

# ☞ Baccalauréat S 2012 ☞

## L'intégrale d'avril à novembre 2012

Pour un accès direct cliquez sur les liens [bleus](#)

<a href="#">Pondichéry 13 avril 2012</a> .....	3
<a href="#">Amérique du Nord 31 mai 2012</a> .....	11
<a href="#">Liban mai 2012</a> .....	17
<a href="#">Polynésie 10 juin 2012</a> .....	24
<a href="#">Antilles-Guyane 19 juin 2012</a> .....	30
<a href="#">Asie 20 juin 2012</a> .....	35
<a href="#">Centres étrangers 14 juin 2012</a> .....	39
<a href="#">Métropole 21 juin 2012</a> .....	45
<a href="#">Antilles-Guyane 13 septembre 2012</a> .....	50
<a href="#">Métropole 13 septembre 2012</a> .....	56
<a href="#">Amérique du Sud 14 novembre 2012</a> .....	60
<a href="#">Nouvelle-Calédonie 16 novembre 2012</a> .....	64



**EXERCICE 1**

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

*Les deux parties sont indépendantes.*

**Partie A**

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.

À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
  - «  $\text{rand}(1, 50)$  » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle  $[1; 50]$
  - l'écriture «  $x := y$  » désigne l'affectation d'une valeur  $y$  à une variable  $x$ .

Variables	$a, b, c, d, e$ sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0; b := 0; c := 0; d := 0; e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$ Début du tant que $a := \text{rand}(1, 50); b := \text{rand}(1, 50);$ $c := \text{rand}(1, 50); d := \text{rand}(1, 50);$ $e := \text{rand}(1, 50)$ Fin du tant que
Sortie	Afficher $a, b, c, d, e$

- a.** Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
- $$L_1 = \{2 ; 11 ; 44 ; 2 ; 15\}; L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\};$$
- $$L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}; L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}?$$
- b.** Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?
- 3.** À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants.  
Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0, 1.
- 4.** On note  $X$  la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.
- a.** Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  ? Préciser ses paramètres.
- b.** On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :
- il a été contrôlé 5 fois exactement;
  - il n'a pas été contrôlé;
  - il a été contrôlé au moins une fois.

## Partie B

*Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

*On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.*

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle  $T$  l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que  $P(T) = 0,05$ .

On appelle  $D$  l'évènement : « le coureur est dopé ».

Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :

- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

1. Calculer  $P(D)$ .
2. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé?

**EXERCICE 2****4 points****Commun à tous les candidats**

Dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on considère :

— les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  d'équations :

$$\mathcal{P} : x - y - z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' : x + y + 3z = 0.$$

— la droite  $\mathcal{D}$  ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

**Proposition 1**

La droite  $\mathcal{D}$  est orthogonale au plan  $\mathcal{P}$ .

**Proposition 2**

La sphère  $\mathcal{S}$  de centre O et de rayon 2 est tangente au plan  $\mathcal{P}$ .

**Proposition 3**

L'intersection des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  est la droite  $\Delta$  dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}.$$

**Proposition 4**

Les droites  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$  sont coplanaires.

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

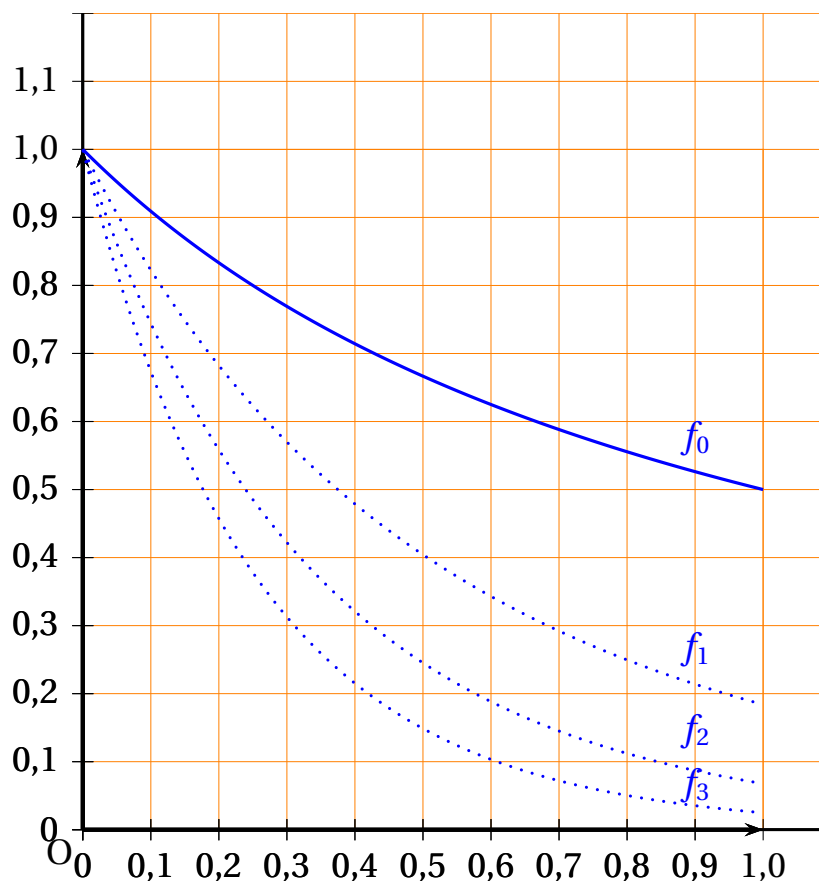
On considère les suites  $(I_n)$  et  $(J_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} dx.$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions  $f_n$  définies sur l'intervalle  $[0; 1]$  par

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$$

pour différentes valeurs de  $n$  :



- a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(I_n)$  en expliquant la démarche.

**b.** Démontrer cette conjecture.

**2. a.** Montrer que pour tout entier  $n \geq 0$  et pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  :

$$0 \leq \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leq \frac{e^{-nx}}{1+x} \leq e^{-nx}.$$

**b.** Montrer que les suites  $(I_n)$  et  $(J_n)$  sont convergentes et déterminer leur limite.

**3. a.** Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$I_n = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n \right).$$

**b.** En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$ .

#### EXERCICE 4

**5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

#### Partie A Restitution organisée de connaissances

Soit  $z$  un nombre complexe. On rappelle que  $\bar{z}$  est le conjugué de  $z$  et que  $|z|$  est le module de  $z$ . On admet l'égalité :  $|z|^2 = z\bar{z}$ .

Montrer que, si  $z_1$  et  $z_2$  sont deux nombres complexes, alors  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ .

#### Partie B : Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et  $-1$ .

Soit  $f$  la transformation du plan qui à tout point  $M$  d'affixe  $z \neq 1$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\bar{z}-1}$$

**1.** Soit C le point d'affixe  $z_C = -2 + i$ .

**a.** Calculer l'affixe  $z_{C'}$  du point  $C'$  image de C par la transformation  $f$ , et placer les points C et  $C'$  dans le repère donné en annexe.

- b. Montrer que le point  $C'$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon  $1$ .
- c. Montrer que les points  $A$ ,  $C$  et  $C'$  sont alignés.
2. Déterminer et représenter sur la figure donnée en annexe l'ensemble  $\Delta$  des points du plan qui ont le point  $A$  pour image par la transformation  $f$ .
3. Montrer que, pour tout point  $M$  distinct de  $A$ , le point  $M'$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$ .
4. Montrer que, pour tout nombre complexe  $z \neq 1$ ,  $\frac{z' - 1}{z - 1}$  est réel.  
Que peut-on en déduire pour les points  $A$ ,  $M$  et  $M'$ ?
5. On a placé un point  $D$  sur la figure donnée en annexe. Construire son image  $D'$  par la transformation  $f$ .

**EXERCICE 4****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****Partie A Restitution organisée de connaissance**

Soit  $a, b, c, d$  des entiers relatifs et  $n$  un entier naturel non nul.

Montrer que si  $a \equiv b \pmod{n}$  et  $c \equiv d \pmod{n}$  alors  $ac \equiv bd \pmod{n}$ .

**Partie B Inverse de 23 modulo 26**

On considère l'équation

$$(E) : 23x - 26y = 1,$$

où  $x$  et  $y$  désignent deux entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple  $(-9; -8)$  est solution de l'équation  $(E)$ .
2. Résoudre alors l'équation  $(E)$ .
3. En déduire un entier  $a$  tel que  $0 \leq a \leq 25$  et  $23a \equiv 1 \pmod{26}$ .

**Partie C Chiffrement de Hill**

On veut coder un mot de deux lettres selon la procédure suivante :



**Étape 1** Chaque lettre du mot est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient un couple d'entiers  $(x_1 ; x_2)$  où  $x_1$  correspond à la première lettre du mot et  $x_2$  correspond à la deuxième lettre du mot.

**Étape 2**  $(x_1 ; x_2)$  est transformé en  $(y_1 ; y_2)$  tel que :

$$(S_1) \begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 \pmod{26} \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 \pmod{26} \end{cases} \quad \text{avec } 0 \leq y_1 \leq 25 \text{ et } 0 \leq y_2 \leq 25.$$

**Étape 3**  $(y_1 ; y_2)$  est transformé en un mot de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple :  $\underbrace{\text{TE}}_{\text{mot en clair}} \xrightarrow{\text{étape 1}} (19, 4) \xrightarrow{\text{étape 2}} (13, 19) \xrightarrow{\text{étape 3}} \underbrace{\text{NT}}_{\text{mot codé}}$

1. Coder le mot ST.

2. On veut maintenant déterminer la procédure de décodage :

a. Montrer que tout couple  $(x_1 ; x_2)$  vérifiant les équations du système  $(S_1)$ , vérifie les équations du système :

$$(S_2) \begin{cases} 23x_1 \equiv 4y_1 + 23y_2 \pmod{26} \\ 23x_2 \equiv 19y_1 + 11y_2 \pmod{26} \end{cases}$$

b. À l'aide de la partie B, montrer que tout couple  $(x_1 ; x_2)$  vérifiant les équations du système  $(S_2)$ , vérifie les équations du système

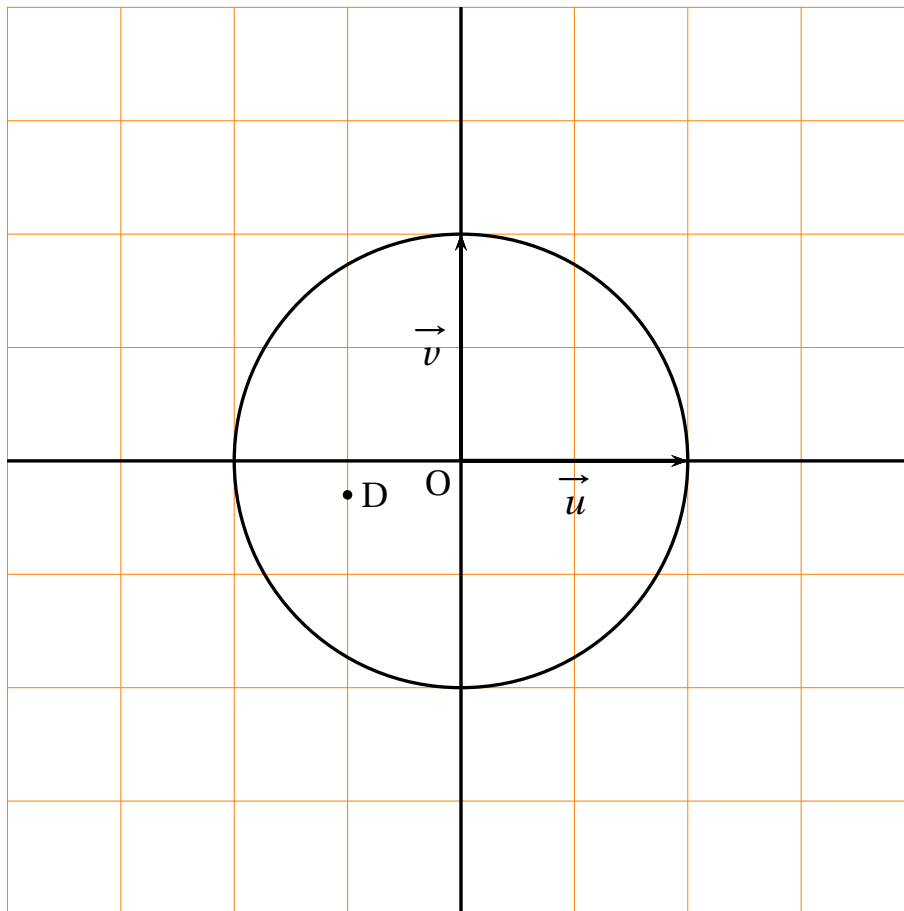
$$(S_3) \begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2 \pmod{26} \end{cases}$$

c. Montrer que tout couple  $(x_1 ; x_2)$  vérifiant les équations du système  $(S_3)$ , vérifie les équations du système  $(S_1)$

d. Décoder le mot YJ.

Annexe à rendre avec la copie

### EXERCICE 4



**EXERCICE 1**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

**Partie A**

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

- $F$  l'évènement « le membre choisi est une femme »,
- $T$  l'évènement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1. Montrer que la probabilité de l'évènement  $F$  est égale à  $\frac{2}{5}$ .
2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.  
Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme?

**Partie B**

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.
  - a. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
  - b. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $p_n$  la probabilité pour qu'en  $n$  semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.  
Montrer que pour tout entier  $n$  non nul,  $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$ .
  - c. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que  $p_n \geq 0,99$ .
2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.

Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.

On note  $X$  la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

- a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .
- b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$  et interpréter le résultat obtenu.

## EXERCICE 2

5 points

### Restitution organisée des connaissances

On rappelle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ .

Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ .

### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $[1 ; +\infty[$  par

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln(x).$$

Montrer que la fonction  $g$  est positive sur  $[1 ; +\infty[$ .

2. a. Montrer que, pour tout  $x$  de  $[1 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .
- b. En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $[1 ; +\infty[$ .
- c. Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$  est une asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$ .
- d. Étudier la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\mathcal{D}$ .

3. Pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2, on note respectivement  $M_k$  et  $N_k$  les points d'abscisse  $k$  de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .
- a. Montrer que, pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2, la distance  $M_k N_k$  entre les points  $M_k$  et  $N_k$  est donnée par  $M_k N_k = \frac{\ln(k)}{k}$ .
- b. Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier  $k_0$  supérieur ou égal à 2 tel que la distance  $M_k N_k$  soit inférieure ou égale à  $10^{-2}$ .

**Exercice 3****5 points****Commun à tous les candidats**

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $[0 ; 1]$  telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x \text{ de } [0 ; 1].$$

*On ne cherchera pas à déterminer  $f$ .*

**Partie A**

1. Déterminer le sens de variation de  $f$  sur  $[0 ; 1]$ .
2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$  par  $g(x) = f(\tan(x))$ .
- a. Justifier que  $g$  est dérivable sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ , puis que, pour tout  $x$  de  $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $g'(x) = 1$ .
- b. Montrer que, pour tout  $x$  de  $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $g(x) = x$ , en déduire que  $f(1) = \frac{\pi}{4}$ .
3. Montrer que, pour tout  $x$  de  $[0 ; 1]$ ,  $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$ .

**Partie B**

Soit  $(I_n)$  la suite définie par  $I_0 = \int_0^1 f(x) dx$  et, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ .

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que,  $I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)$ .
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $I_n \geq 0$ .  
 b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$ .  
 c. En déduire la limite de la suite  $(I_n)$ .

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .  
 On considère l'application  $f$  du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :  $z' = z^2$ .  
 On note  $\Omega$  le point d'affixe 1.

1. Déterminer l'ensemble  $\Gamma_1$  des points  $M$  du plan tels que  $f(M) = M$ .
2. Soit  $A$  le point d'affixe  $a = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ .  
 a. Exprimer  $a$  sous forme exponentielle.  
 b. En déduire les affixes des deux antécédents de  $A$  par  $f$ .
3. Déterminer l'ensemble  $\Gamma_2$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que l'affixe  $z'$  du point  $M'$  soit un nombre imaginaire pur.
4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble  $\Gamma_3$  des points  $M$  distincts de  $\Omega$  pour lesquels le triangle  $\Omega MM'$  est rectangle isocèle direct en  $\Omega$ .  
 a. À l'aide de la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , montrer que  $M$  est un point de  $\Gamma_3$  si et seulement si  $z^2 - iz - 1 + i = 0$  et  $z \neq 1$ .  
 b. Montrer que  $z^2 - iz - 1 + i = (z - 1)(z + 1 - i)$ .  
 c. En déduire l'ensemble  $\Gamma_3$ .
5. Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  différente de 0 et de 1.  
 a. Exprimer  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$  en fonction d'un argument de  $z$ .  
 b. En déduire l'ensemble  $\Gamma_4$  des points  $M$  distincts de  $O$  et de  $\Omega$  tels que  $O, M$  et  $M'$  soient alignés.

**EXERCICE 5****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .  
Soit  $S$  la transformation du plan qui, à tout  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :

$$z' = 5iz + 6i + 4.$$

**Partie A**

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $S$ .
2. On note  $x$  et  $x'$ ,  $y$  et  $y'$  les parties réelles et imaginaires respectives de  $z$  et  $z'$ .

Démontrer que :

$$\begin{cases} x' &= -5y + 4 \\ y' &= 5x + 6 \end{cases}$$

**Partie B**

Dans cette partie, on se place dans le cas où les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $M$  sont des entiers relatifs tels que  $-3 \leq x \leq 5$  et  $-3 \leq y \leq 5$ .

On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble de ces points  $M$ .

On rappelle que les coordonnées  $(x'; y')$  du point  $M'$ , image du point  $M$  par la transformation  $S$ , sont  $x' = -5y + 4$  et  $y' = 5x + 6$ .

1. **a.** Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs  $(a; b)$  tels que  $4a + 3b = 5$ .  
**b.** En déduire l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  de coordonnées  $(x; y)$  tels que  $-3x' + 4y' = 37$ .
2. Soit  $M$  un point de l'ensemble  $\mathcal{E}$  et  $M'$  son image par la transformation  $S$ .  
**a.** Démontrer que  $x' + y'$  est un multiple de 5.

- b.** Démontrer que  $x' - y'$  et  $x' + y'$  sont congrus modulo 2.  
En déduire que si  $x'^2 - y'^2$  est multiple de 2 alors  $x' - y'$  et  $x' + y'$  le sont également.
- c.** Déterminer l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  tels que :  $x'^2 - y'^2 = 20$ .



# ∞ Baccalauréat S Liban mai 2012 ∞

## Exercice 1

6 points

Commun à tous les candidats.

### Partie A

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$$

1. Étudier les variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
2. Justifier qu'il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $g(\alpha) = 0$ . Donner une valeur approchée de  $\alpha$ , arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan, muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}$  admet pour asymptote oblique la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x$ .  
Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}$  et de la droite  $\Delta$ .
3. Justifier que  $f'(x)$  a même signe que  $g(x)$ .
4. En déduire le tableau de variations de la fonction  $f$ .
5. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

**Partie C**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  du plan compris entre la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $\Delta$  et les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = n$ .

1. Justifier que cette aire, exprimée en  $\text{cm}^2$ , est donnée par :

$$I_n = 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

2. **a.** Calculer l'intégrale  $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$  à l'aide d'une intégration par parties.  
**b.** En déduire l'expression de  $I_n$  en fonction de  $n$ .
3. Calculer la limite de l'aire  $I_n$  du domaine  $\mathcal{D}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 2****4 points****Commun à tous les candidats.**

*Les quatre questions sont indépendantes.*

*Dans cet exercice, pour chaque question, une affirmation est proposée. On demande d'indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte, mais toute trace de recherche sera valorisée.*

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 8 + 5t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = 6 + t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

**Affirmation : les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont coplanaires.**

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(12 ; 7 ; -13)$  et  $B(3 ; 1 ; 2)$  ainsi que le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $3x + 2y - 5z = 1$ .

**Affirmation : le point  $B$  est le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .**

3. On considère les suites  $u$  et  $v$  définies, pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$u_n = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{et} \quad v_n = 2 + \frac{1}{n+2}$$

**Affirmation : ces deux suites sont adjacentes.**

4. On considère la suite  $u$  définie par son premier terme  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+2}, \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

**Affirmation : cette suite est majorée par 3.**

**Exercice 3****5 points****Commun à tous les candidats.**

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ .

L'une  $U_1$  contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.

L'urne  $U_2$  contient 4 boules blanches et 6 boules noires.

Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne  $U_1$ , à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne  $U_2$  le nombre de boules indiqué par le jeton.

On considère les évènements suivants :

$J_1$  « le jeton tiré de l'urne  $U_1$  porte le numéro 1 »

$J_2$  « le jeton tiré de l'urne  $U_1$  porte le numéro 2 »

$J_3$  « le jeton tiré de l'urne  $U_1$  porte le numéro 3 »

$J_4$  « le jeton tiré de l'urne  $U_1$  porte le numéro 4 »

$B$  « toutes les boules tirées de l'urne  $U_2$  sont blanches »

*On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question 4.b) où une valeur arrondie à  $10^{-2}$  suffit.*

1. Calculer  $P_{J_1}(B)$ , probabilité de l'évènement  $B$  sachant que l'évènement  $J_1$  est réalisé.

Calculer de même la probabilité  $P_{J_2}(B)$ .

On admet dans la suite les résultats suivants :

$$P_{J_3}(B) = \frac{1}{30} \quad \text{et} \quad P_{J_4}(B) = \frac{1}{210}.$$

2. Montrer que  $P(B)$ , probabilité de l'évènement  $B$ , vaut  $\frac{1}{7}$ . On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.
3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3?
4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note  $N$  la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de partie où toutes les boules tirées sont blanches.
  - a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire  $N$ ?
  - b. Calculer la probabilité de l'évènement  $(N = 3)$ .

**Exercice 4****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.**

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**1. Un triangle**

- a. On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = 2$ ,  $b = 3 + i\sqrt{3}$  et  $c = 2i\sqrt{3}$ .

Déterminer une mesure de l'angle  $\widehat{ABC}$ .

- b. En déduire que l'affixe  $\omega$  du centre  $\Omega$  du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  est  $1 + i\sqrt{3}$ .

**2. Une transformation du plan**

On note  $(z_n)$  la suite de nombres complexes, de terme initiale  $z_0 = 0$ , et telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z_n + 2, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

- a. Montrer que les points  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  ont pour affixes respectives :

$$3 + i\sqrt{3}, \quad 2 + 2i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 2i\sqrt{3}$$

On remarquera que :  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = B$  et  $A_4 = C$ .

- b. Comparer les longueurs des segments  $[A_1A_2]$ ,  $[A_2A_3]$  et  $[A_3A_4]$ .  
 c. Établir que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega),$$

où  $\omega$  désigne le nombre complexe défini à la question 1. b.

- d. En déduire que le point  $A_{n+1}$  est l'image du point  $A_n$  par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques.

- e. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $A_{n+6} = A_n$ . Déterminer l'affixe du point  $A_{2012}$ .
3. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , la longueur du segment  $[A_n A_{n+1}]$ .

**Exercice 4****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.**

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On note  $z_n$  la suite de nombres complexes, de terme initiale  $z_0 = 0$ , et telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n + 1, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

- Calculer les affixes des points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ . Placer ces points dans le plan muni du repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .
- Montrer que le point  $A_{n+1}$  est l'image du point  $A_n$  par une similitude directe  $s$ , dont on définira le rapport, l'angle et le centre  $\Omega$ , d'affixe  $\omega$ .
  - Démontrer que le triangle  $\Omega A_n A_{n+1}$  est isocèle rectangle.
- établir que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $\Omega A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$ .
  - À partir de quelle valeur de  $n$  les points  $A_n$  sont-ils situés à l'intérieur du disque de centre  $\Omega$  et de rayon 0,001 ?
- Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $a_n$  la longueur  $A_n A_{n+1}$  et  $L_n$  la somme  $\sum_{k=0}^n a_k$ .  
 $L_n$  est ainsi la longueur de la ligne polygonale  $A_0 A_1 \dots A_n A_{n+1}$ .  
 Déterminer la limite de  $L_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**5.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , les points  $A_n$ ,  $\Omega$  et  $A_{n+4}$  sont alignés.

## ∞ Baccalauréat S Polynésie juin 2012 ∞

### Exercice 1

5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère les points B (100; 100) et C  $(50; \frac{50}{\sqrt{e}})$  et la droite (D) d'équation  $y = x$ .

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  dont la courbe représentative, notée  $\Gamma$ , est donnée en annexe.

On suppose de plus qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que :

- pour tout  $x$  réel,  $f(x) = xe^{ax+b}$ .
- les points B et C appartiennent à la courbe  $\Gamma$ .

1. a. Montrer que le couple  $(a; b)$  est solution du système :

$$\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

b. En déduire que, pour tout  $x$  réel,  $f(x) = xe^{0,01x-1}$ .

2. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

3. a. Montrer que pour tout  $x$  réel,  $f(x) = \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}$

b. En déduire la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

4. Étudier les variations de la fonction  $f$ . On donnera le tableau de variations complet.

5. Étudier la position relative de la courbe  $\Gamma$  et de la droite (D).

6. a. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale  $\int_0^{100} f(t) dt$ .

b. On désigne par  $A$  l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 100$ , la droite (D) et la courbe  $\Gamma$ .

Calculer  $A$ .



**Exercice 2****5 points**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A, B et C d'affixes respectives  $a = -2 + 2i$ ,  $b = -3 - 6i$  et  $c = 1$ .

La figure de l'exercice est donnée en annexe. Elle peut servir à émettre des conjectures, à vérifier des résultats.

1. Quelle est la nature du triangle ABC?
2. **a.** Donner l'écriture complexe de la rotation  $r$  de centre B et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .  
**b.** En déduire l'affixe du point A' image de A par  $r$ .  
**c.** Vérifier que l'affixe  $s$  du point S milieu de [AA'] est  $s = -\frac{13}{2} - \frac{3}{2}i$ .  
**d.** Démontrer que le point S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
3. On construit de la même manière C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , Q le milieu de [CC'], B' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et P le milieu de [BB'].

On admet que les affixes respectives de Q et de P sont  $q = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$  et  $p = 2 - 5i$ .

- a.** Démontrer que  $\frac{s - q}{p - a} = -i$ .
- b.** En déduire que les droites (AP) et (QS) sont perpendiculaires et que les segments [AP] et [QS] sont de même longueur.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CS) sont concourantes.

**Exercice 3****5 points****Partie A**

On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont le réel  $U$  et les entiers naturels  $k$  et  $N$ .

**Entrée**  
Saisir le nombre entier naturel non nul  $N$ .

**Traitement**  
Affecter à  $U$  la valeur 0  
Pour  $k$  allant de 0 à  $N - 1$   
  
    | Affecter à  $U$  la valeur  $3U - 2k + 3$   
Fin pour

**Sortie**  
Afficher  $U$

Quel est l'affichage en sortie lorsque  $N = 3$  ?

### Partie B

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3.$$

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq n$ .  
**b.** En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
3. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
4. Soit la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = u_n - n + 1$ .  
**a.** Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique.  
**b.** En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 3^n + n - 1$ .
5. Soit  $p$  un entier naturel non nul.  
**a.** Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \geq 10^p$  ?  
On s'intéresse maintenant au plus petit entier  $n_0$ .  
**b.** Justifier que  $n_0 \leq 3p$ .  
**c.** Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier  $n_0$  pour la valeur  $p = 3$ .  
**d.** Proposer un algorithme qui, pour une valeur de  $p$  donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , on ait  $u_n \geq 10^p$ .

### Exercice 4

**5 points**

*Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

On désigne par  $x$  un réel appartenant à l'intervalle  $[0; 80]$ .

Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle,  $x$  % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

#### Partie A : expérience 1

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à  $0,12 + 0,004x$ .
2. Déterminer  $x$  pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer  $x$  pour que les événements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que  $x = 50$ .  
Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

**Partie B : expérience 2**

On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne.  
Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?
2. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?
3. Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?

**Exercice 4****5 points**

*Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

**Partie A**

On considère l'équation (E) :  $25x - 108y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple (13 ; 3) est solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

**Partie B**

Dans cette partie,  $a$  désigne un entier naturel et les nombres  $c$  et  $g$  sont des entiers naturels vérifiant la relation  $25g - 108c = 1$ .

On rappelle le petit théorème de Fermat :

Si  $p$  est un nombre premier et  $a$  un entier non divisible par  $p$ , alors  $a^{p-1}$  est congru à 1 modulo  $p$  que l'on note  $a^{p-1} \equiv 1 [p]$ .

1. Soit  $x$  un entier naturel.  
Démontrer que si  $x \equiv a [7]$  et  $x \equiv a [19]$ , alors  $x \equiv a [133]$ .
2. **a.** On suppose que  $a$  n'est pas un multiple de 7.  
Démontrer que  $a^6 \equiv 1 [7]$  puis que  $a^{108} \equiv 1 [7]$ .  
En déduire que  $(a^{25})^g \equiv a [7]$ .
- b.** On suppose que  $a$  est un multiple de 7.  
Démontrer que  $(a^{25})^g \equiv a [7]$ .
- c.** On admet que pour tout entier naturel  $a$ ,  $(a^{25})^g \equiv a [19]$ .  
Démontrer que  $(a^{25})^g \equiv a [133]$ .

**Partie C**

On note  $A$  l'ensemble des entiers naturels  $a$  tels que :  $1 \leq a \leq 26$ .

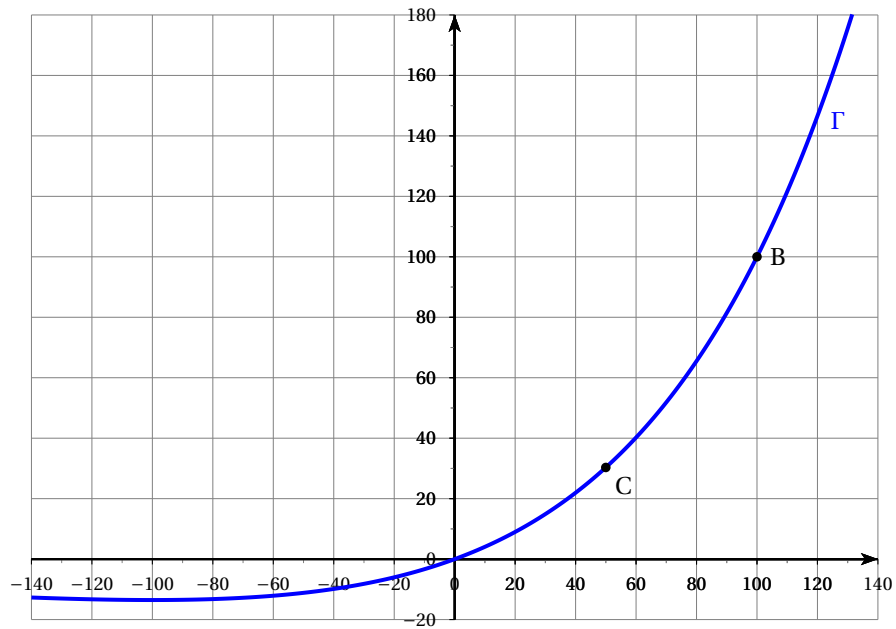
Un message, constitué d'entiers appartenant à  $A$ , est codé puis décodé.

La phase de codage consiste à associer, à chaque entier  $a$  de  $A$ , l'entier  $r$  tel que  $a^{25} \equiv r [133]$  avec  $0 \leq r < 133$ .

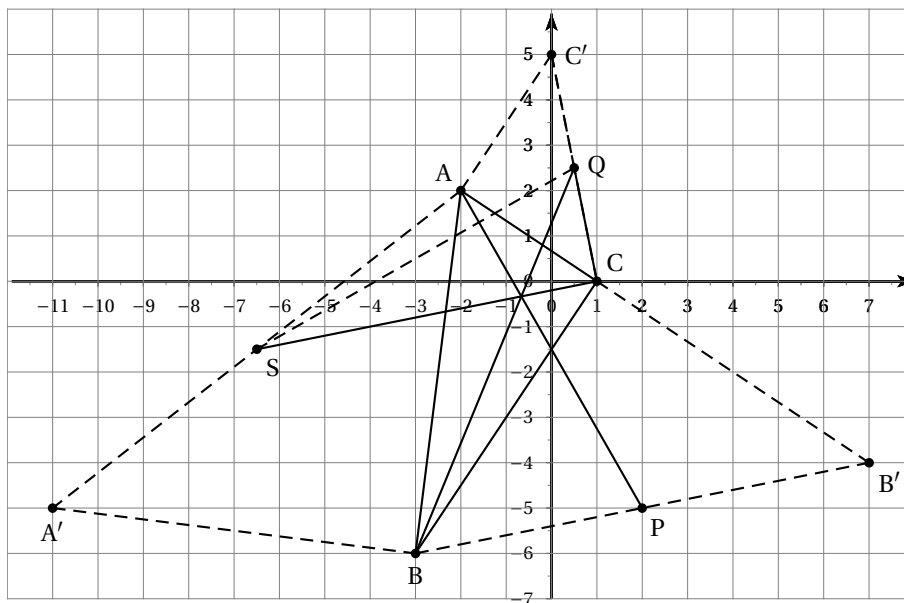
La phase de décodage consiste à associer à  $r$ , l'entier  $r_1$  tel que  $r^{13} \equiv r_1 [133]$  avec  $0 \leq r_1 < 133$ .

1. Justifier que  $r_1 \equiv a [133]$ .
2. Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 59.  
Décoder ce message.

Annexe de l'exercice 1



Annexe de l'exercice 2



## ⌘ Baccalauréat S Antilles-Guyane 19 juin 2012 ⌘

### EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Les parties B et C sont indépendantes.

On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .  
Que peut-on en déduire pour la courbe  $\mathcal{C}$  ?
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
3. On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on note  $f'$  sa fonction dérivée.  
Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$ .
4. Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser son tableau de variation sur  $\mathbb{R}$ .

#### Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit  $a$  un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$ , qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle  $T_a$  la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$ . Donner une équation de  $T_a$ .
2. Démontrer qu'une tangente à  $\mathcal{C}$  en un point d'abscisse  $a$  strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si  $a$  vérifie l'égalité

$$1 - a^2 e^{a-1} = 0.$$

3. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  de l'équation

$$1 - x^2 e^{x-1} = 0.$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

#### Partie C : calcul d'aire

Le graphique donné en **Annexe 1** représente la courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Construire sur ce graphique la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x$ . On admet que la courbe  $\mathcal{C}$  est au-dessus de la droite  $\Delta$ . Hachurer le domaine  $\mathcal{D}$  limité par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $\Delta$ , la droite d'équation  $(x = 1)$  et l'axe des ordonnées.
2. On pose  $I = \int_0^1 xe^{x-1} dx$ . Montrer à l'aide d'une intégration par parties que  $I = \frac{1}{e}$ .
3. En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine  $\mathcal{D}$ .

**EXERCICE 2****4 points****Commun à tous les candidats**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On réalisera sur une feuille de papier millimétré une figure en prenant pour unité 2 cm. On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1 + 2i \quad ; \quad b = -2 - i \quad ; \quad c = -3 + i.$$

- Placer les points A, B et C sur le graphique.
- Calculer  $\frac{b}{a}$ , en déduire la nature du triangle OAB.
- On considère l'application  $f$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  avec  $z \neq b$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par

$$z' = \frac{z + 1 - 2i}{z + 2 + i}$$

- Calculer l'affixe  $c'$  du point  $C'$ , image de C par  $f$  et placer le point  $C'$  sur la figure.
  - Déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points  $M$  d'affixe  $z$  avec  $z \neq b$ , tels que  $|z'| = 1$ .
  - Justifier que  $\mathcal{E}$  contient les points O et C. Tracer  $\mathcal{E}$ .
4. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.
- On appelle J l'image du point A par la rotation  $r$  de centre O et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .
- On appelle K l'image du point C par la rotation  $r'$  de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .
- On note L le milieu de [JK].
- Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC.

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par

$$\begin{cases} u_1 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= \frac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

- Calculer  $u_2, u_3$  et  $u_4$ .
- Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n$  est strictement positif.
  - Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
  - Que peut-on en déduire pour la suite  $(u_n)$  ?
- Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

- Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme  $v_1$ .

b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

4. Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$  par  $f(x) = \ln x - x \ln 2$ .
- Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

**EXERCICE 4****5 points****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***Les cinq questions sont indépendantes.*

- Dans un lycée donné, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine.  
On choisit, au hasard, un élève du lycée.  
Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine?
- Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons simultanément.  
Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton à numéro pair?
- Une variable aléatoire  $Y$  suit une loi binomiale de paramètres 20 et  $\frac{1}{5}$ .  
Calculer la probabilité que  $Y$  soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à  $10^{-3}$ .
- Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.  
On appelle  $A$  l'évènement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et  $F$  l'évènement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».  
On suppose que les évènements  $A$  et  $F$  sont indépendants.  
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.  
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut  $F$ ?
- On considère l'algorithme :

```

A et C sont des entiers naturels,
C prend la valeur 0
Répéter 9 fois
    A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.
    Si A > 5 alors C prend la valeur de C + 1
    Fin Si
Fin répéter
Afficher C.

```

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle  $X$  la variable aléatoire prenant la valeur  $C$  affichée.

Quelle loi suit la variable  $X$ ? Préciser ses paramètres.

**EXERCICE 4****5 points****Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****Les quatre questions sont indépendantes.**



1. a. Vérifier que le couple (4; 6) est une solution de l'équation

$$(E) \quad 11x - 5y = 14.$$

- b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs  $(x; y)$  vérifiant l'équation (E).

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}.$$

- b. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $2011^{2012}$  par 7.

3. On se place dans le plan complexe. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $f$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :

$$z' = \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i.$$

4. On considère l'algorithme suivant où  $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$  désigne la partie entière de  $\frac{A}{N}$ .

```

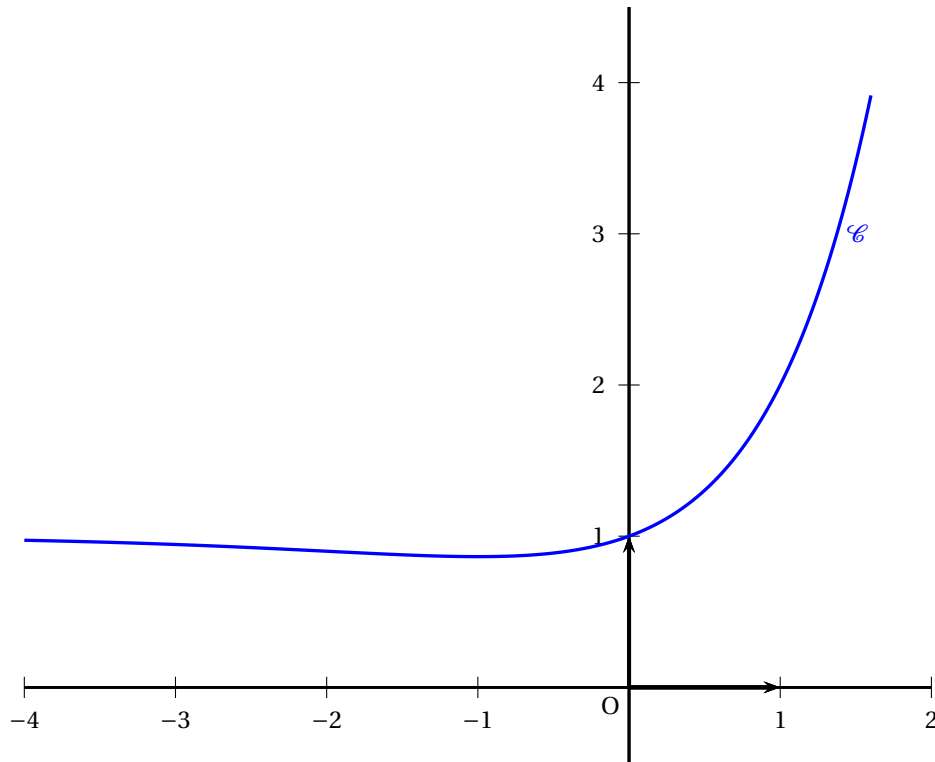
A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que  $N \leq \sqrt{A}$ 
    Si  $\frac{A}{N} - \text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right) = 0$  alors Afficher N et  $\frac{A}{N}$ 
    Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.
```

Quels résultats affiche cet algorithme pour  $A = 12$ ?

Que donne cet algorithme dans le cas général?

ANNEXE 1  
Exercice 1  
À rendre avec la copie

Courbe  $\mathcal{C}$  représentative de  $f$



## Baccalauréat S Asie 20 juin 2012

### EXERCICE 1

5 points

#### Commun à tous les candidats

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse correcte et justifiée rapporte 1 point.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère la droite  $\mathcal{D}$  dont on donne une représentation paramétrique, et le plan  $\mathcal{P}$  dont on donne une équation cartésienne :

$$\mathcal{D} \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}: 3x + 2y - z - 5 = 0.$$

**Affirmation 1 :** la droite  $\mathcal{D}$  est strictement parallèle au plan  $\mathcal{P}$ .

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère le point  $A(1; 9; 0)$  et le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne :

$$4x - y - z + 3 = 0.$$

**Affirmation 2 :** la distance du point  $A$  au plan  $\mathcal{P}$  est égale à  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

3. Soit la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par :  $f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère du plan.

**Affirmation 3 :** la courbe  $\mathcal{C}$  admet deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.

4. Pour tout réel  $x$ , on pose  $F(x) = \int_1^x (2-t)e^{-t} dt$ .

**Affirmation 4 :**  $F(x)$  est négatif ou nul quelle que soit la valeur du réel  $x$  supérieur à 1.

5. On considère l'intégrale  $I = \int_1^e t^2 \ln t dt$ .

**Affirmation 5 :** la valeur exacte de l'intégrale  $I$  est :  $\frac{2e^3 + 1}{9}$ .

### EXERCICE 2

5 points

#### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On note  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ .

On considère le point  $A$ , d'affixe  $z_A = -\sqrt{3} + i$ , le point  $A_1$  d'affixe  $z_{A_1} = \overline{z_A}$  où  $\overline{z_A}$  désigne le conjugué de  $z_A$ .

On note enfin  $B$  image du point  $A_1$  par la rotation  $r$  et  $z_B$  l'affixe du point  $B$ .

1. **a.** Écrire le nombre complexe  $z_A$  sous forme exponentielle, puis placer les points  $A$  et  $A_1$ , dans le repère. On prendra 2 cm comme unité graphique.
- b.** Vérifier que  $z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$  sous forme exponentielle, puis écrire le nombre complexe  $z_B$  sous forme algébrique.  
Placer alors le point  $B$  dans le même repère.

2. On considère le vecteur unitaire  $\vec{w}$ , tel que  $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{12}$ , et la droite  $\Delta$  passant par O et de vecteur directeur  $\vec{w}$ .
- Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.
  - Tracer la droite  $\Delta$ , puis démontrer que  $\Delta$  est la bissectrice de l'angle  $(\vec{OA}, \vec{OB})$ .  
En déduire que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite  $\Delta$ .
3. On note  $B_1$  le symétrique de B par rapport à l'axe  $(O; \vec{u})$  et  $B'$  l'image de  $B_1$  par la rotation  $r$ . Démontrer que  $B' = A$ .
4. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.*
- Soit C le point d'affixe  $\sqrt{2}(1+i)$  et D le symétrique de C par rapport à la droite  $\Delta$ .  
Construire les points C et D, puis calculer l'affixe du point D

**EXERCICE 2****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**Partie A - Détermination d'une similitude directe**

On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_B = -\sqrt{3} + i.$$

- Écrire les nombres complexes  $z_A$  et  $z_B$  sous forme exponentielle.
  - Placer les points A et B dans le repère. On prendra 1 cm comme unité graphique.
- Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe  $f$  de centre 0 qui transforme le point A en B.
  - Préciser les éléments caractéristiques de la similitude  $f$ .

**Partie B. Étude d'une transformation**

Le but de cette partie est d'étudier la transformation  $g = s \circ f$ , où  $f$  désigne la similitude définie dans la partie A et  $s$  la réflexion d'axe  $(O; \vec{u})$ .

- Soit  $M$  un point quelconque du plan. On désigne par  $M'$  l'image du point  $M$  par la transformation  $g$ . On note  $z$  et  $z'$  les affixes respectives des points  $M$  et  $M'$ , et  $\bar{z}$  celle du conjugué de  $z$ .
  - Démontrer l'égalité :  $z' = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}\bar{z}$ .
  - On pose  $C = g(A)$  et  $D = g(C)$ . Calculer les affixes respectives des points C et D, puis placer les points C et D sur la figure.
  - Quelle est la nature du triangle OAC?
  - Démontrer que les vecteurs  $\vec{OA}$  et  $\vec{OD}$  sont colinéaires.
- Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Déterminer la nature de la transformation  $g \circ g$  et préciser ses éléments géométriques.

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

Soit  $k$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient  $k$  boules noires et 3 boules blanches. Ces  $k+3$  boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

**Partie A**

Dans la partie A, on pose  $k = 7$ .

Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note  $p$  la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes.  
Démontrer que  $p = 0,42$ .
2. Soit  $n$  un entier tel que  $n > 2$ . Un joueur joue  $n$  parties identiques et indépendantes.  
On note  $X$  la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et  $p_n$  la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des  $n$  parties.
  - a. Expliquer pourquoi la variable  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .
  - b. Exprimer  $p_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer  $p_{10}$  en arrondissant au millième.
  - c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.

**Partie B**

Dans la partie B, le nombre  $k$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur joue une partie.

On note  $Y_k$  la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. a. Justifier l'égalité :  $p(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$ .  
b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire  $Y_k$
2. On note  $E(Y_k)$  l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $Y_k$   
On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance  $E(Y_k)$  est strictement positive.  
Déterminer les valeurs de  $k$  pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

**EXERCICE 4****5 points****Commun à tous les candidats**

1. On considère l'algorithme suivant :

<b>Entrée</b>	Saisir un réel strictement positif non nul $a$ Saisir un réel strictement positif non nul $b$ ( $b > a$ ) Saisir un entier naturel non nul $N$
<b>Initialisation</b>	Affecter à $u$ la valeur $a$ Affecter à $v$ la valeur $b$ Affecter à $n$ la valeur 0
<b>Traitement</b>	TANT QUE $n < N$ Affecter à $n$ la valeur $n + 1$ Affecter à $u$ la valeur $\frac{a+b}{2}$ Affecter à $v$ la valeur $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à $a$ la valeur $u$ Affecter à $b$ la valeur $v$
<b>Sortie</b>	Afficher $u$ , afficher $v$

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour  $a = 4$ ,  $b = 9$  et  $N = 2$ . Les valeurs successives de  $u$  et  $v$  seront arrondies au millième.

$n$	$a$	$b$	$u$	$v$
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite,  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $0 < a < b$ .

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$u_0 = a$ ,  $v_0 = b$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$ .
- b. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$ .  
En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \leq v_n$ .
3. a. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- b. Comparer  $v_{n+1}^2$  et  $v_n^2$ . En déduire le sens de variation de la suite  $(v_n)$ .
4. Démontrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes.

☞ Baccalauréat S Centres étrangers 13 juin 2012 ☞

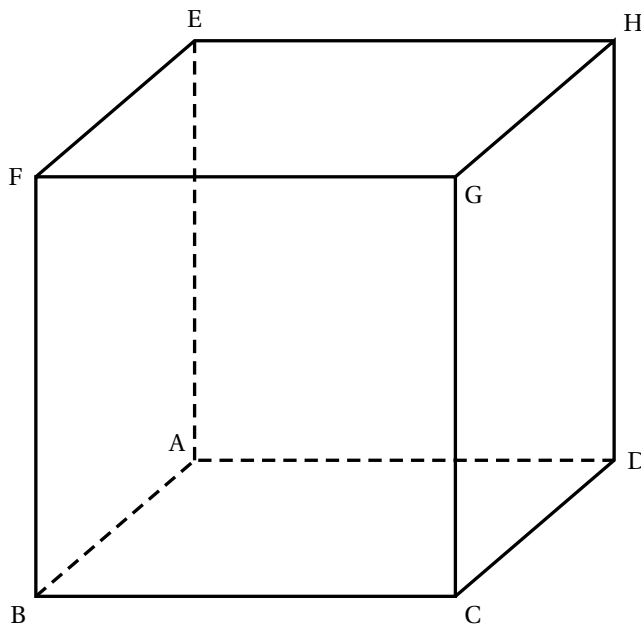
**EXERCICE 1**

**4 points**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère orthonormal  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .

On considère les points  $I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$ ,  $J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$ ,  $K\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$  et  $L(a; 1; 0)$  avec  $a$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ .



Les parties A et B sont indépendantes.

**Partie A**

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'(a - \frac{3}{4}) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si,  $a = \frac{1}{4}$ .

**Partie B**

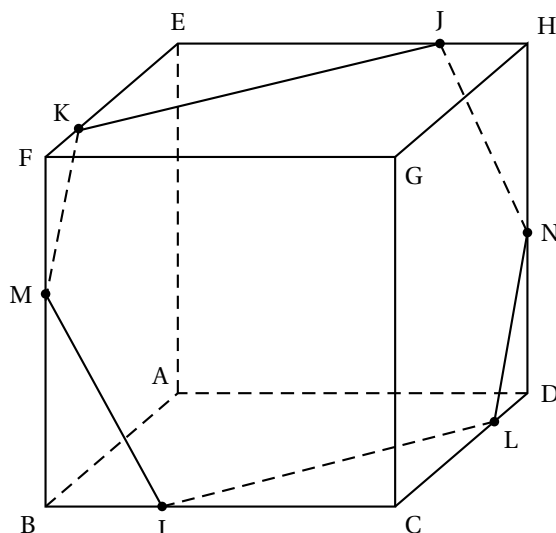
Dans la suite de l'exercice, on pose  $a = \frac{1}{4}$ .

Le point L a donc pour coordonnées  $(\frac{1}{4}; 1; 0)$ .

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

- Prouver que le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $(8; 9; 5)$  est un vecteur normal au plan (IJK).
- En déduire que le plan (IJK) a pour équation  $8x + 9y + 5z - 11 = 0$ .
- En déduire les coordonnées des points M et N

## EXERCICE 2

5 points

On considère la suite  $(I_n)$  définie pour  $n$  entier naturel non nul par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx.$$

- Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = xe^{x^2}$ .

Démontrer que la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $g$ .

- En déduire la valeur de  $I_1$ .
- À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n.$$

- Calculer  $I_3$  et  $I_5$ .

- On considère l'algorithme suivant :



Initialisation	Affecter à $n$ la valeur 1 Affecter à $u$ la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$
	Tant que $n < 21$ Affecter à $u$ la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}u$ Affecter à $n$ la valeur $n+2$
Sortie	Afficher $u$

Quel terme de la suite  $(I_n)$  obtient-on en sortie de cet algorithme ?

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $I_n \geq 0$ .  
b. Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante.  
c. En déduire que la suite  $(I_n)$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.
4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
Déterminer la valeur de  $\ell$ .

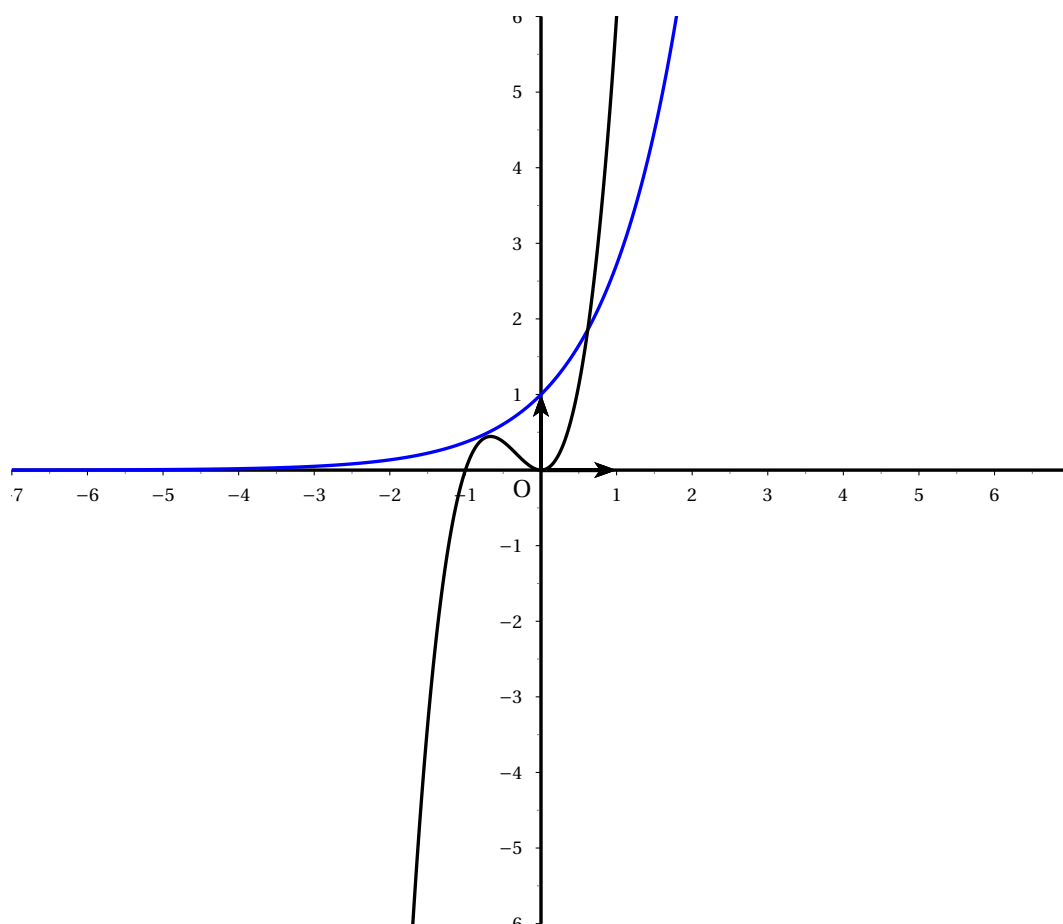
### EXERCICE 3

6 points

On considère l'équation (E) d'inconnue  $x$  réelle :  $e^x = 3(x^2 + x^3)$ .

#### Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3(x^2 + x^3)$  telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

### Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1.
  - a. Étudier selon les valeurs de  $x$ , le signe de  $x^2 + x^3$ .
  - b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle  $] -\infty ; -1]$ .
  - c. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. On considère la fonction  $h$ , définie pour tout nombre réel de  $] -1 ; 0[ \cup ] 0 ; +\infty[$  par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) - x.$$

Montrer que, sur  $] -1 ; 0[ \cup ] 0 ; +\infty[$ , l'équation (E) équivaut à  $h(x) = 0$ .

3.
  - a. Montrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $] -1 ; 0[ \cup ] 0 ; +\infty[$ , on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$

- b. Déterminer les variations de la fonction  $h$ .
- c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $h(x) = 0$  et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.
- d. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

**EXERCICE 4****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

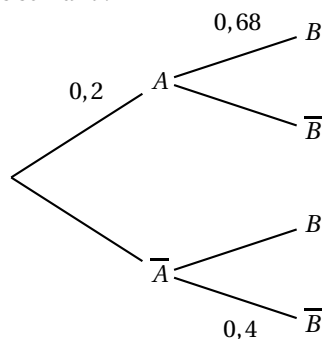
Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Toute trace de recherche sera valorisée.

1. On considère l'arbre de probabilités suivant :



**Affirmation** : la probabilité de l'évènement  $A$  sachant que l'évènement  $B$  est réalisé est égale à  $0,32$ .

2. On considère une urne contenant  $n$  boules rouges et trois boules noires, où  $n$  désigne un entier naturel non nul. Les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément deux boules dans l'urne.

**Affirmation** : il existe une valeur de  $n$  pour laquelle la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à  $\frac{9}{22}$ .

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère la transformation  $t$  d'écriture complexe

$$z' = -iz + 5 + i.$$

**Affirmation** : la transformation  $t$  est la rotation de centre  $A$  d'affixe  $3 - 2i$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

4. Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation (E) d'inconnue  $z$  :

$$z^2 - z\bar{z} - 1 = 0.$$

**Affirmation** : l'équation (E) admet au moins une solution.

5. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = -1$ ,  $b = i$  et  $c = \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$ .

**Affirmation** : le triangle  $ABC$  possède un angle dont une mesure est égale à  $60^\circ$ .

**EXERCICE 4****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Toute trace de recherche sera valorisée.

1. On considère l'équation (E) :  $3x - 2y = 1$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

**Affirmation** : les solutions de l'équation (E) sont les couples

$(9 + 2k ; 13 + 3k)$ , avec  $k$  appartenant à l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs.

2. Soit  $n$  un entier naturel. On considère les deux entiers  $a$  et  $b$  définis par :

$$a = 3n + 1 \text{ et } b = 2n + 3.$$

**Affirmation** : le PGCD de  $a$  et  $b$  est égal à 7 si et seulement si  $n$  est congru à 2 modulo 7.

3. Soit  $n$  un entier naturel. On considère les deux entiers  $a$  et  $b$  définis par :

$$a = 2n^2 + 7n + 21 \text{ et } b = 2n + 2.$$

**Affirmation** : pour tout entier naturel  $n$ , le quotient et le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  sont respectivement égaux à  $n + 2$  et  $n + 17$ .

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère le point A d'affixe  $3 + 4i$ .

On note  $s$  la similitude directe  $s$  de centre A, de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .

**Affirmation** : la similitude directe réciproque  $s^{-1}$  a pour écriture complexe :

$$z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-1+7i}{2}.$$

5. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives  $a = 1 + 2i$ ,  $b = 4 - i$ ,

$c = 1 - 2\sqrt{3} + i(3 + \sqrt{3})$  et  $d = 4 + \sqrt{3} + 4i\sqrt{3}$ .

**Affirmation** : la similitude directe qui transforme A en C et B en D a pour angle  $\frac{\pi}{3}$ .

## ∞ Baccalauréat S Métropole 21 juin 2012 ∞

### EXERCICE 1

4 points

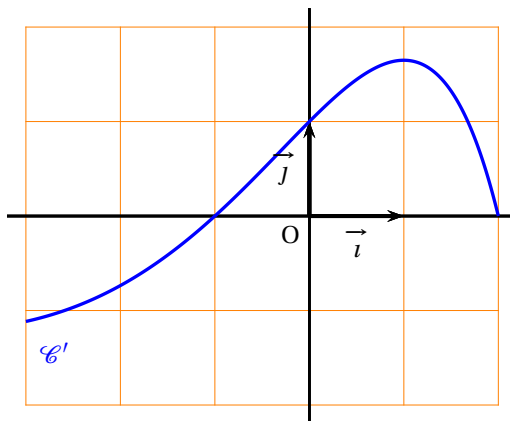
#### Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère une fonction  $f$  dérivable sur l'intervalle  $[-3; 2]$ .

On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$ .
- la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  admet la courbe représentative  $\mathcal{C}'$  ci-dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-3, -1]$ ,  $f'(x) \leq 0$ .
2. La fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[-1; 2]$ .
3. Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-3; 2]$ ,  $f(x) \geq -1$ .
4. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .  
La tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées  $(1; 0)$ .

### EXERCICE 2

5 points

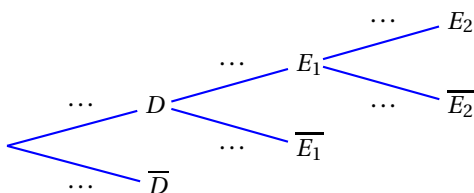
#### Commun à tous les candidats

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier.

40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise.

Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.  
On considère les événements suivants :
  - $D$  : « Le candidat est retenu sur dossier »,
  - $E_1$  : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
  - $E_2$  : « Le candidat est recruté ».
  - a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



- b. Calculer la probabilité de l'évènement  $E_1$ .
  - c. On note  $F$  l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ». Démontrer que la probabilité de l'évènement  $F$  est égale à 0,93.
2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.
- On désigne par  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.
- a. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
  - b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à  $10^{-3}$ .
3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999?

**EXERCICE 3**

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

*Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.*

**Partie A**

On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

- 1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
- 2. Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$ .  
Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
- 3. En déduire le signe de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .

**Partie B**

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier strictement positif par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

- 1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	$i$ et $n$ sont des entiers naturels. $u$ est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de $n$ .
Initialisation :	Affecter à $u$ la valeur 0.
Traitement :	Pour $i$ variant de 1 à $n$ .   Affecter à $u$ la valeur $u + \frac{1}{i}$
Sortie :	Afficher $u$ .

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur  $n = 3$ .

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de  $u_n$  lorsque l'utilisateur entre la valeur de  $n$ .
3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à  $10^{-3}$ .

$n$	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
$u_n$	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite  $(u_n)$  et son éventuelle convergence.

### Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite  $(u_n)$  telle que pour tout entier strictement positif  $n$ ,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif  $n$ ,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

où  $f$  est la fonction définie dans la partie A.

En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

2. a. Soit  $k$  un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité  $\int_k^{k+1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$ .

En déduire que  $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$ .

Démontrer l'inégalité  $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$  (1).

- b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement  $k$  par  $1, 2, \dots, n$  et démontrer que pour tout entier strictement positif  $n$ ,

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

- c. En déduire que pour tout entier strictement positif  $n$ ,  $u_n \geq 0$ .

3. Prouver que la suite  $(u_n)$  est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

### EXERCICE 4

5 points

#### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On appelle  $f$  l'application qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  différente de  $-1$ , fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $\frac{1}{z+1}$ .

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par  $f$  de la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $x = -\frac{1}{2}$ .

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_A = -\frac{1}{2}, \quad z_B = -\frac{1}{2} + i \quad \text{et} \quad z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

- Placer les trois points A, B et C sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique.
  - Calculer les affixes des points  $A' = f(A)$ ,  $B' = f(B)$  et  $C' = f(C)$  et placer les points A', B' et C' sur la figure.
  - Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.
2. Soit  $g$  la transformation du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , fait correspondre le point  $M_1$  d'affixe  $z + 1$ .
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $g$ .
  - Sans donner d'explication, placer les points  $A_1$ ,  $B_1$  et  $C_1$ , images respectives par  $g$  de A, B et C et tracer la droite  $\mathcal{D}_1$ , image de la droite  $\mathcal{D}$  par  $g$ .
  - Démontrer que  $\mathcal{D}_1$  est l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  telle que  $|z - 1| = |z|$ .
3. Soit  $h$  l'application qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  non nulle, associe le point  $M_2$  d'affixe  $\frac{1}{z}$ .
- Justifier que  $h(A_1) = A'$ ,  $h(B_1) = B'$  et  $h(C_1) = C'$ .
  - Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul  $z$ , on a :

$$\left| \frac{1}{z} - 1 \right| = 1 \iff |z - 1| = |z|.$$

- En déduire que l'image par  $h$  de la droite  $\mathcal{D}_1$  est incluse dans un cercle  $\mathcal{C}$  dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.  
On admet que l'image par  $h$  de la droite  $\mathcal{D}_1$  est le cercle  $\mathcal{C}$  privé de O.
4. Déterminer l'image par l'application  $f$  de la droite  $\mathcal{D}$ .

#### EXERCICE 4

5 points

#### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_A = -1 + i, \quad z_B = 2i \quad \text{et} \quad z_C = 1 + 3i.$$

et  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = x + 2$ .

- Prouver que les points A, B et C appartiennent à la droite  $\mathcal{D}$ .  
Sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique, placer les points A, B, C et tracer la droite  $\mathcal{D}$ .
- Résoudre l'équation  $(1+i)z + 3 - i = 0$  et vérifier que la solution de cette équation est l'affixe d'un point qui n'appartient pas à la droite  $\mathcal{D}$ .

Dans la suite de l'exercice, on appelle  $f$  l'application qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  différente de  $-1 + 2i$ , fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $\frac{1}{(1+i)z + 3 - i}$ .

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par  $f$  de la droite  $\mathcal{D}$ .



3. Soit  $g$  la transformation du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , fait correspondre le point  $M_1$  d'affixe  $(1+i)z+3-i$ .
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $g$ .
  - Calculer les affixes des points  $A_1$ ,  $B_1$  et  $C_1$ , images respectives par  $g$  des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
  - Déterminer l'image  $\mathcal{D}_1$  de la droite  $\mathcal{D}$  par la transformation  $g$  et la tracer sur la figure.
4. Soit  $h$  l'application qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  non nulle, fait correspondre le point  $M_2$  d'affixe  $\frac{1}{z}$ .
- Déterminer les affixes des points  $h(A_1)$ ,  $h(B_1)$  et  $h(C_1)$  et placer ces points sur la figure.
  - Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul  $z$ , on a :

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \iff |z-2| = |z|.$$

- En déduire que l'image par  $h$  de la droite  $\mathcal{D}_1$  est incluse dans un cercle  $\mathcal{C}$  dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.
  - Démontrer que tout point du cercle  $\mathcal{C}$  qui est distinct de  $O$  est l'image par  $h$  d'un point de la droite  $\mathcal{D}_1$ .
5. Déterminer l'image par l'application  $f$  de la droite  $\mathcal{D}$ .

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Antilles–Guyane 13 septembre 2012 ∞

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère orthonormal de l'espace.

On note  $\mathcal{D}$  la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Soit  $\mathcal{P}$  le plan défini par l'équation  $x + y + 2z - 1 = 0$ .

Soit  $\mathcal{S}$  la sphère de centre  $B(1; -1; 0)$  et de rayon 1.

Pour chacune des phrases ci-dessous, une seule des trois propositions est exacte. Dans chaque cas, indiquer la bonne réponse en justifiant soigneusement votre choix.

Il est attribué pour chaque question 0,5 point si la réponse est exacte et 0,5 point si la justification est correcte.

1. La droite  $\mathcal{D}$  et le plan  $\mathcal{P}$  sont :
  - a. parallèles;
  - b. perpendiculaires;
  - c. non parallèles et non perpendiculaires.
2. Soit  $\mathcal{P}'$  le plan contenant la droite  $\mathcal{D}$  et perpendiculaire au plan  $\mathcal{P}$ .  $\mathcal{P}'$  admet pour équation cartésienne :
  - a.  $-2y + z + 2 = 0$ ;
  - b.  $2x - z = 0$ ;
  - c.  $x - y - z = 0$ .
3. La droite  $\Delta$ , intersection du plan  $\mathcal{P}$  et du plan d'équation  $2x - z = 0$ , admet pour représentation paramétrique :
  - a.  $\begin{cases} x = t \\ y = -3t + 1 \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R};$
  - b.  $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R};$
  - c.  $\begin{cases} x = t \\ y = -5t + 1 \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$
4. L'intersection de la sphère  $\mathcal{S}$  et du plan  $\mathcal{P}$  est :
  - a. un point;
  - b. l'ensemble vide;
  - c. un cercle.

EXERCICE 2

5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = \sqrt{3} + i ; \quad z_B = -1 + i\sqrt{3} ; \quad z_C = -1 - 3i.$$

On note D l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle de mesure  $\frac{\pi}{2}$ .

On note E l'image du point B par la translation de vecteur  $\overrightarrow{OC}$ .

1.
  - a. Écrire les nombres complexes  $z_A$  et  $z_B$  sous forme exponentielle.
  - b. Sur une feuille de papier millimétré, en prenant pour unité graphique 2 cm, placer les points A et B et C.
  - c. Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle.
2.
  - a. Construire les points D et E. Calculer leurs affixes  $z_D$  et  $z_E$ .
  - b. Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{OE}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont orthogonaux et que  $OE = AD$ .
3. Le but de cette question est de retrouver le résultat précédent dans un cas plus général. Il est inutile de refaire une figure.

Soient A, B, C, D et E les points d'affixes respectives non nulles  $z_A, z_B, z_C, z_D$  et  $z_E$  tels que

le triangle OAB est rectangle isocèle en O avec  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$ ;

le triangle OCD est rectangle isocèle en O avec  $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{2}$ ;

Le quadrilatère OBEC est un parallélogramme.

- a. Justifier les égalités suivantes :

$$z_B = iz_A ; \quad z_D = iz_C ; \quad z_E = iz_A + z_C$$

- b. Montrer que

$$\frac{z_D - z_A}{z_E} = i.$$

- c. Interpréter géométriquement  $\left| \frac{z_D - z_A}{z_E} \right|$  et  $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_E}\right)$  puis conclure.

## EXERCICE 2

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On tracera la figure sur une feuille de papier millimétré, en prenant pour unité graphique 1 cm.

### Partie A : tracé d'une figure

Soient A, B et C les points d'affixes respectives  $z_A = -2 - 4i$ ;  $z_B = -6i$ ;

$z_C = 3 - 3i$ .

1. Placer le point D tel que le triangle ABD est isocèle rectangle en D, avec  $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{2}$ .
2. Construire le point E tel que le triangle OEA est isocèle rectangle en E avec  $(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EO}) = \frac{\pi}{2}$ .
3. Vérifier que l'affixe du point D est  $z_D = -4i$ .

**Le but de l'exercice est de montrer de deux manières que les droites (ED) et (BC) sont perpendiculaires et que les distances ED et BC sont égales.**

**Partie B : première méthode**

1. Soit  $g$  la similitude directe de centre A qui transforme B en D.

- a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude  $g$ .
- b. En déduire que l'écriture complexe de  $g$  est

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 3 - i.$$

- c. Justifier que le point E est l'image du point O par la similitude  $g$ .
- d. En déduire l'affixe du point E.

2. Calculer le module et un argument de  $\frac{z_B - z_C}{z_E - z_D}$  et conclure pour le problème posé.

**Partie C : deuxième méthode**

1. On considère la rotation de centre C et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

Quelle est l'image du point O par cette rotation? Justifier la réponse.  
En déduire la nature du triangle OBC.

2. Soit  $f$  la similitude directe de centre B, d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et de rapport  $\sqrt{2}$ .

Soit  $h$  la similitude directe de centre A, d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

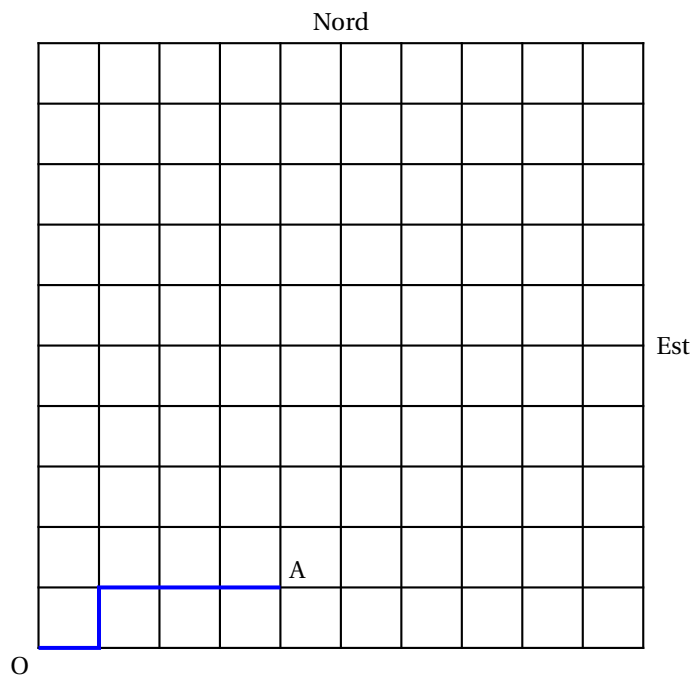
- a. Donner l'angle et le rapport de la similitude  $h \circ f$ .
- b. Quelle est l'image de la droite (BC) par  $h \circ f$ ? Justifier.
- c. Conclure pour le problème posé.

**EXERCICE 3**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

Les rues d'une ville nouvelle sont structurées de telle sorte que les p,tés de maisons sont des carrés superposables et les rues sont toutes parallèles ou perpendiculaires. On identifie le plan de la ville au quadrillage d'un carré de 10 unités sur 10 dans lequel on se repère avec des points à coordonnées entières qui correspondent aux carrefours :



Le point O a pour coordonnées  $(0; 0)$ , le point A a pour coordonnées  $(4; 1)$ .

On s'intéresse aux chemins partant de O et arrivant à un autre point  $M$  de coordonnées  $(p; q)$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels tels que  $p \leq 10$  et  $q \leq 10$ .

**À chaque intersection, on ne peut aller que vers le nord (N) ou vers l'est (E).**

Dans tout l'exercice, on décrit un chemin à l'aide d'un mot composé successivement des lettres N ou E qui indiquent dans l'ordre la direction à suivre à chaque intersection.

On appelle *longueur* d'un chemin le nombre de lettres employées pour le décrire.

Par exemple :

Pour se rendre en A, on peut suivre par exemple les chemins NEEEE ou ENEEE (marqué en gras sur la figure) ; ces deux chemins ont une longueur égale à 5.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

### Partie A - Dénombrement

1. Donner la liste de tous les chemins permettant de se rendre en A.
2. Soit  $M$  un point de coordonnées  $(p; q)$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels tels que  $p \leq 10$  et  $q \leq 10$ .  
Exprimer, en fonction de  $p$  et  $q$ , la longueur des chemins qui permettent d'arriver en  $M$ .
3. Montrer qu'il y a  $\binom{p+q}{p}$  chemins différents qui permettent d'arriver en  $M$ .
4. Dénombrer les chemins pour arriver au point C de coordonnées  $(7; 5)$ .
5. Dénombrer les chemins pour arriver en C en passant par A.

### Partie B - Étude d'une variable aléatoire

Tous les chemins considérés dans la suite de l'exercice vérifient les deux propriétés suivantes :

- ils sont de longueur 5;
- un promeneur part de O et à chaque intersection la probabilité qu'il aille vers le Nord est de  $\frac{2}{3}$  (et donc de  $\frac{1}{3}$  vers l'Est), indépendamment de son choix précédent.

On appelle  $X$  la variable aléatoire qui à tout chemin suivi par le promeneur associe le nombre de fois où il va vers le Nord.

1. Énumérer, en donnant la liste de leurs coordonnées, tous les points sur lesquels peut aboutir un chemin.
2. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
3. Calculer la probabilité que le promeneur arrive en A.

**EXERCICE 4****6 points****Commun à tous les candidats****Partie A : étude d'une fonction**

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$  ainsi que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$ .

1. Calculer les limites de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et en 1.
2. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .
3. En déduire que si  $x \geq e$  alors  $f(x) \geq e$ .

**Partie B : étude d'une suite récurrente**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe  $\mathcal{C}$  et la droite  $\mathcal{D}$ , placer les points  $A_0, A_1$  et  $A_2$  d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives  $u_0, u_1$  et  $u_2$ . On laissera apparents les traits de construction.

Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite  $(u_n)$ ?

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq e$ .  
**b.** Déterminer les variations de la suite  $(u_n)$ .  
**c.** En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.  
**d.** Déterminer sa limite  $\ell$ .

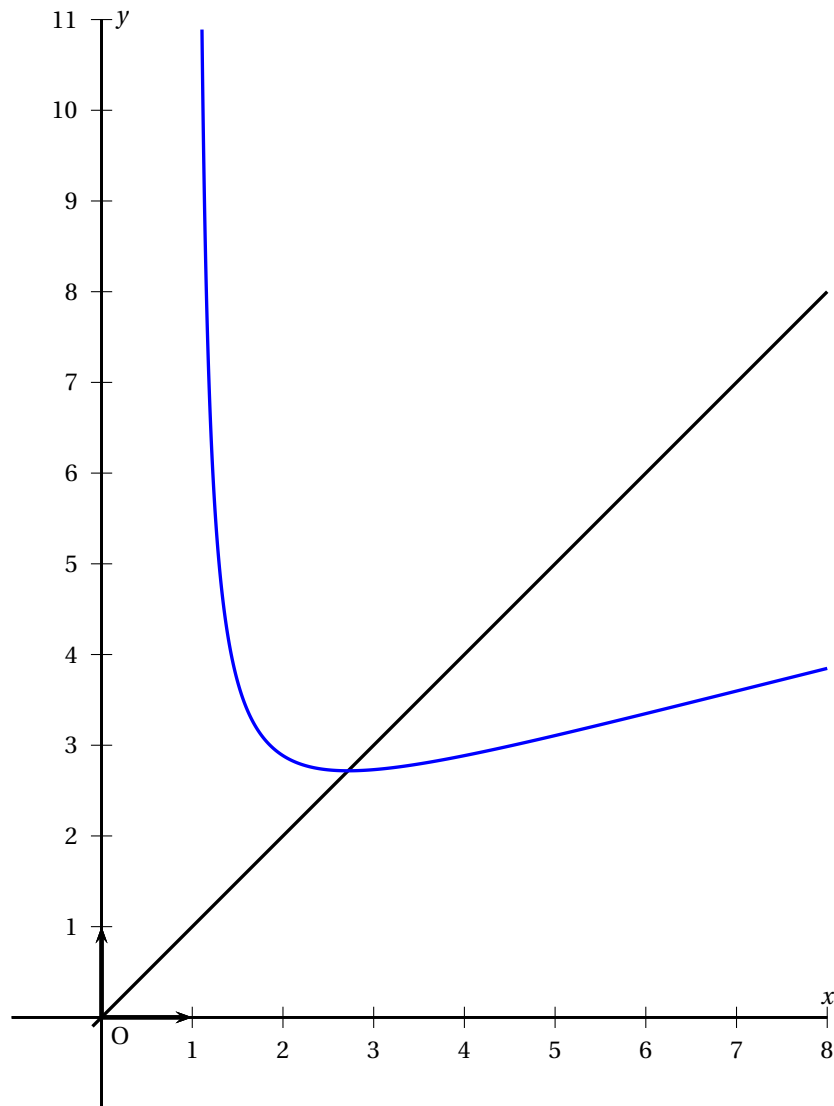
3. On donne l'algorithme suivant :

```

X est une variable réelle ; Y est une variable entière
Affecter 5 à X et 0 à Y
Tant que X > 2,72
  Faire
    Affecter (X / ln X) à X
    Affecter Y + 1 à Y
  Fin de Tant que
Afficher Y
  
```

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

$n$	0	1	2	3	4	5
$u_n$	5	3,1066746728	2,7406525323	2,7183726346	2,71828183001	2,7182818285

**ANNEXE**  
**Exercice 4****Commun à tous les candidats****À rendre avec la copie**

## ∞ Baccaauréat S Métropole 13 septembre 2012 ∞

### EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

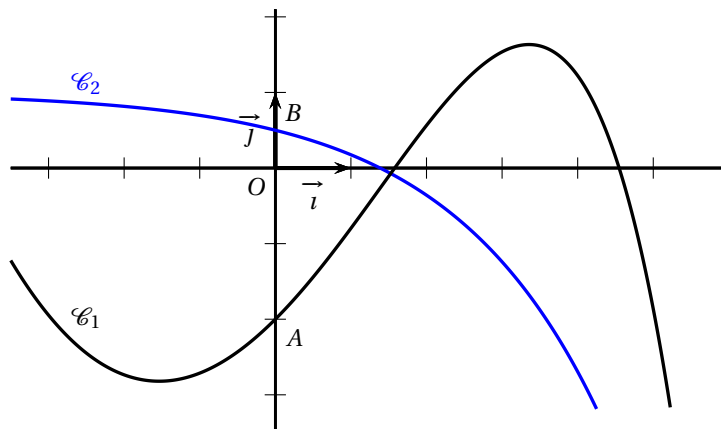
Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  dont le tableau de variations est donné ci-dessous où  $a$  et  $b$  désignent deux réels.

$x$	$-\infty$	$a$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$ $b$ $\searrow$		$-\infty$

1. Déterminer le signe de  $f'(x)$  selon les valeurs de  $x$ .
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on a tracé deux courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .

Elles coupent l'axe des ordonnées aux points  $A$  et  $B$  d'ordonnées  $-2$  et  $\frac{1}{2}$  respectivement.

L'une de ces courbes est la courbe représentative de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  et l'autre la courbe représentative d'une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .



- a. Indiquer laquelle de ces deux courbes est la courbe représentative de la fonction  $f$ . Justifier la réponse.
- b. À l'aide des courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , prouver que  $1 < a < 2$  et  $b > 0$ .
3. Dans cette question, on admet que la fonction  $f$  est telle que, pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) - 2f'(x) = x.$$

- a. Déterminer une fonction affine  $g$  telle que pour tout réel  $x$ ,  
 $g(x) - 2g'(x) = x$ .
- b. Démontrer que la fonction  $f - g$  est une solution de l'équation différentielle  $y' = \frac{1}{2}y$ .
- c. Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'existence d'un réel  $k$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = ke^{\frac{1}{2}x} + x + 2$ .



- d. En utilisant les coordonnées des points  $A$  et  $B$ , déterminer les fonctions  $f$  et  $F$  ainsi que les réels  $a$  et  $b$ .

**EXERCICE 2****5 points****Commun à tous les candidats**

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1. Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher.
 

On prélève au hasard une boule de l'urne.  
Si elle est rouge, on la remet dans l'urne et on prélève au hasard une seconde boule.  
Si la première boule est noire, on prélève au hasard une seconde boule dans l'urne sans remettre la boule tirée.

  - a. Quelle est la probabilité que les boules tirées soient rouges?
  - b. Calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit noire.  
Calculer la probabilité que la première boule soit rouge sachant que la seconde est noire.
2. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.
 

Une urne contient quatre boules rouges et  $n$  boules noires indiscernables au toucher.  
On prélève successivement et au hasard quatre boules de l'urne en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.  
La variable aléatoire  $X$  donnant le nombre de boules rouges tirées au cours de ces quatre tirages suit la loi binomiale de paramètres 4 et  $p$ .

  - a. Donner l'expression de  $p$  en fonction de  $n$ .
  - b. Démontrer que la probabilité  $q_n$  que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire est telle que  $q_n = 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$ .
  - c. Quel est le plus petit entier naturel  $n$  pour lequel la probabilité  $q_n$  est supérieure ou égale à 0,9999?

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{7}{u_n} \right) \quad (\star)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .

1. On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{7}{x} \right).$$

Démontrer que la fonction  $f$  admet un minimum.

En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq \sqrt{7}$ .

2. a. Soit  $n$  un entier naturel quelconque.  
Étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .
- b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente?

c. On déduit de la relation ( $\star$ ) que la limite  $\ell$  de cette suite est telle que  $\ell = \frac{1}{2} \left( \ell + \frac{7}{\ell} \right)$ .

Déterminer  $\ell$ .

3. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2} \frac{(u_n - \sqrt{7})^2}{u_n}$ .

4. On définit la suite  $(d_n)$  par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad d_{n+1} = \frac{1}{2} d_n^2.$$

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n - \sqrt{7} \leq d_n.$$

b. Voici un algorithme :

Variables :	$n$ et $p$ sont des entiers naturels $d$ est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de $p$ .
Initialisations :	Affecter à $d$ la valeur 1. Affecter à $n$ la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$ .   Affecter à $d$ la valeur $0,5d^2$   Affecter à $n$ la valeur $n + 1$ .
Sortie :	Afficher $n$ .

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.

Quelle inégalité peut-on en déduire pour  $d_5$  ?

Justifier que  $u_5$  est une valeur approchée de  $\sqrt{7}$  à  $10^{-9}$  près.

#### EXERCICE 4

5 points

#### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou si elle est fautive en justifiant la réponse.

Un point sera attribué pour chaque réponse correctement justifiée. Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1. L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  telle que  $|z - 1 + 2i| = |z + 3 - 4i|$  est une droite passant par le point  $H$  d'affixe  $5 + 5i$ .
2. On note  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $2 - i$ ,  $1 + i$  et  $3 - 2i$ .  
L'image du point  $B$  par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $-2$  est le point  $C$ .
3. Soit  $f$  la transformation complexe qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que

$$z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)z.$$

L'image d'une droite  $d$  du plan par la transformation  $f$  est une droite qui est perpendiculaire à la droite  $d$ .

Pour les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé

$$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

4. Soit  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $3x + y - 7 = 0$  et  $\mathcal{D}$  la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La droite  $\mathcal{D}$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}$ .

5. Soient  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $x + 3y - 4z + 1 = 0$  et  $A$  le point de coordonnées  $(1 ; 4 ; -1)$ .  
La sphère  $\mathcal{S}$  de centre  $A$  et de rayon 4 est sécante au plan  $\mathcal{P}$ .

#### EXERCICE 4

5 points

#### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse.

Un point sera attribué pour chaque réponse correctement justifiée. Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.

1. Soit  $(E) \quad 5x + 6y = 3$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.  
Les seuls couples qui sont solutions de l'équation  $(E)$  sont les couples  $(18k + 3, -15k - 2)$  où  $k$  est un entier relatif.

2. Le reste de la division euclidienne de  $3^{2012}$  par 7 est égal à 6.

Pour les questions suivantes, le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On note  $A$  le point d'affixe  $2 - i$  et  $B$  l'image du point  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

Le point  $C$  est le milieu du segment  $[AB]$ .

3. Le point  $C$  est l'image du point  $O$  par la similitude directe de centre  $A$ , de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .
4. Soit  $f$  la similitude directe qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que  $z' = (-1 + i)z$ .  
La transformation composée  $f \circ f$  transforme la droite  $(AB)$  en une droite qui est perpendiculaire à  $(AB)$ .
5. La transformation complexe qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que  $z' = (1 - i)z + 3 - i$ , est la similitude directe de centre  $A$ , de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $-\frac{\pi}{4}$ .

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Amérique du Sud 13 novembre 2012 ∞

Exercice 1

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Restitution organisée de connaissance

L'objet de cette question est de démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

On suppose connus les résultats suivants :

- La fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et est égale à sa fonction dérivée
- $e^0 = 1$
- Pour tout réel  $x$ , on a  $e^x > x$
- Soit deux fonctions  $v$  et  $w$  définies sur l'intervalle  $[A; +\infty[$ , où  $A$  est un réel positif. Si pour tout  $x$  de  $[A; +\infty[$ ,  $v(x) \leq w(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = +\infty$ .

a. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $\varphi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ .

Montrer que pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ ,  $\varphi(x) \geq 1$ .

b. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$ .

- a. Étudier la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
- b. Étudier les variations de la fonction  $f$ , puis dresser son tableau de variations sur  $[0; +\infty[$ .

Partie B

On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1 mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On appelle  $g(t)$  la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant  $t$  exprimé en heures ( $t \geq 0$ ).

On constate expérimentalement que la fonction  $g$  est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}.$$

1. On considère l'équation différentielle

$$(E'): \quad y' + \frac{1}{2}y = 0$$

- a. Déterminer le réel  $a$  pour que la fonction  $u$  définie par l'équation  $u(t) = ate^{-\frac{1}{2}t}$  soit solution de l'équation (E).
- b. Montrer qu'une fonction  $v$  est solution de l'équation (E) si, et seulement si, la fonction  $h = v - u$  est solution de l'équation (E').
- c. Résoudre l'équation (E').
- d. En déduire les solutions de l'équation (E).

2. On suppose qu'à l'instant  $t = 0$ , la quantité de principe actif présente dans le sang est nulle. Montrer que la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie cette condition initiale est la fonction  $f$  étudiée dans la **partie A**.
3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Affecter la valeur 3 à la variable $n$ .
Traitement	Tant que $f(n) > 0,1$ incrémenter la variable $n$ de 1.
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la valeur de $n$ .

où  $f$  est la fonction étudiée dans la **partie A**.

- a. À l'aide de la question 2. a. de la **partie A**, expliquer pourquoi il est certain que cet algorithme donne une valeur en sortie.
- b. Quelle est la valeur  $n_0$  de la variable  $n$  obtenue à la sortie de l'algorithme?
- c. L'absorption du médicament par l'animal a lieu un matin à 8 h. À quelle question cet algorithme permet-il de répondre?

### Exercice 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique 2 cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = i, \quad z_B = 2i, \quad \text{et} \quad z_C = 1.$$

On considère la transformation  $f$  qui à tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$ , distinct de A, associe le point  $M'$  d'affixe

$$z' = \frac{2iz}{z-i}.$$

On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par la transformation  $f$ .
2. Déterminer, sous forme algébrique, les affixes des points  $B'$  et  $C'$ , images respectives des points B et C par  $f$ .
3.
  - a. Montrer que, pour tout point  $M$  distinct de A, l'affixe  $z'$  de  $M'$  vérifie l'égalité  $z' - 2i = \frac{-2}{z-i}$ .
  - b. En déduire que si le point  $M$  appartient au cercle  $\Gamma$  de centre A et de rayon 1, alors son image  $M'$  appartient à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
  - c. Exprimer une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{BM'})$  en fonction d'une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ .
  - d. On considère le point D d'affixe  $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ . Vérifier que D appartient au cercle  $\Gamma$ .  
Construire, à la règle et au compas, le point D et son image  $D'$  par  $f$ .
4. On note  $G$  l'isobarycentre des points O, B et C.
  - a. Déterminer l'affixe du point  $G$ .
  - b. On admet que l'image  $G'$  du point  $G$  pour affixe  $z_{G'} = -3 - i$ . Le point  $G'$  est-il l'isobarycentre des points O,  $B'$  et  $C'$ ?

**Exercice 2****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan orienté, on considère un rectangle direct ABCD tel que  $AB = L$  et  $AD = 1$  ( $L > 1$ ).  
 Sur les segments [AB] et [CD], on place respectivement les points F et E tels que AFED soit un carré.  
 On suppose qu'il existe une similitude directe  $f$  de rapport  $k$  telle que :

$$f(A) = B, \quad f(B) = C, \quad f(C) = E.$$

**Partie A**

1. En utilisant des rapports de longueurs, montrer que  $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .
2. a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude  $f$ .  
 On appelle  $\Omega$  le centre de la similitude  $f$ .
  - b. Déterminer l'image par la composée  $f \circ f$  des points  $\Omega$ , A et B.
  - c. Quelle est la nature de la transformation  $f \circ f$ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
  - d. En déduire que  $\Omega$  est le point d'intersection des droites (AC) et (BE).
3. a. Déterminer l'image de la droite (CD) par la similitude  $f$ .
  - b. En déduire une construction du point  $E'$ , image du point E par la similitude  $f$ .

**Partie B**

Le plan est rapporté au repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$ .  
 On appelle  $z$  l'affixe du point  $M$ , et  $z'$  l'affixe du point  $M'$ , image du point  $M$  par  $f$ .

1. Montrer que  $z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}iz + \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .
2. Déterminer l'image du point D par  $f$ .

**Exercice 3****4 points****Commun à tous les candidats**

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraîne à faire des services.  
 Pour tout entier naturel non nul, on note  $R_n$  l'évènement « le joueur réussit le  $n$ -ième service » et  $\overline{R_n}$  l'évènement contraire.

Soit  $x_n$  la probabilité de  $R_n$  et  $y_n$  celle de  $\overline{R_n}$ .

La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,7.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées

- si le joueur réussit le  $n$ -ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,8;
- si le joueur ne réussit pas le  $n$ -ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,7.

1. On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.  
 Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de services réussis sur ces deux premiers services.
  - a. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ . (On pourra utiliser un arbre de probabilité)
  - b. Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$  de la variable aléatoire  $X$ .
2. On s'intéresse maintenant au cas général.
  - a. Donner les probabilités conditionnelles  $P_{R_n}(R_{n+1})$  et  $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$ .
  - b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :  $x_{n+1} = 0,1x_n + 0,7$ .

3. Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel non nul par

$$u_n = 9x_n - 7.$$

Dans ces deux questions, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

- a. Déterminer la nature de la suite  $(u_n)$ .
- b. En déduire la limite de la suite  $(x_n)$ .

#### Exercice 4

5 points

#### Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $\mathcal{P}$  le plan d'équation cartésienne  $2x - y + 3z - 1 = 0$  et soit S le point de coordonnées  $(1 ; 3 ; 5)$ .

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie, ou fausse, et proposer une démonstration de la réponse indiquée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. Les points d'intersection du plan  $\mathcal{P}$  avec les trois axes du repère sont les sommets d'un triangle isocèle.
2. La droite  $\delta_1$  de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

est incluse dans le plan  $\mathcal{P}$ .

3. La droite  $\delta_2$  de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 7 + 4t \\ z = 7 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

est la droite parallèle à la droite  $\delta_1$  passant par le point S.

4. Le projeté orthogonal du point S sur le plan  $\mathcal{P}$  a pour coordonnées

$$\left(-\frac{6}{7}; \frac{55}{14}; \frac{31}{14}\right).$$

5. Le plan  $\mathcal{P}$  coupe la sphère de centre S et de rayon 3.

Durée : 4 heures

⌘ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 16 novembre 2012 ⌘

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = 5 \ln(x+3) - x.$$

1. a. On appelle  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$ . Calculer  $f'(x)$  et étudier son signe sur  $[0; +\infty[$ .
- b. Donner, dans un tableau, les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- c. Montrer que, pour tout  $x$  strictement positif on a

$$f(x) = x \left( 5 \frac{\ln x}{x} - 1 \right) + 5 \ln \left( 1 + \frac{3}{x} \right).$$

- d. En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- e. Compléter le tableau de variation de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
2. a. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[0; +\infty[$ . On notera  $\alpha$  cette solution.
- b. Après avoir vérifié que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[14; 15]$ , donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
- c. En déduire le signe de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

Partie B

Soit  $(u_n)$  la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 5 \ln(u_n + 3) \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n \geq 0$$

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par

$$g(x) = 5 \ln(x+3).$$

En annexe 1 on a tracé dans un repère orthonormé la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$  et la courbe  $\mathcal{C}$ , courbe représentative de la fonction  $g$ .

1. a. Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes  $u_0, u_1, u_2$  de la suite  $(u_n)$  en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.
- b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite  $(u_n)$ .
2. a. Étudier le sens de variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- b. Vérifier que  $g(\alpha) = \alpha$  où  $\alpha$  est défini dans la partie A question 2. a.
- c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $0 \leq u_n \leq \alpha$ .
- d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.



e. En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ .

3. On considère l'algorithme suivant :

```

u prend la valeur 4
Répéter Tant que  $u - 14,2 < 0$ 
    u prend la valeur de  $5 \ln(u + 3)$ 
Fin du Tant que
Afficher u
  
```

a. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Justifier que cet algorithme se termine.

b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

## EXERCICE 2

4 points

### Commun à tous les candidats

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Tous les résultats seront donnés sous la forme de fractions.

On dispose d'une urne U contenant trois boules blanches et deux boules rouges indiscernables au toucher.

#### Partie A

On considère l'expérience suivante : on tire successivement trois fois de suite une boule de l'urne U, en remettant à chaque fois la boule dans l'urne.

On appelle  $X$  le nombre de fois où on a obtenu une boule rouge.

1. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité d'avoir obtenu exactement une fois une boule rouge.
3. Déterminer l'espérance mathématique de  $X$  et interpréter ce résultat.

#### Partie B

On procède maintenant à une nouvelle expérience :

- on tire une boule de l'urne U. Si elle est rouge on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule à nouveau;
- si cette deuxième boule est rouge, on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule pour la troisième fois.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.
2. On appelle  $Y$  le nombre de boules rouges obtenues lors d'une expérience. La variable aléatoire  $Y$  prend donc la valeur 1 si la dernière boule est rouge et 0 sinon.  
Déterminer la loi de probabilité de  $Y$  et son espérance mathématique.
3. On appelle  $N$  le nombre de tirages effectués lors d'une expérience.  
Déterminer la loi de probabilité de  $N$  et son espérance mathématique.
4. On appelle *proportion moyenne de boules rouges* le rapport de l'espérance du nombre de boules rouges obtenues sur l'espérance du nombre de tirages.  
Montrer que la proportion moyenne de boules rouges dans l'expérience est la même que la proportion de boules rouges dans l'urne.

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats****Partie A : restitution organisée de connaissances**

On suppose connu le résultat suivant :

Soit  $a$  un réel.

Soit  $(E_0)$  l'équation différentielle de fonction inconnue  $y$  de variable réelle, dérivable de fonction dérivée  $y'$  :

$$y' = ay \quad (E_0)$$

Les solutions de  $(E_0)$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{ax}$ , où  $C$  est une constante réelle.

On considère  $a$  et  $b$  deux réels, avec  $a$  non nul.

Démontrer que les solutions de l'équation différentielle de fonction inconnue  $y$  de variable réelle, dérivable de fonction dérivée  $y'$  :

$$y' = ay + b \quad (E)$$

sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ , où  $C$  est une constante réelle.

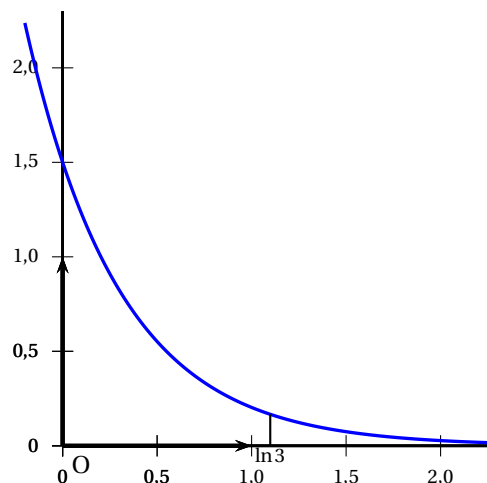
**Partie B**

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse :

- Affirmation 1 :** si une fonction  $f$  définie sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  est solution de l'équation  $y' + 3y = 6$  alors la courbe représentant  $f$  admet une asymptote horizontale en  $+\infty$ .
- Affirmation 2 :** si une fonction  $f$  définie sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  est solution de l'équation  $y' = y$  alors pour tous réels  $\alpha$  et  $\beta$ ,  
 $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \times f(\beta)$ .

- La courbe d'une fonction solution de l'équation différentielle  $y' = -2y$  coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée  $\frac{3}{2}$  (voir figure ci-contre).

**Affirmation 3 :** l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \ln(3)$ , est  $\frac{2}{3}$

**EXERCICE 4****5 points****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on appelle  $A$  le point d'affixe 1 et  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $A$  et de rayon 1.

La figure sera réalisée sur une feuille de papier millimétré avec 4 cm pour unité graphique.

### Partie A

On considère l'équation

$$(E): z^2 - 2z + 2 = 0,$$

où  $z$  est un nombre complexe. On appelle  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de (E).

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ .
2. On appelle  $M_1$  et  $M_2$  les points d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$  dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Montrer que  $M_1$  et  $M_2$  appartiennent au cercle  $\mathcal{C}$ .

### Partie B

On considère l'application  $f$  du plan complexe qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  distinct de A associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par

$$z' = \frac{2z-1}{2z-2}.$$

1. Placer le point A et tracer le cercle  $\mathcal{C}$  sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que pour tout complexe  $z$  distinct de 1 on a

$$(z' - 1)(z - 1) = \frac{1}{2}.$$

3. Montrer que pour tout point  $M$  distinct de A on a :

- $AM \times AM' = \frac{1}{2}$ ;
- $M' \neq A$ ;
- $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) = 0 + 2k\pi$ , où  $k$  est un entier relatif

4. On considère le point P d'affixe  $z_P = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$ . Construire le point P.
5. En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point P', image de P par  $f$ , et réaliser cette construction.
6. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.  
Soit un point  $M$  appartenant à la droite D d'équation  $x = \frac{3}{4}$ . Soit  $M'$  son image par  $f$ .
  - a. Montrer que le point  $M'$  appartient au cercle  $\mathcal{C}'$  de centre O de rayon 1.
  - b. Tout point de  $\mathcal{C}'$  a-t-il un antécédent par  $f$ ?

### EXERCICE 4

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties sont indépendantes.

### Partie A

On considère deux carrés directs ABCD et DCEF de côté 1. Le point I est milieu de [BC] et le point J est milieu de [EF] (voir figure ci-dessous).

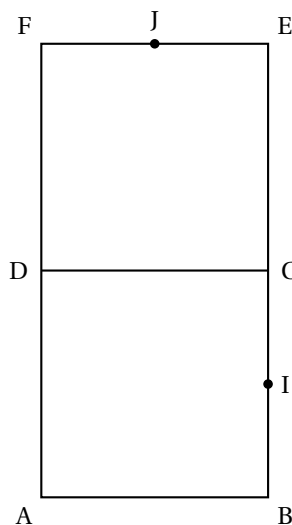
1. On considère la rotation  $r$  de centre  $D$  qui transforme  $A$  en  $C$ . Justifier que  $r(I) = J$ .
2. Justifier que  $r$  est l'unique similitude directe qui transforme  $A$  en  $C$  et  $I$  en  $J$ .
3. On appelle  $s$  la similitude directe qui transforme  $A$  en  $I$  et  $C$  en  $J$ .

On se place dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ .

- a. Donner les affixes des points  $A, C, I$  et  $J$ .
- b. Montrer que l'écriture complexe de  $s$  est

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\right)z + 1 + \frac{1}{2}i.$$

- c. Montrer que le point  $D$  est le centre de  $s$ .



### Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  on considère trois points  $M, N, P$  distincts entre eux et distincts du point  $O$ . On appelle  $m, n, p$  leurs affixes respectives.

On définit la similitude directe  $s_1$  qui transforme  $O$  en  $M$  et  $N$  en  $P$  et la similitude directe  $s_2$  qui transforme  $O$  en  $N$  et  $M$  en  $P$ .

1. Montrer que l'écriture complexe de  $s_1$  est

$$z' = \frac{p-m}{n}z + m.$$

On admet que l'écriture complexe de  $s_2$  est  $z' = \frac{p-n}{m}z + n$ .

2. a. Montrer que si  $OMP N$  est un parallélogramme alors  $s_1$  et  $s_2$  sont des translations.
- b. On suppose que  $OMP N$  n'est pas un parallélogramme. Justifier que  $s_1$  et  $s_2$  ont chacune un centre, et montrer que ces deux points sont confondus.

**Annexe 1**  
**(Exercice 1)**  
**Commun à tous les candidats**

*À rendre avec la copie*

