x_0 pour que U_1, U_2 et U_3 soient les trois premiers termes d'une suite arithmétique. Quelle remarque peut-on faire sur l'abscisse du point E ?