∽ Baccalauréat S 2004 ∾

L'intégrale d'avril 2004 à mars 2005

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Baccalauréat S Pondichéry 1er avril 2004

Exercice 1 **3 points**

1. Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$

   a. Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.

   b. Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

   c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite de terme général v_n défini par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

   a. Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

   b. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par :

   $$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

   Exprimer S_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 **4 points**

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Il y a trois boules noires dans l'urne U_1, deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.
Les boules sont indiscernables au toucher.
Une partie se déroule de la façon suivante :
le joueur lance le dé,

- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 ;
- s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :
A : « Le dé amène le numéro 1. »
B : « Le dé amène un multiple de trois. »
C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1, ni un multiple de 3. »
N : « La boule tirée est noire. »

1. Le joueur joue une partie.

   a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\dfrac{5}{3k}$.

   b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

   c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

   d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\dfrac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\dfrac{1}{30}$.
Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.
Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Exercice 3 **8 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

1. **a.** Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Étudier le sens de variations de φ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, qui sera notée α.
   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

Partie B : étude de la position relative de deux courbes et calcul d'aire

Sur la feuille annexe page 5 sont tracées les courbes représentatives de deux fonctions f et g.
Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ sont notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées (0 ; 1) et admettent en ce point la même tangente.
   a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction étudiée dans la **partie A**.
   b. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. **a.** Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$h(x) = (-2x-3)\mathrm{e}^{-x} - \ln\left(x^2+x+1\right)$$

   est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto f(x) - g(x)$.
   b. En déduire l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = 0$.
   Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-4} de cette aire.

Exercice 4 : enseignement obligatoire **5 points**

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.
Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Donner la valeur exacte de $\left(z'\right)^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$; (unité graphique : 2 cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et B d'affixe $1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
Tracer ce cercle puis construire les points A et B.
2. On note O′ l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et B′ l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.
Calculer les affixes des points O′ et B′ et construire ces points.
3. Soit I le milieu du segment [OB].
   a. Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle AO′B′ ?
   b. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$.
   Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O'B'}}$ est égale à $3\sqrt{3}-\mathrm{i}$.
   c. La conjecture émise à la **question a** est-elle vraie ?.

Exercice 4 : exercice de spécialité **5 points**

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère les points A(0 ; 5 ; 5) et B(0 ; 0 ; 10).

1. Dans cette question, on se place dans le plan P_0 d'équation $x = 0$ rapporté au repère $\left(\mathrm{O},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre B passant par A.
Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.
2. On nomme $\mathscr{S}$ la sphère engendrée par la rotation du cercle $\mathscr{C}$ autour de l'axe (Oz) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz).
   a. Démontrer que le cône Γ admet pour équation $x^2 + y^2 = z^2$.
   b. Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère $\mathscr{S}$.
   Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.
   c. Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.
3. On coupe le cône Γ par le plan P_1 d'équation $x = 1$.
Dans P_1, l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection.
Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.
4. Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls.
Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.

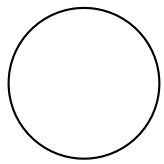


Figure 1

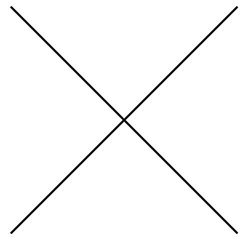


Figure 2

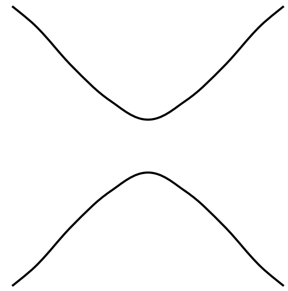
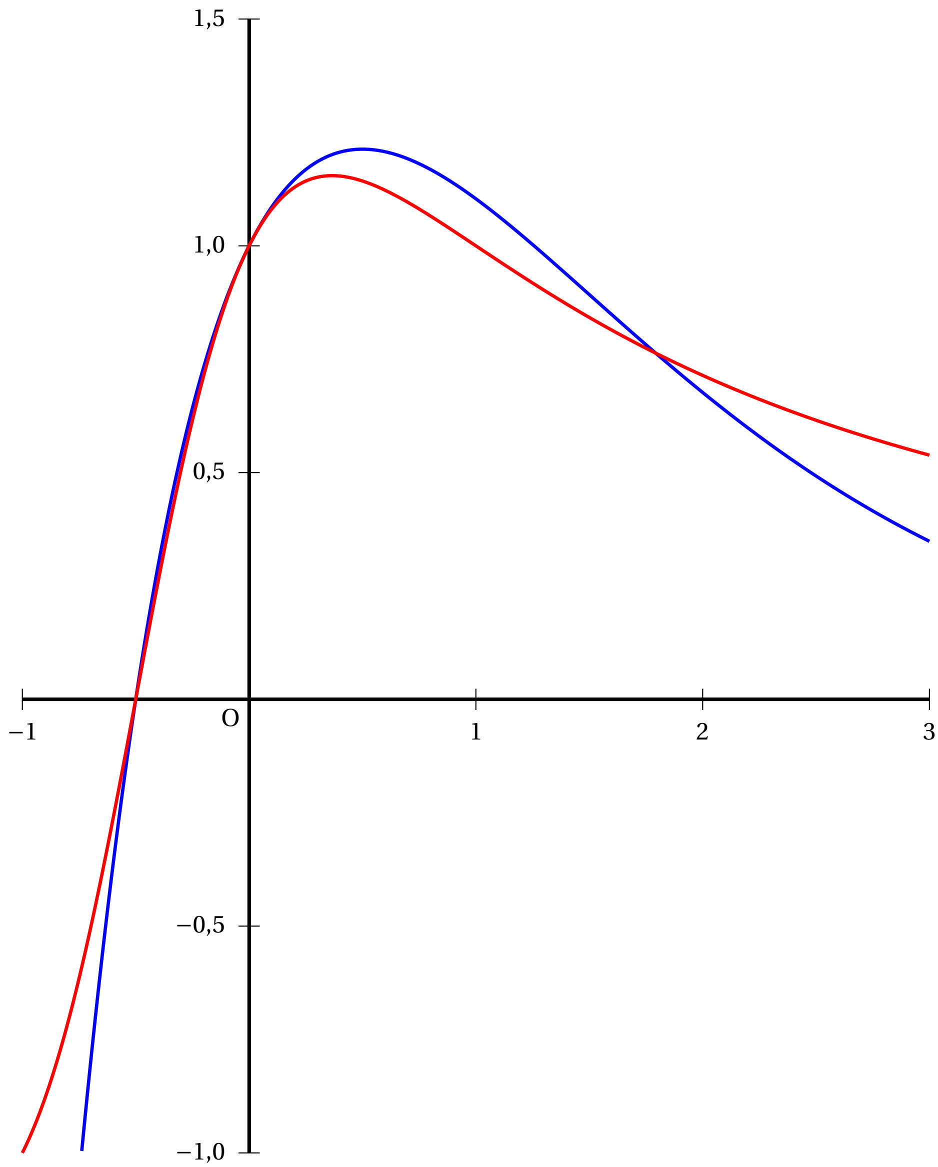


Figure 3

Exercice 3



∽ Baccalauréat S Amérique du Nord mai 2004 ∾

Exercice 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan affine, on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment [AB] et J le centre de gravité de ABC.

Pour tout réel m, différent de $-\dfrac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés

$$S_m = \{(\text{A},\ 1),\ (\text{B},\ m),\ (\text{C},\ 2m)\}.$$

Pour tout point M du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - 2\overrightarrow{M\text{C}}$.

Pour chacune des six affirmations suivantes, dite si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Chaque bonne réponse donne 0,5 *point, chaque réponse fausse ou illisible enlève* 0,25 *point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Un éventuel total négatif serait ramené à* 0.

Répondre aux affirmations sur la page annexe.

Affirmation	**V ou F**
G_1 est le milieu du segment [CI].	
G_1 est barycentre de $\left\{(\text{J},\ 2),\ \left(\text{C},\ \dfrac{2}{3}\right)\right\}$	
Pour tout point M, $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{\text{AB}} + 2\overrightarrow{\text{AC}}$.	
Pour tout m, distinct de $-\dfrac{1}{3}$, $\overrightarrow{\text{A}G_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\text{AG}_{-1}}$.	
$\text{IBG}_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.	
Pour tout point P de (AG_{-1}), il existe un réel m tel que $P = G_m$.	

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(\text{E}) \quad : z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0.$$

a. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :

$$(z-2)\left(z^2 + az + b\right) = 0.$$

b. Résoudre (E)

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant :

$$z^2 - 4 = 4 - \overline{z}^2.$$

a. On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M.
Montrer que : M appartient à (H) si et seulement si

$$x^2 - y^2 = 4.$$

b. Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $-3-\mathrm{i}\sqrt{5}$ et $-3+\mathrm{i}\sqrt{5}$.
Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

a. Déterminer les affixes de A$'$, B$'$ et C$'$, images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera ces affixes sous la forme algébrique).

b. On note M' l'image par r du point M d'affixe z. On note z' l'affixe de M'. Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y, celles de z' sont notées x' et y'. On note (H$'$) l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H).
— Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
— En utilisant la question **2. a.** prouver que : M' appartient à (H$'$) si et seulement si

$$x'y' = -2.$$

4. Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A$'$, B$'$, C$'$, la courbe (H$'$), puis la courbe (H).

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Soient les points A, A$'$, B et B$'$ d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1-2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{A}'} = -2+4\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 3-\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}'} = 5\mathrm{i}.$$

1. a. Placer les points A, A$'$, B et B$'$ dans le plan complexe. Monter que ABB$'$A$'$ est un rectangle.

b. Soit s la réflexion telle que s(A)=A$'$ et s(B)=B$'$. On note (Δ) son axe.
Donner une équation de la droite (Δ) et la tracer dans le plan complexe.

c. On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z.
Montrer que

$$z' = \left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z}+2\mathrm{i}-1.$$

2. Soit g l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z}+5-\mathrm{i}.$$

a. On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.

b. Soit Ω le point d'affixe $1+\mathrm{i}$ et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.
Montrer que C et D sont les images respectives de A$'$ et B$'$ par h.

c. Soit M_1 d'affixe z_1 l'image par h de M, d'affixe z. Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1.

3. On pose $f = h^{-1}\circ g$.

a. Déterminer l'expression complexe de f.

b. Reconnaître f. En déduire une construction du point P, image par g d'un point M quelconque donné du plan.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante :

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule.
Les trente cases, blanches (B), *jaunes* (J), *vertes* (V) *ou rouges* (R), *ont toutes la même probabilité d'être atteintes.*

- Si la fléchette atteint une case rouge, le joueur gagne 8 euros.
- Si la fléchette atteint une case verte, le joueur gagne 5 euros.
- Si la fléchette atteint une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien.
- Si la fléchette atteint une case blanche, le joueur perd a euros, la lettre a désigne un nombre réel positif.

1. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance $\mathrm{E}(X)$ soit nulle.

2. Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.

a. Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne ?

b. Un joueur joue 5 parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois ? exactement 5 fois ?

c. Quel est le nombre moyen de parties gagnantes dans la situation décrite en **2. b.** ?

EXERCICE 4 **8 points**
Commun à tous les candidats

Partie I

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_n) \qquad y' + y = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel :

$$g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$.
Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :

$$\text{(F)} \qquad y' + y = 0.$$

b. Résoudre (F).

c. Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).

d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

Le but de cette partie est de montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} \quad \text{(on rappelle que par convention} \quad 0! = 1).$$

1. On pose, pour tout x réel,

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x},\ f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b. Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
En utilisant la **Partie I**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x. \quad \text{(on ne cherchera pas à calculer } I_n\text{)}$$

a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0\,;\,1]$, l'encadrement :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}.$$

En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

b. Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = -\dfrac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$.

c. Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que :

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

d. En déduire finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1,\ b_0 = 7$ et $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{array}\right.$

Soit D une droite munie d'un repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1. Placez les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   Exprimez u_n en fonction de n.
3. Comparez a_n et b_n. étudiez le sens de variation des suites (a_n) et (b_n). Interprétez géométriquement ces résultats.
4. Démontrez que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (v_n) est une suite constante. En déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu I.
6. Justifiez que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculez leur limite. Interprétez géométriquement ce résultat.

EXERCICE 2 **7 points**

Commun à tous les candidats

But de l'exercice : approcher $\ln(1 + a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

Soit $a \in [0~;~+\infty[$.

On note $I_0(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a.
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a.
3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que
$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$
4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x$.
   Démontrez en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1 + a) - P(a)$.
5. Soit $J(a) = \displaystyle\int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t$. Calculez $J(a)$.
6. **a.** Démontrez que pour tout $t \in [0~;~a]$, $\dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$.
   b. Démontrez que pour tout $a \in [0~;~+\infty[$, $J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$.

7. En déduire que pour tout $a \in [0\,;\,+\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leqslant \dfrac{a^6}{6}$.
8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 *point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré* 0,5 *point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.*

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :

   A : $2\sqrt{2}$ **B** : $2\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$ **C** : $2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(2-\sqrt{2}\right)$ **D** : $2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}$

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

   A : $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **B** : $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **C** : $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ **D** : $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

3. z s'écrit sous forme exponentielle :

   A : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$ **B** : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ **C** : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}}$ **D** : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$

4. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

   A : $\dfrac{7\pi}{8}$ **B** : $\dfrac{5\pi}{8}$ **C** : $\dfrac{3\pi}{8}$ **D** : $\dfrac{\pi}{8}$

EXERCICE 4 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le tétraèdre ABCD ; on note I milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1. **a.** Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés
   $\{(\mathrm{A},\ 1)\ ;\ (\mathrm{B},\ 1)\ ;\ (\mathrm{C},\ -1)\ ;\ (\mathrm{D},\ 1)\}$.
   Exprimez $\overrightarrow{\mathrm{IG_1}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$. Placez I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).

   b. Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (D,\ 2)\}$.
   Démontrez que G_2 est le milieu du segment [ID]. Placez G_2.

   c. Démontrez que $\mathrm{IG_1DJ}$ est un parallélogramme.
   En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés
   $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (C,\ m-2)\ ;\ (D,\ m)\}$.

   a. Précisez l'ensemble $\mathscr{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
   Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

   b. Démontrez que G_m, appartient au plan (ICD).

   c. Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{\mathrm{J}G_m}$ est constant.

   d. En déduire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathscr{E}$.

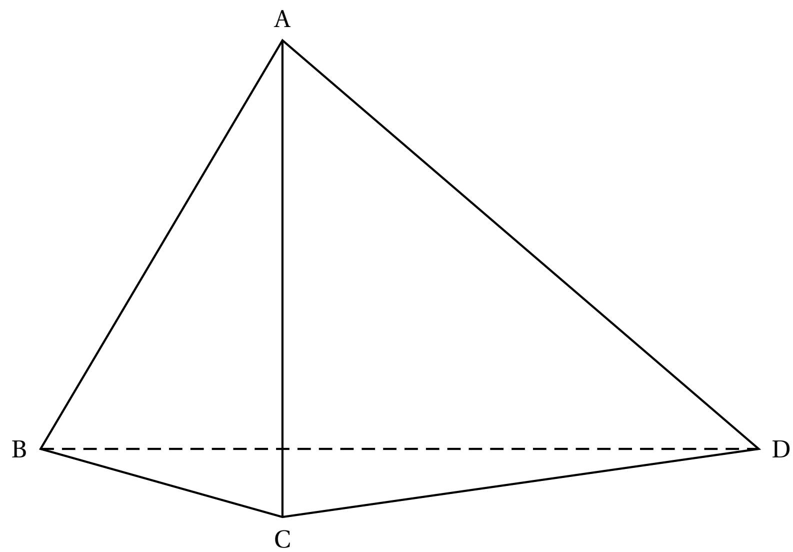
EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure.
2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   a. Précisez, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.
   b. Déterminez les images de R et de P par r.
   c. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS.
3. On note N le milieu du segment $[PS]$ et M celui du segment $[QR]$. Soit s la similitude de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
   a. Déterminez les images respectives de R et de P par s.
   b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?
   c. Démontrez que les points M, B, N et D sont alignés.

Annexe : exercice 4



Baccalauréat S Asie juin 2004

- **L'utilisation d'une calculatrice n'est pas autorisé**

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

À chacune des trois affirmations suivantes, répondre par « VRAI » ou par « FAUX ».
Aucune justification n'est demandée.

Données	Affirmations	Réponses
f est la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère du plan.	La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x$.	
G est le barycentre du système de points pondérés $\{(\mathrm{A}\,;\,-1),\ (\mathrm{B}\,;\,1),\ (\mathrm{C}\,;\,4)\}$	L'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + 4\overrightarrow{M\mathrm{C}}$, est une homothétie de rapport -3.	
$f(x) = x\sin 3x$	Les solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}x$ sont : 0 ; $\dfrac{\pi}{18} + 2k\dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{5\pi}{18} + 2k'\dfrac{\pi}{3}$, k et k' sont des entiers relatifs.	

Le barème est le suivant :

- Réponse exacte : 1 point.
- Réponse fausse : $-0,5$ point.
- Absence de réponse : 0 point.
- La note attribuée à l'exercice ne peut être négative.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{e}_1},\ \overrightarrow{\mathrm{e}_2}\right)$, unité graphique 1 cm.
Soit A le point d'affixe 3i. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{3\mathrm{i}z - 7}{z - 3\mathrm{i}}.$$

1. Recherche des points invariants par f.
   a. Développer $(z - 7\mathrm{i})(z + \mathrm{i})$.
   b. Montrer que f admet deux points invariants B et C dont on précisera les affixes et qu'on placera sur un dessin.
2. On appelle Σ le cercle de diamètre [BC]. Soit M un point quelconque de Σ, distinct de B et de C, soit M' son image par f.
   a. Justifier que l'affixe z de M vérifie : $z = 3\mathrm{i} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ est un nombre réel.
   b. Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de θ et en déduire que M' appartient aussi à Σ.
   c. Démontrer que $z' = -\overline{z}$ et en déduire, en la justifiant, une construction géométrique de M'.
3. On considère un cercle de centre A, de rayon $r > 0$. Déterminer l'image de ce cercle par f.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9 + a^2$ où a est un entier naturel non nul; par exemple $10 = 9 + 1^2$; $13 = 9 + 2^2$ etc.
On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$.

a. Montrer que si a existe, a est impair.

b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

a. Montrer que si $n \geqslant 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.

c. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geqslant 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 5^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.

b. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de **2 c** démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On appelle $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - y + 5 = 0$ et $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $3x + y - z = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants en une droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \alpha \\ y & = & 2\alpha + 5 \\ z & = & 5\alpha + 5 \end{array}\right. \qquad \text{où } \alpha \text{ est un nombre réel.}$$

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier précisément vos réponses :

- Affirmation 1 : $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{R}$ d'équation : $-5x + 5y - z = 0$.

Soit $\mathcal{D}'$ la droite de l'espace de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -3\beta \\ y & = & 1 + \beta \\ z & = & 2 + 2\beta \end{array}\right. \qquad \text{où } \beta \text{ est un nombre réel.}$$

- Affirmation 2 : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.

EXERCICE 4 **8 points**
Commun à tous les candidats

I : première partie étude d'une fonction f

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ par

$$f(x) = \ln(1 + 2x).$$

1. Justifier que f est strictement croissante sur l'intervalle I.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\dfrac{1}{2}$.

3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par $g(x) = f(x) - x$.

a. Étudier les variations de g sur l'intervalle I.

b. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions : 0 et une autre, notée β, appartenant à l'intervalle $[1 ; 2]$.

c. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle I.

4. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; \beta[$, $f(x)$ appartient aussi à $]0 ; \beta[$.

II : deuxième partie étude d'une suite récurrente

On appelle $(u_n)_{\geqslant 0}$ la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à $]0 ; \beta[$.

2. Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

3. Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

III : troisième partie Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$

1. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $f'(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$.

2. Recherche de la limite de la suite $(u_n)_{\geqslant 0}$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_{u_n}^{\beta} f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{2}{3}\left(\beta - u_n\right)$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $\beta - u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{3}\left(\beta - u_n\right)$, puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $0 \leqslant \beta - u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

c. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$?

∾ Baccalauréat S Centres étrangers juin 2004 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.
On appelle A le point d'affixe $-2i$.
À tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -2\overline{z} + 2i.$$

1. On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2i$.
   Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur le dessin.
2. Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ).
3. Démontrer que pour tout point M d'affixe z , $\left|z' + 2i\right| = 2|z + 2i|$; interprétez géométriquement cette égalité.
4. Pour tout point M distinct de A on appelle θ un argument de $z + 2i$.
   - **a.** Justifier que θ est une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right)$.
   - **b.** Démontrer que $(z + 2i)(z' + 2i)$ est un réel négatif ou nul.
   - **c.** En déduire un argument de $z' + 2i$ en fonction de θ.
   - **d.** Que peut-on en déduire pour les demi-droites $[AM)$ et $[AM')$?
5. En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé au point M.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,50 €.
Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\dfrac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\dfrac{1}{20}$.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'évènement : « l'employé est en retard le jour n ».
On note p_n, la probabilité de R_n et q_n, celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence.
   - **a.** Déterminer les probabilités conditionnelles $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.
   - **b.** Déterminer $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p\left(R_{n+1} \cap \overline{R_n}\right)$ en fonction de q_n
   - **c.** Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n.
   - **d.** En déduire que $p_{n+1} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20}p_n$.
2. Étude de la suite $\left(p_n\right)$.
   Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = p_n - \dfrac{4}{23}$.
   - **a.** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{20}$.
   - **b.** Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.
   - **c.** Justifier que la suite $\left(p_n\right)$ est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :
« *Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre* 1 *peuvent-ils être premiers*? »
Pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, on pose $N_p = 1\ldots1$ où 1 apparaît p fois.
On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0$.

1. Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1\,111$ sont-ils premiers?
2. Prouver que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9?
3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.
   On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,
   $$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right).$$
   a. On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
   Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.
   b. On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
   Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.
   c. On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.
   En déduire que N_p est divisible par N_k.
4. énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
   Cette condition est-elle suffisante?

EXERCICE 3 **9 points**

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise.
Les fonctions f associées définies sur l'intervalle $[0 ; 1]$ doivent vérifier les conditions suivantes :
(1) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
(2) f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$
(3) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$, $f(x) \leqslant x$.
Le plan est rapporté au repère orthonormal $\mathscr{R} = \left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 10 cm.

I. Première partie étude d'un modèle

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par
$$g(x) = x\text{e}^{x-1}.$$

1. Prouver que g vérifie les conditions (1) et (2).
2. Montrer que $g(x) - x = \dfrac{x}{\text{e}}\left(\text{e}^x - \text{e}\right)$ et en déduire que g vérifie la condition (3).
3. Tracer les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ et la courbe représentative de g dans le repère $\mathscr{R}$.

II. Seconde partie Un calcul d'indice

Pour une fonction f vérifiant les conditions (1), (2) (3), on définit un indice I_f égal à l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine plan M délimité par les droites d'équations $y = x$, $x = 1$ et la courbe représentative de f.

1. Justifier que $I_f = \displaystyle\int_0^1 \left[x - f(x)\right]\text{d}x$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'indice I_g, associé à g.

3. On s'intéresse aux fonctions f_n, définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2x^n}{1+x}$$

où n est un entier naturel supérieur en égal à 2. On admet que ces fonctions vérifient les conditions (1), (2), (3) et on se propose d'étudier l'évolution de leur indice I_n lorsque n tend vers l'infini.

a. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left[x - f_n(x)\right]\,\mathrm{d}x$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Prouver que $I_n = \dfrac{1}{2} - u_n$.

b. Comparer $\dfrac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\dfrac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$; en déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c. Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$0 \leqslant \frac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^n.$$

d. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n+1}$.

e. Déterminer alors la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Métropole juin 2004 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n + 2n + 3 \quad \text{pour tout entier naturel} \quad n. \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3. Conjecturer une expression de u_n, en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $(1+\mathrm{i})^6 = -8\mathrm{i}$.

2. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8\mathrm{i}$.

a. Déduire de **1.** une solution de l'équation (E).

b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

3. Déduire également de **1.** une solution de l'équation (E') $z^3 = -8\mathrm{i}$.

4. On considère le point A d'affixe 2i et la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

a. Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.

b. Montrer que b et c sont solutions de (E$'$).

5. **a.** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm), représenter les points A, B et C.

b. Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

c. Déterminer le centre de gravité de cette figure.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)\left(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}\right) = x^k - 1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. **a.** Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$.
Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

b. Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.

a. On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bezout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu - nv = d$.

b. On suppose u et v strictement positifs.
Montrer que : $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)\, a^d = a^d - 1$.
Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse inexacte enlève 1/2 point l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on donne le point S(1 ; −2 ; 0) et le plan P d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

$$\textbf{A} : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t \\ y &=& 1-2t \\ z &=& -3 \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \quad \textbf{B} : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t \\ y &=& -1+t \\ z &=& 1-3t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{C} : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t \\ y &=& -2-2t \\ z &=& 3t \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \quad \textbf{D} : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t \\ y &=& -1+t \\ z &=& -3-3t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :
   A : $(-4\,;\,0\,;\,0)$ **B** : $\left(\frac{6}{5}\,;\,\frac{-9}{5}\,;\,\frac{3}{5}\right)$ **C** : $\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{-2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$ **D** : $\left(\frac{8}{11}\,;\,\frac{-25}{11}\,;\,\frac{9}{11}\right)$

3. La distance du point S au plan P est égale à :
   A : $\frac{\sqrt{11}}{3}$ **B** : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ **C** : $\frac{9}{\sqrt{11}}$ **D** : $\frac{9}{11}$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère S et du plan P est égale
   A : au point I(1 ; −5 ; 0)
   B : au cercle de centre H et de rayon $r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}$
   C : au cercle de centre S et de rayon $r = 2$
   D : au cercle de centre H et de rayon $r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

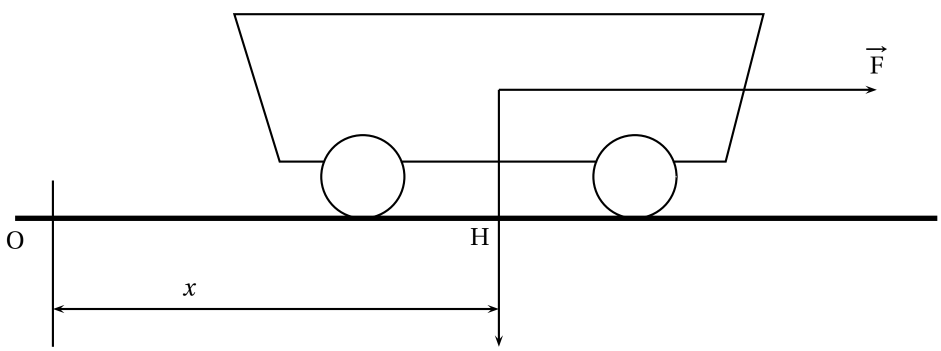
On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est

$$p([0\,;\,t[) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\,;\,200[) = 0,5$.

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.
2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure? 300 semaines? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.
3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
   a. Montrer que $\displaystyle\int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{-\lambda A \mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$
   b. En déduire d_m on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

Exercice 5 **4 points**
Commun à tous les candidats



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles? la vitesse et de sens contraire; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 N.m^{-1}.s.
La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$. Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement

$$\text{(E)} \qquad 25x' + 200x'' = 50, \text{ où}$$

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,
x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1. On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t; on rappelle que $v(t) = x'(t)$.
   Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $\quad v' = -\dfrac{1}{8}v + \dfrac{1}{4}$.
   Résoudre l'équation différentielle (F).
2. On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.
   a. Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.
   b. En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif,
   $x(t) = 2t - 16 + 16\mathrm{e}^{\frac{-t}{8}}$.
3. Calculer $\mathrm{V} = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure ou égale à 90 % de sa valeur limite V?
4. Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes?
   On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

Baccalauréat S Liban juin 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique).
12 % des personnels sont des médecins et 71 % sont des soignants.
67 % des médecins sont des hommes et 92 % des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.

1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.
   a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
   b. Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
   c. On sait que 80 % du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.
   En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.
2. Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0 ; 1]$.
   On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 20 min ?
3. Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).
   Quelle est la probabilité que, sur les 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z-2\text{i})\left(z^2-2z+2\right)=0.$$

   Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme exponentielle (justifier les réponses).
2. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1+\text{i}$ et $z_{\text{B}} = 2\text{i}$.
   À tout complexe z différent de A on associe le complexe

$$z' = \frac{z-2\text{i}}{z-1-\text{i}}.$$

   a. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
   Montrer que $\text{B} \in (E)$.
   Déterminer et construire l'ensemble (E).
   b. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|z'\right| = 1$.
   Déterminer et construire (F).

3. Soit R la rotation de centre $\Omega\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   a. Calculer l'affixe du point B', image de B par R et l'affixe du point I', image par R du point $\mathrm{I}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$.

   b. Quelles sont les images de (E) et (F) par R ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 2+\mathrm{i},\quad z_{\mathrm{B}} = 1+2\mathrm{i},\quad z_{\mathrm{C}} = 6+3\mathrm{i},\quad z_{\mathrm{D}} = -1+6\mathrm{i}.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.
2. Montrer qu'il existe une similitude directe f telle que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$.
   Montrer que cette similitude est une rotation, et préciser ses éléments caractéristiques.
3. Soit J le point d'affixe $3+5\mathrm{i}$.
   Montrer que la rotation R de centre J et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.
4. On appelle I le point d'affixe $1+\mathrm{i}$, M et N les milieux respectifs de segments [AC] et [BD].
   Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère IMJN.
5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères IAPB et ICQD sont des carrés directs.

   a. Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q.

   b. Déterminer $\dfrac{\mathrm{I}P}{\mathrm{IA}}$ et $\dfrac{\mathrm{I}Q}{\mathrm{IC}}$ ainsi qu'une mesure des angles $\left(\overrightarrow{\mathrm{IA}},\,\overrightarrow{\mathrm{I}P}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{IC}},\,\overrightarrow{\mathrm{I}Q}\right)$.
   En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(\mathrm{A}) = P$ et $g(\mathrm{C}) = Q$.

   c. En déduire que J est l'image de M par g. Que peut-on en déduire pour J ?

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x.

   a. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n supérieur ou égal à k,

   $$\frac{k^n}{n!} \leqslant \frac{k^k}{k!}.$$

   b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à k,

   $$\frac{x^n}{n!} \leqslant \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}.$$

   c. Montrer que

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

2. **a.** Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$\frac{n^{n-1}}{n!} \geqslant 1.$$

(on pourra écrire $\dfrac{n^{n-1}}{n!}$ comme un produit de $n-1$ facteurs supérieurs ou égaux à 1).

b. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{\mathrm{e}^x+1},$$

et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$, et sa limite en $-\infty$.
2. Calculer, pour tout réel x, $f(x)+f(-x)$.
   Que peut-on en déduire pour le point $\mathrm{A}(0\ ;\ 1+\ln 4)$?
3. Étudier le sens de variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
4. **a.** Justifier que, pour tout réel m, l'équation $f(x)=m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la solution a de l'équation $f(x)=3$.
   Justifier la réponse.
   c. Pour quelle valeur de m le nombre $-a$ est-il la solution de l'équation $f(x)=m$?
5. **a.** Montrer que pour tout réel x, $f(x) = x+2+\ln 4 - \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.
   b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x+\ln 4$ et la droite (Δ') d'équation $y = x+2+\ln 4$ sont des asymptotes de la courbe $(\mathscr{C})$.
   Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à son asymptote (Δ).
6. **a.** On considère un réel positif α.
   Que représente l'intégrale :

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \left[f(x) - x - \ln 4\right]\,\mathrm{d}x ?$$

   b. Montrer que $I(\alpha) = 2\ln\left(\dfrac{2\mathrm{e}^{\alpha}}{\mathrm{e}^{\alpha}+1}\right)$. (On pourra utiliser le résultat de la question **5 a**).
   c. Calculer α pour que $I(\alpha)=1$, puis donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

∽ Baccalauréat S Polynésie juin 2004 ∾

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est $0,125$.
   On prendra $0,125$ pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.
2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans ?
4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?
5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?
   Rappel :
   Loi exponentielle de paramètre λ *sur* $[0\,;\,+\infty[$, *dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement* :
   pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $p([a\,;\,b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ et
   pour $c \geqslant 0$, $p([c\,;\,+\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 3 + 2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = -3 \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{I}} = 1 - 2\mathrm{i}.$$

   a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.
   b. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \dfrac{z_{\mathrm{I}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{I}} - z_{\mathrm{B}}}$.
   Que peut-on en déduire sur la nature du triangle IAB ?
   c. Calculer l'affixe z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.
   d. Soit D le barycentre du système $\{(\mathrm{A},\,1)\,;\,(\mathrm{B},\,-1)\,;\,(C,\,1)\}$; calculer l'affixe z_D du point D.
   e. Montrer que ABCD est un carré.

2. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que :

$$\left\| \overrightarrow{M\mathrm{A}} - \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{MC} \right\| = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{MC} \right\|.$$

3. On considère l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que

$$\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 4\sqrt{5}.$$

a. Montrer que B appartient à Γ_2.

b. Déterminer et construire l'ensemble Γ_2.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan P est rapporté a un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 3 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que

$$\text{a} = 3 \qquad \text{b} = 1 + \frac{2}{3}\text{i} \qquad \text{c} = 3\text{i} \quad \text{et} \quad \text{d} = -\frac{1}{3}\text{i}.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.

2. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s transformant A en B et C en D.

3. Donner l'écriture complexe de s. En déduire l'affixe du centre I de s.

4. Soit M le point de coordonnées $(x~;~y)$ et $M'(x'~;~y')$ son image par s.

Montrer que : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -\dfrac{1}{3}y + 1 \\ y' & = & \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

5. On construit une suite (M_n) de points du plan en posant

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{M}_0 & = & \text{A} \\ \multicolumn{3}{l}{\text{et, pour tout entier naturel } n} \\ M_{n+1} & = & s(M_n) \end{array}\right.$$

Pour tout entier naturel, on note z_n l'affixe du point M_n et on pose $r_n = |z_n - 1|$.

a. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $\text{I}M_k \leqslant 10^{-3}$.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. Pour tout réel k positif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + \frac{1 - k\text{e}^x}{1 + k\text{e}^x}.$$

a. Justifier que, pour tout réel k positif ou nul, la fonction f_k est solution de l'équation différentielle :

$$(\text{E}) \qquad : \quad 2y' = (y - x)^2 + 1.$$

b. En déduire le sens de variations de f_k sur $\mathbb{R}$.

2. On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.
Sur l'annexe, on a représenté la droite D d'équation $y = x - 1$, la droite D$'$ d'équation $y = x + 1$ et plusieurs courbes $\mathscr{C}_k$ correspondant à des valeurs particulières de k.
Déterminer le réel k associé à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point O puis celui associé à la courbe $\mathscr{C}'$ passant par le point A de coordonnées $(1\,;\,1)$.

3. On remarque que, pour tout x réel, on a :

$$f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + k\mathrm{e}^x} \quad (1) \quad \text{et} \quad f_k(x) = x + 1 - \frac{2k\mathrm{e}^x}{1 + k\mathrm{e}^x} \quad (2).$$

En déduire pour tout k strictement positif :

— la position de la courbe $\mathscr{C}_k$ par rapport aux droites D et D$'$.

— les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_k$.

4. Cas particulier : $k = 1$.

a. Justifier que f_1 est impaire

b. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f_1(t)\,\mathrm{d}t.$$

Interpréter graphiquement le réel $F(x)$ dans les deux cas : $x > 0$ et $x < 0$.

Déterminer alors la parité de F à l'aide d'une interprétation graphique.

c. Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$.

d. En utilisant l'égalité (2), calculer explicitement $F(x)$.

EXERCICE 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1 + n + t}\,\mathrm{d}t.$$

1. a. Déterminer le sens de variations de cette suite.

b. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite positive.

c. Montrer que pour tout $t \in [0~;~1]$ on a $\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1 + t + n} \leqslant \dfrac{1}{1 + n}$ et en déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n + 1}$.

Que peut-on en conclure quant à la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. On considère f et g deux fonctions définies sur $[0~;~1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \mathrm{e}^{-x}.$$

a. Étudier le sens de variations et le signe de f.

b. En déduire le sens de variations de g sur $[0~;~1]$.

c. Établir, pour tout x appartenant à $[0~;~1]$, l'encadrement :

$$1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

d. En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout t appartenant à $[0~;~1]$.

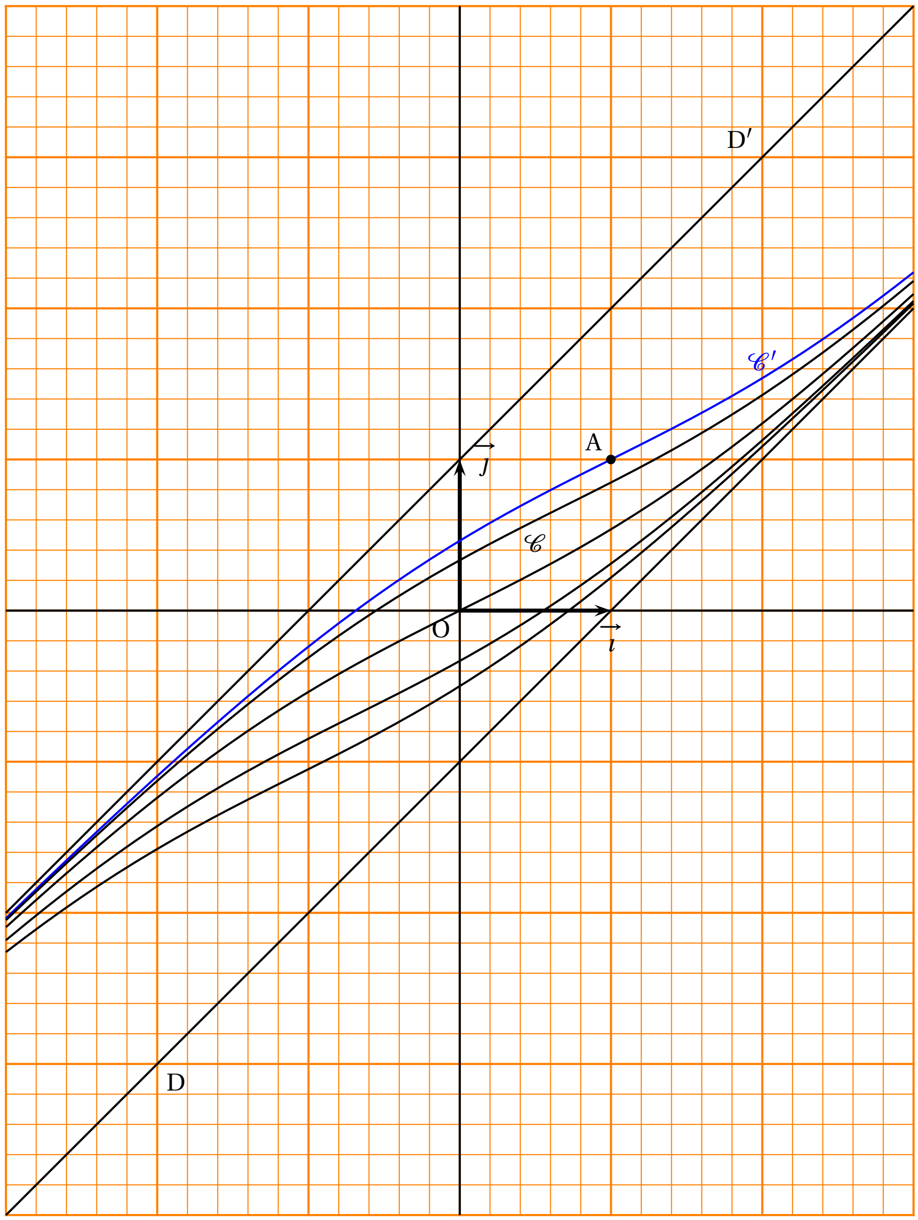
e. Établir l'encadrement :

$$\frac{2}{3(n+2)} \leqslant I_n \leqslant \frac{23}{30(n+1)}$$

f. Donner une valeur de p telle que $I_p \leqslant 10^{-2}$.

Document à rendre avec la copie

Annexe



Baccalauréat S La Réunion juin 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

Son tableau de variations est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ et son asymptote Δ, d'équation $y = 1$, sont tracées en annexe, à rendre avec la copie.

A - Lecture graphique

1. k est un nombre réel donné. En utilisant la représentation graphique, préciser en fonction de k le nombre de solutions dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation $f(x) = k$.
2. n étant un entier naturel non nul, déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes.

B - Définition et étude de deux suites

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions u_n et v_n respectivement comprises dans les intervalles $[0\ ;\ 1]$ et $[1\ ;\ +\infty[$.
2. Sur la feuille en annexe, construire sur l'axe des abscisses les réels u_n et v_n pour n appartenant à l'ensemble $\{2\ ;\ 3\ ;4\}$.
3. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
   Procéder de même pour la suite (v_n). En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$; i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, $1 + \mathrm{i}$ et $-1 + \mathrm{i}$.
Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z, associe le point M' du plan d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}z + 2}{z - \mathrm{i}}.$$

1. **a.** Déterminer les images de B et de C par l'application f.
   b. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, on a la relation :

$$\left(z' - \mathrm{i}\right)(z - \mathrm{i}) = 1.$$

c. Soit D le point d'affixe 1 + 2i. Placer les points A, B, C et D sur une figure (unité graphique 4 cm).

Déduire de la question précédente une construction du point D′ image du point D par l' application f.

2. Soit R un nombre réel strictement positif.

Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R ?

3. a. Montrer que, si l'affixe du point M est un imaginaire pur différent de i, alors l'affixe du point M' est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application f de l'axe imaginaire privé du point A ?

b. Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Déterminer l' image de la droite $\mathscr{D}$ privée du point A par l'application f.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p ».

1. Soit p un nombre premier impair.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$.

b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1 \quad [p]$.

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.

Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1 \quad [p]$, alors b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$.

On prend pour p un facteur premier de A.

a. Justifier que : $2^q \equiv 1 \quad [p]$.

b. Montrer que p est impair.

c. Soit b tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.

Montrer, en utilisant **1.** que b divise q. En déduire que $b = q$.

d. Montrer que q divise $p - 1$, puis montrer que $p \equiv 1 \quad [2q]$.

3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m + 1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :

B_1, 6 000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,

B_2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3 800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

   A : $\dfrac{\binom{120}{3}+\binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}}$ **B :** $\dfrac{3}{120}$

   C : $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{120}{6000}\right)^3\times\left(\dfrac{5880}{6000}\right)^7$ **D :** $\binom{10}{3}\times\left(\dfrac{3}{120}\right)^3\times\left(\dfrac{7}{5880}\right)^7$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

   A : $0,98$ **B :** $\dfrac{0,4\times 0,95}{0,6\times 0,98+0,6\times 0,02}$

   C : $0,6\times 0,98$ D : $\dfrac{0,6\times 0,98}{0,6\times 0,98+0,4\times 0,95}$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0005$). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$p\left([0\,;\,t[\right)=\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

   A : $\mathrm{e}^{-\frac{2500}{2000}}$ **B :** $\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}$ **C :** $1-\mathrm{e}^{-\frac{2500}{2000}}$ **D :** $\mathrm{e}^{-\frac{2000}{2500}}$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule :

   $\mathrm{E}=\lim\limits_{t\to+\infty}\displaystyle\int_0^t \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$

   a. L'intégrale $\displaystyle\int_0^t \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

   A : $\lambda\dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda t}$ **B :** $-t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}+\dfrac{1}{\lambda}$ **C :** $\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda$ **D :** $t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{-\lambda}$

   b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

   A : 3 500 **B :** 2 000 **C :** 2 531,24 **D :** 3 000

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée.
Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel x, $\left[f'(x)\right]^2-\left[f(x)\right]^2=1$,
(2) $f'(0)=1$,
(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)\neq 0$.

   b. Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

   (4) pour tout nombre réel x, $f''(x)=f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.

3. On pose : $u=f'+f$ et $v=f'-f$.

   a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

   b. Démontrer que $u'=u$ et $v'=-v$.

c. En déduire les fonctions u et v.

d. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{\text{e}^{x} - \text{e}^{-x}}{2}$.

4. **a.** Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

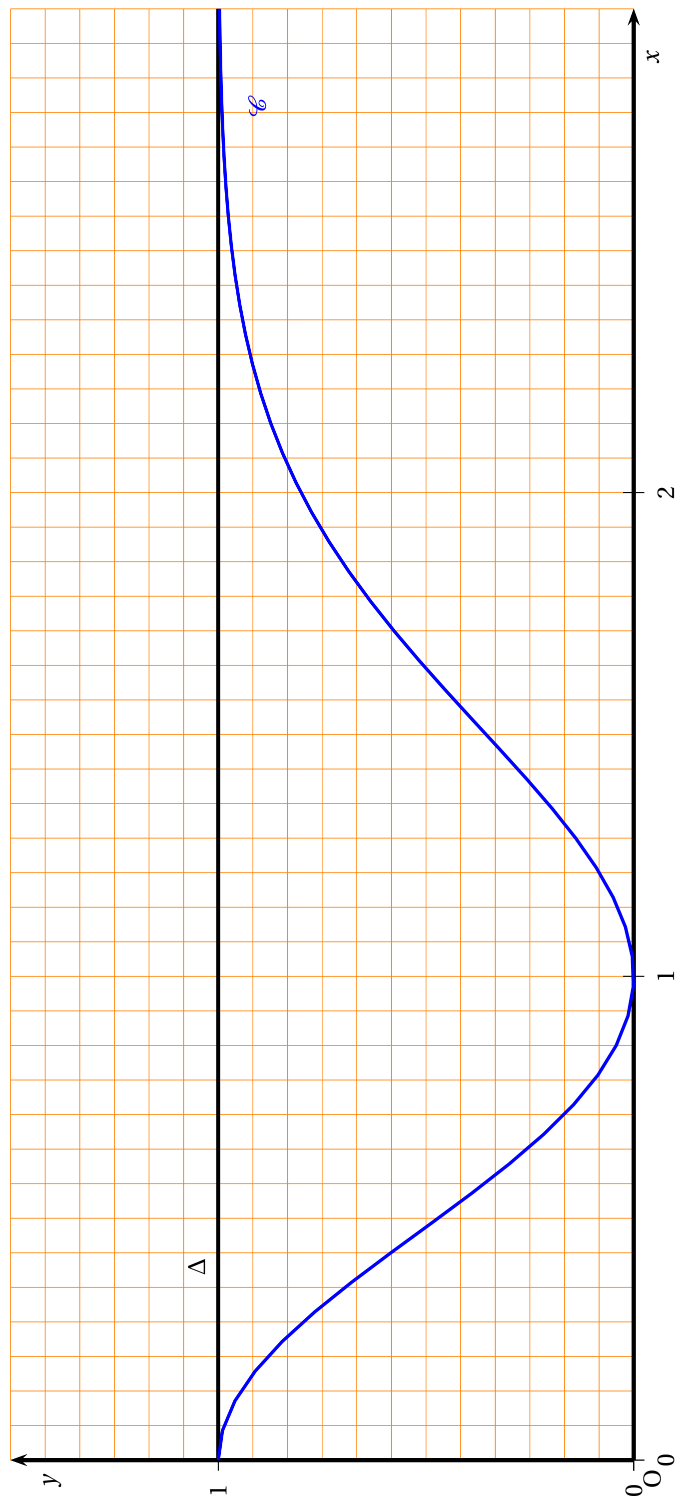
b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. **a.** Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b. Déterminer cette solution lorsque $m = 3$ (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à 10^{-2} près).

ANNEXE DE L'EXERCICE 1

À compléter et à rendre avec la copie



∽ Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2004 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x+2}.$$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.

Partie A

1. Dresser le tableau des variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.
2. **a.** Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction f et de la fonction logarithme népérien ; on notera $\mathscr{L}$ cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{sur } [1\,;\,+\infty[.$$

b. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \ln(x) - f(x)$$

est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
En déduire que l'équation $f(x) = \ln(x)$ admet une unique solution α sur $[1\,;\,+\infty[$.

c. Déterminer à 10^{-3} près une valeur approchée de α.

Partie B

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer :

$$\mathrm{I} = \int_0^3 x^2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

2. On définit le solide $\mathscr{S}$ obtenu par révolution autour l'axe $(\mathrm{O}x)$ de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 3$ dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ (repère orthonormal d'unité 4 cm). On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ du solide est donné par :

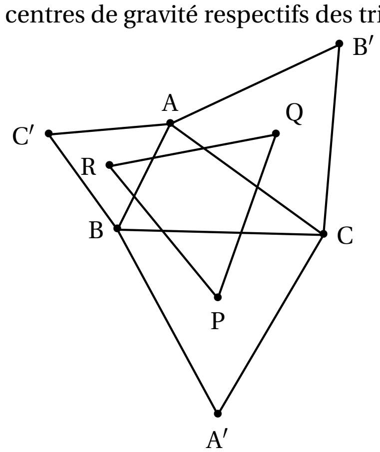
$$\mathscr{V} = \pi\int_0^3 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

a. Exprimer $\mathscr{V}$ en fonction de I.

b. Déterminer alors une valeur approchée à 1 cm^3 près du volume du solide.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct, on considère ABC un triangle direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA′, ACB′ et ABC′. On considère respectivement les points P, Q et R centres de gravité respectifs des triangles B CA′, ACB′ et ABC′.



On note $a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c',\ p,\ q$ et r les affixes respectives des points A, B, C, A′, B′, C′, P, Q et R.

1. **a.** Traduire, avec les affixes des points concernés, que C′ est l'image de A dans une rotation d'angle de mesure dont on précisera le centre.

   b. Montrer que $a'+b'+c'=a+b+c$.
2. En déduire que $p+q+r=a+b+c$.
3. En déduire que les triangles ABC, A′B′C′ et PQR ont même centre de gravité.
4. Montrer que :

$$3(q-p)=\left(b'-c\right)+\left(c-a'\right)+(a-b).$$

   On admettra que, de même : $3(r-p)=(a-c)+\left(b-a'\right)+\left(c'-b\right)$.
5. Justifier les égalités suivantes :

$$a-c=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\left(b'-c\right)\ ;\ b-a'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\left(c-a'\right)\ ;\ c'-b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-b).$$

6. Déduire des **questions 4.** et **5.** que le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE 3 (OBLIGATOIRE) **5 points**

$\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.
Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe -1.
Soit F l'application de $\mathscr{P}$ privé de O dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M distinct de O, d'affixe z, associe le point $M'=F(M)$ d'affixe $z'=\dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1. **a.** Soit E le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, on appelle E′ son image par F. Déterminer l'affixe de E′ sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

   b. On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application F.
2. **a.** Soit K le point d'affixe $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ et K′ l'image de K par F. Calculer l'affixe de K′.

   b. Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_2$ par l'application F.
3. On désigne par R un point d'affixe $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta\in]-\pi\ ;\ \pi[$; R appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1.

   a. Montrer que $z'+1=\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$.

   En déduire que $\left|z'+1\right|=\left|z'\right|$.

   b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ décrit l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat de **a.**.

EXERCICE 3 (SPÉCIALITÉ) **5 points**

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.
2. Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1 et par 2^q-1.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, 2^n-1 n'est jamais divisible par 9.
4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation :

$$24x+35y=9$$

   est l'ensemble des couples :

$$(-144+70k\ ;\ 99-24k)\ \text{où}\ k\in\mathbb{Z}.$$

5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{1}{3}$ alors $g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$..

6. Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = \text{i}\overline{z} + (1 - \text{i})$, l'ensemble des points invariants de s est une droite.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour chacune des trois questions, la totalité des points sera donnée si la réponse est correctement justifiée.
Les trois questions sont indépendantes.

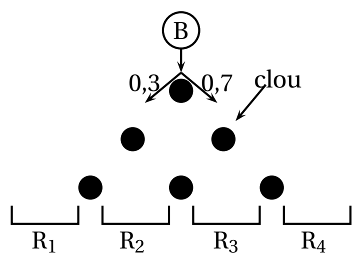
1. La probabilité pour un individu d'une population d'être atteint d'une maladie M est égale à 0,003. Un test de dépistage, pour cette maladie, a été réalisé ; avec ce test, on peut dire que

- si une personne est atteinte de la maladie M, le test est positif dans 50 % des cas ;
- le test est positif pour 3 % des personnes saines.

Quelle est à 0,01 près la probabilité d'avoir la maladie M lorsque le test est positif ?

☐ $0,95$ ☐ $0,9$ ☐ $0,15$ ☐ $0,05$

2. On considère une planche à clous de ce type :



On lance une boule B du haut de la planche, elle tombe alors dans l'un des quatre récipients notés R_1, R_2, R_3 et R_4. À chaque étape, la bille a une probabilité de 0,3 d'aller vers la gauche et 0,7 d'aller vers la droite (gauche et droite relatives à l'observateur).
On note p_1 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_1 ou dans le bac R_3 et p_2 la probabilité que la bille tombe dans le bac R_2 ou dans le bac R_4.
Que valent p_1 et p_2 ?

☐ $p_1 = p_2 = 0,5$ ☐ $p_1 = 0,216$ et $p_2 = 0,784$
☐ $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,532$
☐ $p_1 = 0,468$ et $p_2 = 0,432$.

3. Les 1 000 premières décimales de π sont données ici par un ordinateur :

1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510
5820974944	5923078164	0628620899	8628034825	3421170679
8214808651	3233066470	9384460959	0582235725	3594085234
8111745028	4102701930	5211055596	4462294895	4930301964
4288109756	6593344612	8475648233	7867831652	7120190914
5648566923	4603486534	5432664825	3393607260	2491412737
2450700660	6315580574	8815209209	6282925409	1715364367
8925903600	1133053054	8820466525	3841469519	4151160943
3057270365	7595919530	9218611738	1932611793	1051185480
7446297996	2749567355	8857527240	9122793318	3011949129
8336733624	4065664308	6025394946	3952247371	9070217986
0943702770	5392171762	9317675238	4674818467	6691051320
0056812714	5263560827	7857753427	9778900917	3637178721
4684409012	2495343054	6549585371	0507922796	8925892354
2019956112	1290219608	6403441815	9813629774	7713099605
1870721134	9999998372	9780499510	5973173281	6096318599
0244594553	4690830264	2522300253	3446850352	6193110017
1010003137	8387528865	8753320830	1420617177	6691473035
9825349042	8755460731	1595620633	8235378759	3751957781
8577805321	7122600661	3001927876	6111959092	1642019894

En groupant par valeurs entre 0 et 9 ces décimales, on obtient le tableau suivant :

Valeurs	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Occurrences	93	116	102	102	94	97	94	95	101	106

Avec un tableur, on a simulé 1 000 expériences de 1 000 tirages aléatoires d'un chiffre compris entre 0 et 9.

Pour chaque expérience, on a calculé $d^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=9} \left(f_k - 0,1\right)^2$ où f_k représente, pour l'expérience, la fréquence observée du chiffre k.

On a alors obtenu une série statistique pour laquelle on a calculé le premier et neuvième décile (d_1 et d_9), le premier et troisième quartile (Q_1 et Q_3) et la médiane (Me) :

$d_1 = 0,000\,422$; $Q_1 = 0,000\,582$; Me $= 0,000\,822$; $Q_3 = 0,001\,136$; $d_9 = 0,001\,45$.

En effectuant le calcul de d_2 sur la série des 1 000 premières décimales de π, on obtient :

☐ 0,000 456 ☐ 0,004 56 ☐ 0,000 314

Un statisticien découvrant le tableau et ignorant qu'il s'agit des décimales de π, fait l'hypothèse que la série est issue de tirages aléatoires indépendants suivant une loi équirépartie. Il prend un risque de 10 % de rejeter cette hypothèse quand elle est vraie. Accepte-t-il cette hypothèse ?

☐ Oui ☐ Non ☐ Il ne peut pas conclure.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole septembre 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}.$$

   a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

   b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

   Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer :

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2} \ln x \, \mathrm{d}x.$$

   On donnera le résultat exact sous la forme $p\ln 2 + q\ln 3$, avec p et q rationnels.

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.
Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, les couples solutions de l'équation $x^y = y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

   La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction h est donnée en annexe ; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   a. Rappeler la limite de la fonction h en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction h en 0.

b. Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h; retrouver les variations de la fonction h.

Déterminer les valeurs exactes de x_0 et de $h(x_0)$.

c. Déterminer l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

3. Soit λ un élément de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{1}{\text{e}}\right[$.

Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1\,;\,\text{e}[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]\text{e}\,;\,+\infty[$ tels que $h(a) = h(b) = \lambda$.

Ainsi le couple $(a,\ b)$ est solution de (E).

4. On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle $[1\,;\,\text{e}[$, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]\text{e}\,;\,+\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$ (on ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de a).

Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes

a. Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?

b. Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?

c. Déterminer les variations de la fonction s. Dresser le tableau de variations de s.

5. Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B.

Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments KI et K2.

L'expérience est modélisée de la façon suivante :

— une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$;

— une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.

Partie A

1. Soit une particule au hasard.

Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 »,

A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 »,

B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 »,

B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 »,

C1 : « la particule entre dans K1 »,

C2 : « la particule entre dans K2 ».

2. On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.

Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.

Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B; chaque particule A donne en se transformant une particule B.

On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0,75$.
Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0,75\mathrm{e}^{-\lambda t}$, où λ est une constante réelle.
La demi-vie [1] des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.
2. Au bout de combien d'années 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?
3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes

$$a = 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad b = 4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}.$$

   a. Écrire a et b sous forme exponentielle.
   b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.
Déterminer l'affixe d du point D.
4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés (O ; −1), (D ; + 1),
(B ; + 1).
   a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe
   $g = 4\sqrt{3} + 6\mathrm{i}$.
   b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.
   c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.
   d. Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.
5. Quelle est la nature du triangle AGC ?

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

A et C sont deux points distincts du plan ; on note Γ le cercle de diamètre [AC] et O le centre de Γ ; B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.
Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = +\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
Le point G est le centre de gravité du triangle BCD.
Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.

Partie A

1. temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

1. Placer les points D, G et M sur la figure de la feuille annexe.

2. Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment [BC] et que le point G est le milieu du segment [CM].

3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en M.

Partie B

Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et 1.

Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral direct; on a donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}},\,\overrightarrow{\mathrm{A}E}\right) = +\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

1. Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.

2. Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z' = \dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}z + \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$.

Déterminer les éléments caractéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproque de s.

3. Montrer que l'image E' du point E par σ a pour affixe $-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E' appartient au cercle Γ.

4. On note $\mathscr{C}$ le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C.

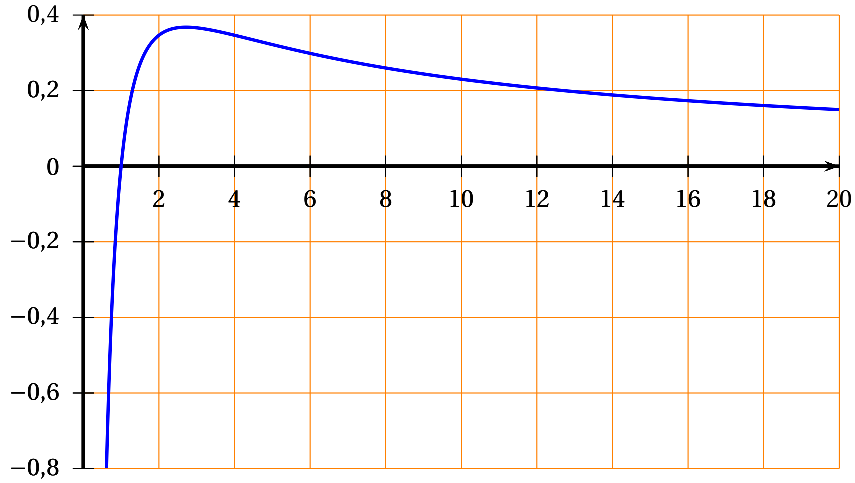
Montrer que le point E appartient à $\mathscr{C}$.

Soit O$'$ l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point O$'$ est le centre de gravité du triangle ACE.

En déduire une construction de $\mathscr{C}$.

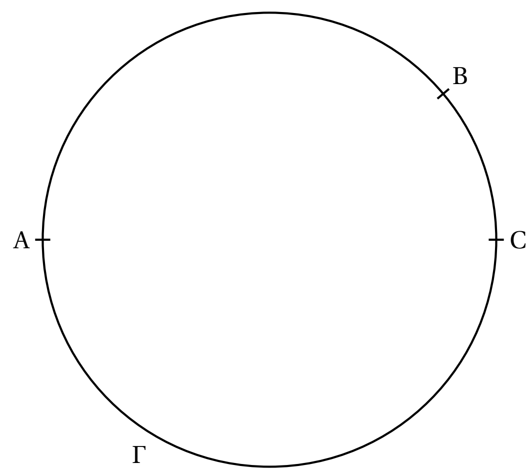
ANNEXE DE L'EXERCICE 2

À rendre avec la copie



Courbe $\mathscr{C}$, obtenue à l'aide d'un traceur de courbes

Annexe spécialité



Durée : 4 heures

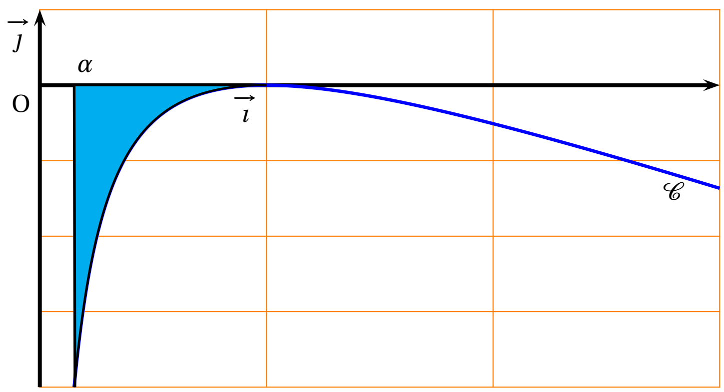
Baccalauréat S Polynésie septembre 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$$



1. **a.** Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f'(x)$ est du signe de

$$N(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x.\right]$$

   b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.

   c. En déduire le sens de variation de f sur $]0~;~+\infty[$ et les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée maximale.

2. On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $]0~;~1[$.

   a. Exprimer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).

   b. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.

3. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $[1~;2]$ et :

$$\text{pour tout entier naturel} \quad n,\ u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1.$$

   a. Démontrer, pour tout réel x élément de $[1~;2]$, la double inégalité $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leqslant 1$.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[1~;2]$.

4. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5. **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

   b. Déterminer la valeur exacte de ℓ.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
Pour tout point M du plan d'affixe z on considère les points M' et M'' d'affixes respectives

$$z' = z - 2 \qquad \text{et} \qquad z'' = z^2.$$

1. **a.** Déterminer les points M pour lesquels $M'' = M$.
   b. Déterminer les points M pour lesquels $M'' = M'$.
2. Montrer qu'il existe exactement deux points M_1 et M_2 dont les images M'_1, M''_1, M'_2 et M''_2 appartiennent à l'axe des ordonnées. Montrer que leurs affixes sont conjuguées.
3. On pose $z = x + \text{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   a. Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z'' - z}{z' - z}$.
   b. En déduire l'ensemble E des points M du plan pour lesquels les points M, M' et M'' sont alignés. Représenter E graphiquement et en couleur.
4. On pose $z = \sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in \left[0 ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   a. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z ainsi définis et chacun des ensembles Γ' et Γ'' des points M' et M'' associés à M.
   b. Représenter Γ, Γ' et Γ'' sur la figure précédente
   c. Dans cette question $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Placer le point M_3 obtenu pour cette valeur de θ, et les points M'_3 et M''_3 qui lui sont associés. Montrer que le triangle $\text{M}_3\text{M}'_3\text{M}''_3$ est rectangle. Est-il isocèle ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra, sur la figure 1 cm pour unité graphique.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1 + \text{i}$, $3 + 2\text{i}$ et $\text{i}\sqrt{2}$.

1. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{1+\text{i}}{\sqrt{2}}\overline{z} - 1 + \text{i}\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

   a. Calculer les affixes des points $\text{A}' = f(\text{A})$ et $\text{C}' = f(\text{C})$.
   b. En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.
   c. Placer les points A, B et C puis construire le point $\text{B}' = f(\text{B})$.
2. **a.** Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
   b. Montrer que la composée $g = f \circ h$ a pour écriture complexe
   $z'' = (1 + \text{i})\overline{z} - 1 + 3\text{i}$.
3. **a.** Soit M_0 le point d'affixe $2 - 4\text{i}$.
   Déterminer l'affixe du point $\text{M}''_0 = g(\text{M}_0)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AM}''_0}$ sont orthogonaux.
   b. On considère un point M d'affixe z. On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers.
   Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{A}M''}$ sont orthogonaux si, et seulement si $5x + 3y = -2$.

c. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x+3y=-2$.

d. En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6\ ;\ 6]$ tels que $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{A}M''}$ sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.
Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ et 3.
Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher; quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre -1.
On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note a le nombre lu sur le canon de U et b celui lu sur le carton de V.

1. Justifier que les points pondérés (A, a), (B, b) et (C, 4) admettent un barycentre. On le note G.

2. **a.** Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
E_1 « G appartient à la droite (BC) » ;
E_2 « G appartient au segment [BC] ».

b. Montrer que la probabilité de l'évènement E_3 : « G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés » est égale à $\dfrac{2}{5}$. On pourra faire appel des considérations de signe.

3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question **1**.
On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'évènement E_3.

a. Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire X soit égale à 4.

b. Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à 0,999.

Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie novembre 2004

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 4z.$$

1. Soient A et B les points d'affixes $z_\text{A} = 1 - \text{i}$ et $z_\text{B} = 3 + \text{i}$.
   - **a.** Calculer les affixes des points A′ et B′ images des points A et B par f.
   - **b.** On suppose que deux points ont la même image par f. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.
2. Soit I le point d'affixe -3.
   - **a.** Démontrer que OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.
   - **b.** Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.
3.
   - **a.** Exprimer $\left(z' + 4\right)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $\left|z' + 4\right|$ et $|z - 2|$ puis entre $\arg\left(z' + 4\right)$ et $\arg(z - 2)$.
   - **b.** On considère les points J et K d'affixes respectives $z_\text{J} = 2$ et $z_\text{K} = -4$.
     Démontrer que tous les points M du cercle $(\mathscr{C})$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.
   - **c.** Soit E le point d'affixe $z_\text{E} = -4 - 3\text{i}$.
     Donner la forme trigonométrique de $(z_\text{E} + 4)$ et à l'aide du **3. a.** démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.
     Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

Exercice 2 **5 points**

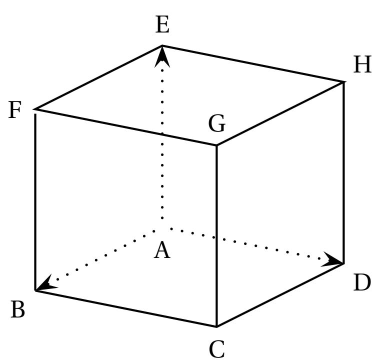
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.)

Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Pour chacune des cinq questions une ou plusieurs réponses sont exactes. Le candidat doit inscrire V (vrai) ou F (faux) dans la case correspondante.

Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, 3 réponses correctes rapportent 1 point et 2 réponses correctes rapportent $\frac{1}{2}$ point.



Soit ABCDEFGH un cube de côté 1.
On choisit le repère orthonormal $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$

On appelle I et J les milieux respectifs des segments [EF] et [FG].
L est le barycentre de {(A, 1) ; (B, 3)}.
Soit (π) le plan d'équation $4x - 4y + 3z - 3 = 0$.

1. Les coordonnées de L sont :
   a. $\left(\frac{1}{4}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$ **b.** $\left(\frac{3}{4}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$ **c.** $\left(\frac{2}{3}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$
2. Le plan (π) est le plan
   a. (GLE) **b.** (LEJ) **c.** (GFA)
3. Le plan parallèle au plan (π) passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées
   a. $\left(1\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(1\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{5}\right)$ **c.** $\left(1\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{3}\right)$
4. **a.** Les droites (EL) et (FB) sont sécantes en un point N qui est le symétrique de M par rapport à B.
   b. Les droites (EL) et (IM) sont parallèles.
   c. Les droites (EL) et (IM) sont sécantes.
5. Le volume du tétraèdre FIJM est :
   a. $\frac{1}{36}$ **b.** $\frac{1}{48}$ **c.** $\frac{1}{24}$

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.
2. Justifier que pour tout x, $(\mathrm{e}^x - x)$ est strictement positif.

Partie B

1. **a.** Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. **a.** Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
   b. Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.
3. **a.** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
   b. À l'aide de la **partie A**, étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (T).
4. Tracer la droite (T) les asymptotes et la courbe $(\mathscr{C})$.

EXERCICE 3 **5 points**
Exercice de spécialité

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. **a.** Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

   b. En déduire que si $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$, alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs $(a\,;\,b)$ tels que $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$. Un tel couple sera appelé solution.

   a. Déterminer a lorsque $a=b$.

   b. Vérifier que $(1\,;1)$, $(2\,;3)$ et $(5\,;8)$ sont trois solutions particulières.

   c. Montrer que si $(a\,;\,b)$ est solution et si $a<b$, alors $a^2-b^2<0$.

3. **a.** Montrer que si $(x\,;\,y)$ est une solution différente de $(1\,;1)$ alors $(y-x\,;\,x)$ et $(y\,;\,y+x)$ sont aussi des solutions.

   b. Déduire de **2. b.** trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_n$ définie par $a_0=a_1=1$ et pour tout entier $n, n\geqslant 0,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

   Démontrer que pour tout entier $n\geqslant 0,\ (a_n\,;\,a_{n+1})$ est solution.

   En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 3\\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n+v_n}{2}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 4\\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_{n+1}+v_n}{2}\end{array}\right.$$

1. Calculer $u_1,\ v_1,\ u_2$ et v_2.

2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n=v_n-u_n$.

   a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

   b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3. Après avoir étudié le sens de variation de suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$.

   a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

   b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. **a.** Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que

$$au+bv=1$$

   alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

   b. En déduire que si $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$, alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs $(a\,;\,b)$ tels que $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$. Un tel couple sera appelé solution.

   a. Déterminer a lorsque $a=b$.

b. Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si $(a\ ;\ b)$ est solution et si $a \neq b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3. a. Montrer que si $(x\ ;\ y)$ est une solution différente de (1 ; 1) alors $(y - x\ ;\ x)$ et $(y\ ;\ y + x)$ sont aussi des solutions.

b. Déduire de **2. b.** trois nouvelles solutions

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier $n,\ n \geqslant 0,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $(a_n\ ;\ a_{n+1})$ est solution.

En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2004

EXERCICE 1 **7 points**

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 10 cm).

Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
   c. Construire Γ dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel m de $\left]0\ ;\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
   b. Dans le cas où $m = \dfrac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions (avec $\alpha < \beta$).
   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   c. Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

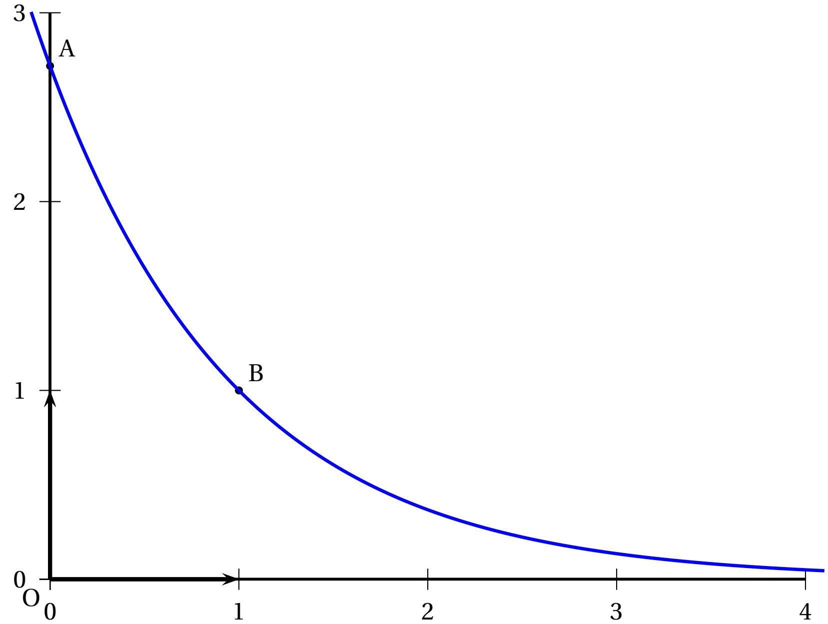
Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \alpha \\ u_{n+1} & = & u_n\mathrm{e}^{-u_n},\ \text{pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$$

   où α est le réel défini à la question **A. 2. b.**
   a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
2. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln u_n$.
   a. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $u_n = w_n - w_{n+1}$.
   b. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Montrer que $S_n = w_0 - w_{n+1}$.
   c. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.
3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 ($v_0 > 0$) et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n\mathrm{e}^{-v_n}$.
   Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait $u_n = v_n$?
   Si oui, préciser laquelle.

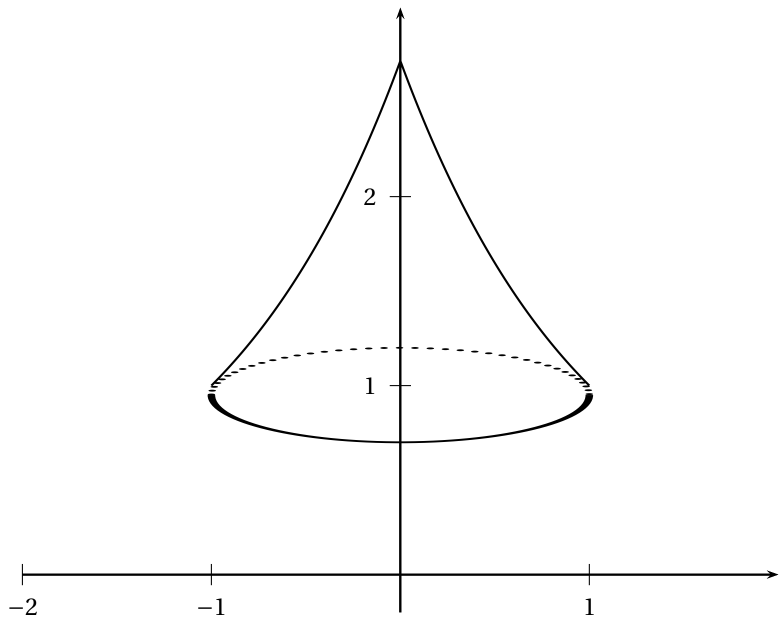
EXERCICE 2 **3 points**



On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + y = 0 \quad \text{et telle que} \quad f(0) = e.$$

1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.
2. Soit t un réel donné de l'intervalle $[1\,;\,e]$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{1-x} = t$ d'inconnue x.
3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.
   On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ comme représenté ci-dessous. On note V son volume.
   On admet que $V = \pi \displaystyle\int_1^e (1 - \ln t)^2\,dt$.
   Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



EXERCICE 3 **5 points**

On note $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ *la probabilité conditionnelle de l'évènement* B *sachant que l'évènement* A *est réalisé.*

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   On note A_0 l'évènement; « on n'a obtenu aucune boule noire »;
   On note A_1 l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire »;
   On note A_2 l'évènement : « on a obtenu deux boules noires ».
   Calculer les probabilités de A_0, A_1 et A_2.
2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.
   On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.
   On note B_0 l'évènement : « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n° 2 »
   On note B_1 l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire au tirage n° 2 »
   On note B_2 l'évènement : « on a obtenu deux boules noires au tirage n° 2 »
   a. Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$ et $p_{A_2}(B_0)$.
   b. En déduire $p(B_0)$.
   c. Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.
   d. On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier ?
3. On considère l'évènement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'une ».
   Montrer que $p(R) = \dfrac{1}{3}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.

Soit P le point d'affixe p où $p = 10$ et Γ le cercle de diamètre [OP].
On désigne par Ω le centre de Γ.
Soit A, B, C les points d'affixes respectives a, b et c, où $a = 5+5\text{i}$, $b = 1+3\text{i}$ et $c = 8-4\text{i}$.

1. Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ.
2. Soit D le point d'affixe $2 + 2\text{i}$.
   Montrer que D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC).

Partie B

À tout point M du plan différent de O, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{20}{\overline{z}} \quad \text{où } z \text{ désigne le nombre conjugué de } z.$$

1. Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
2. Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et M un point de Δ d'affixe z.
   On se propose de définir géométriquement le point M' associé au point M.
   a. Vérifier que $z + \overline{z} = 4$.
   b. Exprimer $z' + \overline{z'}$ en fonction de z et $\overline{z}$ et en déduire que $5\left(z' + \overline{z'}\right) = z'\overline{z'}$.
   c. En déduire que M' appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ.
   Placer M' sur la figure.

EXERCICE 4 **5 points**
Exercice de spécialité

Soit A_0 et B_0 deux points du plan orienté tels que $A_0B_0 = 8$. On prendra le centimètre pour unité.
Soit S la similitude de centre A_0, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
On définit une suite de points (B_n) de la façon suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ B_{n+1} = \text{S}(B_n).$$

1. Construire B_1, B_2, B_3 et B_4.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, les triangles $A_0B_nB_{n+1}$ et $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ sont semblables.
3. On définit la suite (l_n) par : pour tout entier naturel n, $l_n = B_nB_{n+1}$.
   a. Montrer que la suite (l_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.
   b. Exprimer l_n en fonction de n et de l_0.
   c. On pose $\Sigma_n = l_0 + l_1 + \cdots + l_n$.
   Déterminer la limite de Σ_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. **a.** Résoudre l'équation $3x - 4y = 2$ où x et y sont deux entiers relatifs.
   b. Soit Δ la droite perpendiculaire en A_0 à la droite (A_0B_0).
   Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, B_n appartient-il à Δ ?

∽ Baccalauréat S (obligatoire) Nouvelle Calédonie mars 2005 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

L'exercice comporte 4 questions. Pour chaque question, on propose trois affirmations. Pour chacune d'elles, le candidat doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Chaque réponse exacte rapporte 0,25 point. Une bonification de 0,25 point est ajoutée chaque fois qu'une question est traitée correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 3 affirmations sont exactes). 2 réponses inexactes dans une même question entraînent le retrait de 0,25 point.
L'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.
Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à zéro.
Dans l'exercice, le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Q1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(\text{e}^{\text{i}\theta}\right)^n$ est égal à :	$\text{e}^{\text{i}n\theta}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\cos\left(\theta^n\right)+\text{i}\sin\left(\theta^n\right)$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\cos(n\theta)+\text{i}\sin(n\theta)$	☐ Faux ☐ Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	$\dfrac{z+\overline{z}}{2}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2\text{i}}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2}$	☐ Faux ☐ Vrai
Q3	Soit z un complexe tel que $z=x+\text{i}y$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	y^2	☐ Faux ☐ Vrai
		$-y^2$	☐ Faux ☐ Vrai
		$-z^2$	☐ Faux ☐ Vrai
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives $a,\ b$ et c telles que $\dfrac{b-a}{c-a}=\text{i}\sqrt{3}$, alors :	$\text{BC}=2\,\text{AC}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\overrightarrow{\text{CA}}\cdot\overrightarrow{\text{CB}}=\text{CA}^2$	☐ Faux ☐ Vrai

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.
Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.
Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.
Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.
Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ème trajet et la valeur 0 sinon. Soit X la variable aléatoire définie par

$X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Dans cette partie on suppose que $p = \dfrac{1}{20}$.

a. Calculer l'espérance mathématique de X.

b. Calculer les probabilités $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.

c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3. Soit Z_i la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.

Justifier l'égalité $Z = 400 - 100X$ puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \dfrac{1}{5}$.

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99 %.

a. Démontrer que $P(X \leqslant 2) = (1-p)^{38}\left(741p^2 + 38p + 1\right)$.

b. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(x) = (1-x)^{38}\left(741x^2 + 38x + 1\right)$. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$ et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que $f(x_0) = 0,01$. Déterminer l'entier naturel n tel que
$\dfrac{n}{100} < x_0 < \dfrac{n+1}{100}$.

c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99 %.

(On exprimera p en fonction de x_0).

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit f la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 2,2x + 2,2\ln(x+1).$$

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-2 \leqslant x \leqslant 4, \quad -5 \leqslant y \leqslant 5$.

Reproduire sur la copie l'allure de la courbe obtenue grâce à la calculatrice.

2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :

a. Sur les variations de la fonction f ?

b. Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?

3. On se propose maintenant d'étudier la fonction f

a. Étudier le sens de variation de la fonction f

b. Étudier les limites de la fonction f en -1 et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.

c. Déduire de cette étude, en précisant le raisonnement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

d. Les résultats aux questions **3. a.** et **3. c.** confirment-ils les conjectures émises à la question **2.** ?

4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0,1 ; 0,2]$, de façon à visualiser les résultats de la question **3.**.

a. Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y proposez-vous pour mettre en évidence les résultats de la question **3. c.** dans la fenêtre de votre calculatrice ?

b. À l'aide de la calculatrice déterminer une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de la plus grande solution α de l'équation $f(x) = 0$.

5. Soit F la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1,1x^2 - 2,2x + 2,2(x+1)\ln(x+1).$$

a. Démontrer que F est une primitive de f sur $]-1\,;\,+\infty[$.

b. Interpréter graphiquement l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c. Calculer $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$ et exprimer le résultat sous la forme $b\alpha^3 + c\alpha^2$ (b et c réels).

EXERCICE 4 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points :
A_1 milieu du segment $[A_0\,B_0]$ et B_1 barycentre de $\{(A_0,\ 1)\ ;\ (B_0,\ 2)\}$.
Puis, pour tout entier naturel n, A_{n+1} milieu du segment $[A_n B_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n,\ 1)\ ;\ (B_n,\ 2)\}$.

1. Placer les points A_1 , B_1, A_2 et B_2 pour $A_0B_0 = 12$ cm.
   Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n quand n devient très grand ?
2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $\left(A_0\ ;\ \vec{\imath}\right)$ avec $\vec{\imath} = \frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$. Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n. Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$;

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$.
   Montrer qu'elle est constante.

Partie C

À partir des résultats obtenus dans les **parties A et B**, préciser la position limite des points A_n et B_n quand n tend vers plus l'infini.