

Bâtir un cloître

Stéphane ROBERT

professeur de mathématiques au collège Arthur Rimbaud de Villeneuve d'Ascq (59)
et membre des groupes « Arts & Maths » et « Jeux » de l'APMEP

« Rachid aimait s'entretenir avec les érudits de leurs théories et il s'était tout de suite pris d'amitié pour Jack qui venait dîner chez lui plusieurs fois par semaine.

Ce jour-là, comme ils commençaient leur repas, Rachid demanda à Jack : « Que vous ont enseigné les philosophes cette semaine ?

- J'ai lu Euclide. » (...)

- Mais dans ton pays qu'as-tu appris exactement ? » demanda Josef. (...)

[Jack] essaya de se montrer pratique : « Mon beau-père, le bâtisseur, m'a enseigné à faire certaines opérations de géométrie : comment diviser une ligne exactement en deux, comment tracer un angle droit et **comment dessiner un carré à l'intérieur d'un autre de façon que le plus petit ait la moitié de la surface du plus grand.**

- À quoi servent ces calculs ? » interrompit. (...)

« Ces opérations sont essentielles pour établir les plans des constructions, répondit aimablement Jack, sans relever le ton de Josef. **Regarde cette cour. La surface des arcades couvertes est exactement la même que celle de la partie en plein air qui se trouve au centre. La plupart des petites cours sont construites ainsi, y compris les cloîtres des monastères. C'est parce que ces proportions sont les plus agréables. Si le centre est trop grand, il ressemble à une place de marché ; trop petit, il donne l'impression qu'il y a un trou dans le toit.**

- Je ne savais pas ça ! fit Rachid, toujours ravi d'apprendre quelque chose de nouveau.

- Mais, dit Josef, tu pouvais faire toutes ces opérations géométriques avant d'avoir lu Euclide. Je ne vois pas en quoi la lecture de cet ouvrage t'avance ?

- Il vaut toujours mieux comprendre ce qu'on fait, protesta Rachid. (...)

- D'ailleurs, reprit Jack, maintenant que je comprends les principes de la géométrie, j'arrive à trouver des solutions à des problèmes qui déconcertaient mon beau-père. »

Jack s'en voulait de son manque d'éloquence. Euclide lui était apparu comme l'éclair aveuglant d'une révélation, mais il ne parvenait pas à communiquer la passionnante importance de sa découverte. »

Ken Follett, *Les piliers de la Terre*, 1989 - pages 734 & 735 – édition Le Livre de poche
Traduction de Jean Rosenthal

Voilà le problème est posé !

Empiriquement, il s'est avéré que pour obtenir un équilibre des proportions entre la partie couverte faite d'arcades d'un cloître et la partie centrale, il faut que cette dernière de forme carrée soit de même aire que la partie couverte.

En termes purement mathématiques, comment tracer à l'intérieur d'un carré, un second carré d'aire moitié, de même centre et homothétique du premier ?

Une situation classique de géométrie mais dont la présentation sous un angle pratique, artistique et historique ne peut que renforcer la motivation et l'intérêt des élèves. Abordable dès la classe de quatrième et la connaissance du théorème de Pythagore, divers scénarios peuvent s'envisager en fonction des objectifs visés et du profil des classes auxquelles il est destiné.

*Abbaye cistercienne de Notre Dame de Sénanque
et son cloître – XII^e siècle*



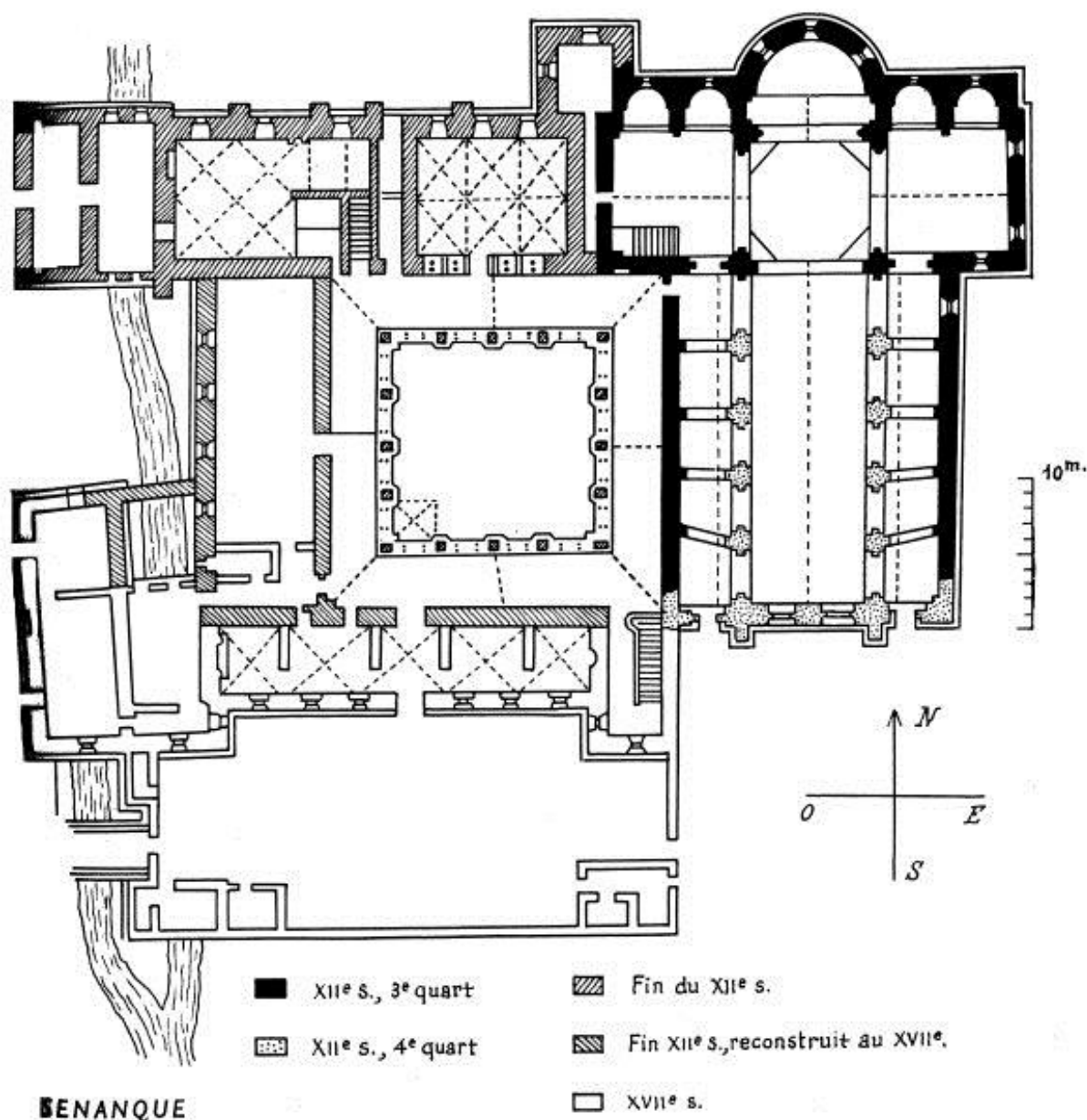
Greudin – Wikipedia



L. Jal Billet – larchivolt-lyon.com

Tout d'abord, nous ne le proposerons pas sous une forme géométrique traditionnelle mais au détour d'un extrait de roman historique. Surprenant d'ailleurs d'entendre parler des *Éléments d'Euclide* dans un best-seller adapté depuis en série télévisée. La trame narrative tourne essentiellement autour de la construction d'une cathédrale dans l'Angleterre du XII^e siècle et nous permet de suivre trois points de vue aux intérêts divergents, celui du clergé, de la noblesse et du maître bâtisseur. C'est ce dernier qui aura, à des fins mathématiques, notre préférence. La découverte de nombreux propos autour des proportions, des constructions géométriques de divers arcs, des unités de mesure, ne peut que ravir les enseignants que nous sommes. Tant de pistes possibles à exploiter en classe, seul ou en lien avec d'autres disciplines.

Ces quelques lignes de roman posent le problème mais ne le résolvent pas. Aucune figure ne les accompagne d'ailleurs pour expliciter la situation. La première phase du travail va donc consister à la représenter. En complément ou en aide à cette tâche, il peut d'ailleurs être pertinent de travailler directement sur le plan d'une abbaye présentant ce type de cloître. Le repérage des différentes parties caractéristiques d'une abbaye médiévale intéressera l'enseignant d'histoire tandis que pour nous, professeur de mathématiques, l'occasion est offerte d'un travail sur les échelles voire même, par simple mesure, d'approcher la solution de notre problème de proportions et de construction.

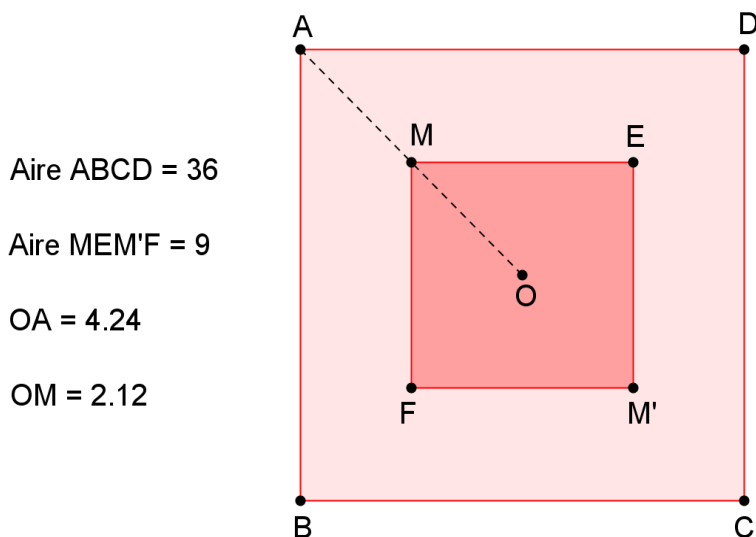


L'art cistercien, MA Dimier et J Porcher, éditions Zodiaque, 1962

Plan de l'abbaye cistercienne de Sénanque et de son cloître – XII^e siècle

Une fois un schéma rapidement tracé donc, quelques évidences se font jour. Certes les sommets du carré central appartiennent aux diagonales du carré extérieur mais où les placer exactement ? Après réalisation d'une figure avec un logiciel de géométrie dynamique, aucune difficulté à trouver une position approximative qui convienne.

Rien de compliqué peut être mais encore faut-il être en mesure d'obtenir cette figure. Une fois placé M, point libre sur le segment [AO], comment construire les trois autres sommets du carré central ? Des tracés de parallèles et de perpendiculaires auxquels va s'ajouter la connaissance des particularités des diagonales d'un carré. Diverses possibilités peuvent s'envisager, soit le fait qu'elles se coupent en leur milieu pour passer par le centre de symétrie O, soit le rappel de leur perpendicularité. Un choix à faire par conséquent mais surtout le réinvestissement de nombreuses connaissances rien qu'à ce stade de modélisation du problème et de conjecture.



$$\text{Aire } ABCD = 36$$

$$\text{Aire } MEM'F = 9$$

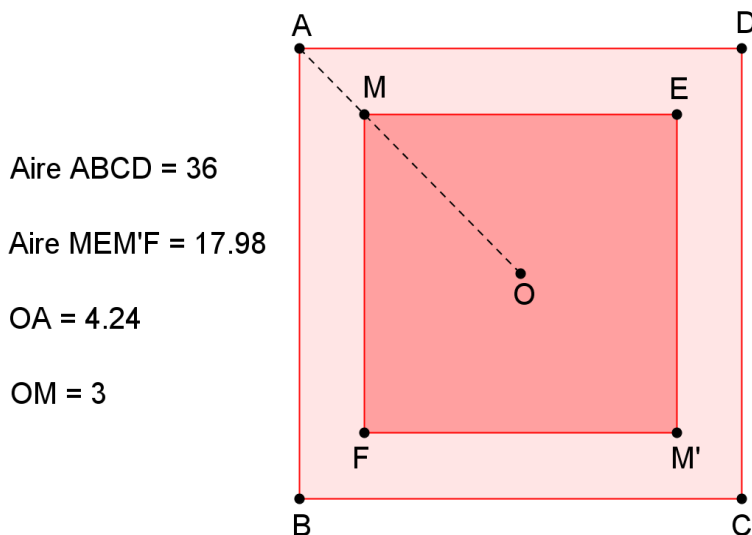
$$OA = 4.24$$

$$OM = 2.12$$

Manifestement, placer M au milieu du segment [OA] ne semble pas être une solution

Au final, il semblerait que la longueur OM doive être égale à la moitié de la longueur du côté du carré extérieur. Rien de très précis cependant puisque la plupart de ce type de logiciels ne proposent que des valeurs approchées des longueurs et des aires.

Le besoin de démontrer que la conjecture obtenue est valide est donc impératif. Pour cela, il nous reste à être en mesure de calculer la longueur d'un côté d'un carré connaissant la longueur de ses diagonales. Une application intéressante de la propriété de Pythagore abordable dès la classe de quatrième ou en troisième pour rafraîchir les souvenirs sans pour autant procéder à des révisions systématiques.



$$\text{Aire } ABCD = 36$$

$$\text{Aire } MEM'F = 17.98$$

$$OA = 4.24$$

$$OM = 3$$

Une solution approchée pour laquelle il semblerait que nous devions avoir $OM = AD : 2$.

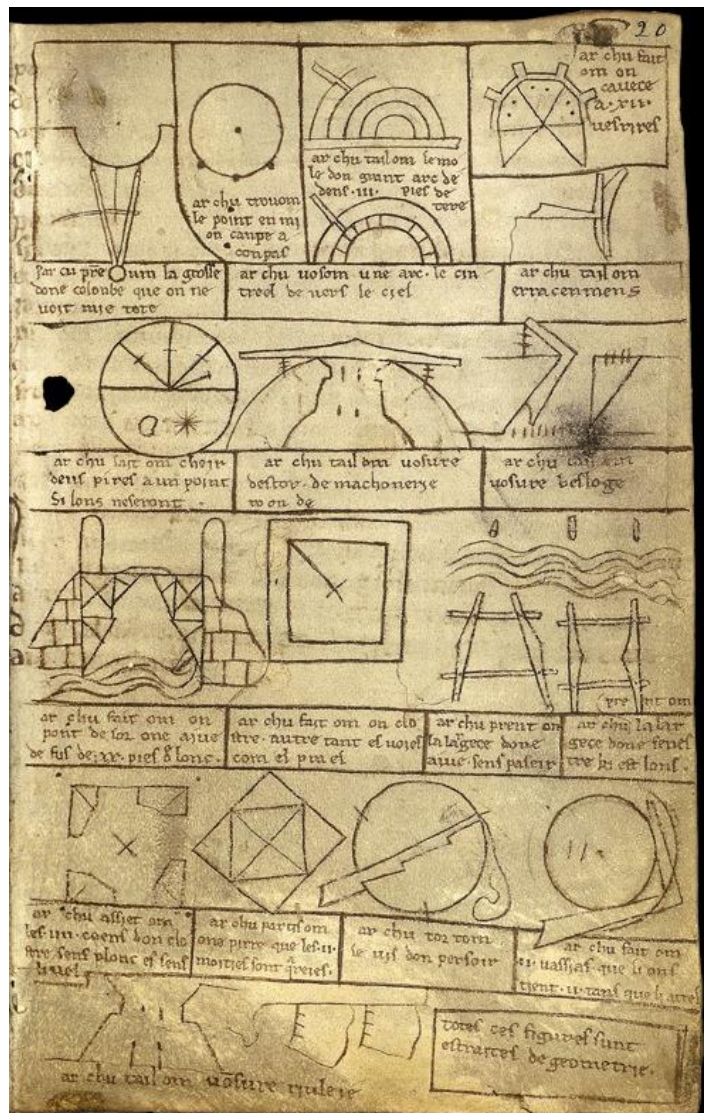
Une autre stratégie de résolution est bien évidemment envisageable, passer par l'étude de l'aire du carré central en fonction de la longueur de sa diagonale et résoudre l'équation du second degré qui va en découler. Une méthode plus rapide certes mais aussi un peu plus technique. Peut être à davantage réserver à des élèves de seconde ?

Avec les outils numériques modernes et nos connaissances et notations mathématiques contemporaines, peu de difficulté donc pour résoudre ce problème. Toutefois au Moyen-âge, point de tout ceci et pire, les ouvriers sur un chantier étaient pour la plupart illettrés. Comment alors mémoriser cette solution et avoir à disposition une construction géométrique effective d'un des sommets du carré intérieur ?

Peu de documents nous sont parvenus des bâtisseurs de cathédrales. Les rares sources historiques proviennent des célèbres *Carnets de Villard de Honnecourt*. Une trentaine de feuillets, écrits probablement par un maître d'œuvre et dessinateur picard, regroupe l'essentiel des techniques de construction de l'époque. Quasi aucune explication ni texte ne sont présents. Par contre nombre de moyens mnémotechniques en référence à diverses positions du corps humain ou de différents animaux ont du permettre aux ouvriers d'un chantier de mémoriser ces différentes techniques.

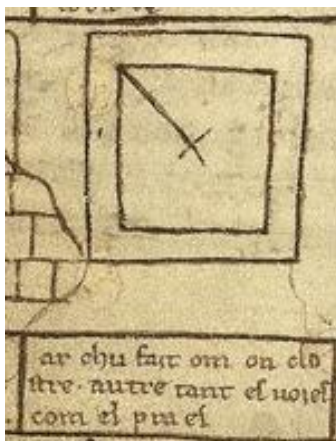
Sur le recto du folio 20 de ces carnets, la solution de notre problème est proposée et nous offre une autre approche possible en classe, si la phase de modélisation et de conjecture par emploi d'un logiciel de géométrie dynamique rebute.

Le travail serait alors non pas de trouver la solution mais de comprendre cette proposition historique et de démontrer sa véracité.



Carnets de Villard de Honnecourt – folio 20 – XIII^e siècle

La démonstration est absente sur ce document, c'est une chose, mais les explications sont elles aussi pour le moins succinctes. Un travail non négligeable d'interprétation est nécessaire pour au final construire un cercle tangent intérieurement aux côtés du carré. Celui-ci coupe les diagonales du carré en quatre points, sommets du carré cherché. Il reste alors à prouver que le carré intérieur a bien une aire moitié de l'aire du carré extérieur...



« Par chu fait om on clostre autretant el voies com el praes »
 « Ainsi on fait un cloître. La voie est autant que le pré »
 Autrement dit : l'allée extérieure a même aire que la pelouse centrale.

Sur ce même folio 20 des *Carnets de Villard de Honnecourt*, une seconde figure attire notre attention : la méthode de construction d'un carré d'aire moitié d'un carré donné. Ici, nulle contrainte d'avoir les côtés des deux carrés parallèles ce qui doit permettre a priori une résolution plus simple. Cette méthode de construction était connue des grecques puisqu'elle apparaît dans un texte de Platon, *Ménon*.

Peut-être est-ce d'ailleurs ainsi que de l'intuition au rapprochement de problèmes géométriques déjà résolus, cette méthode de réalisation des cloîtres est parvenue aux maîtres bâtisseurs ?

« Par chu partis om one pirre que les ii moities sont quareies »
 « Ainsi on partage une pierre pour que les deux parties soient carrées »
 Autrement dit : les deux parties ont la même aire.



Un rapprochement intéressant peut donc être fait et ainsi nous proposer une autre solution au problème voire, en classe, une autre approche possible. Tout d'abord, en joignant les milieux des côtés d'un carré, nous formons un carré d'aire moitié. Le raisonnement de Socrate extrait de *Ménon* nous le prouve de manière éclairante :

« SOCRATE : Mais nous pourrions lui accoler un autre qui lui soit égal ?

L'ESCLAVE : Oui.

SOCRATE : Et ce troisième ici, égal à chacun d'eux ?

L'ESCLAVE : Oui.

SOCRATE : Et ne pourrions-nous donc pas combler ce vide dans le coin ?

L'ESCLAVE : Tout à fait.

SOCRATE : N'est-il donc pas vrai qu'il en résulte quatre espaces égaux là ?

L'ESCLAVE : Si.

SOCRATE : Quoi encore ? Ce tout, combien de fois plus grand que celui-ci devient-il ?

L'ESCLAVE : Quatre fois plus grand.

SOCRATE : Or il devait devenir double pour nous. Ne t'en souviens-tu pas ?

L'ESCLAVE : Tout à fait.

SOCRATE : Eh bien, cette ligne d'angle à angle, ne coupe-t-elle pas en deux chacun de ces espaces ?

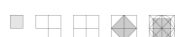
L'ESCLAVE : Si.

SOCRATE : Eh bien, cela ne fait-il pas quatre lignes égales, entourant l'espace que voici ? »

Platon, *Ménon*, 85a - 85b

Traduction d'Émile Chambry

Ensuite, pour avoir les côtés des deux carrés parallèles, il suffit de faire pivoter d'un huitième de tour ce nouveau carré autour de son centre. Soit en résumant graphiquement la globalité du raisonnement :



Au final, nous disposons désormais d'une activité géométrique qui se présente sous forme d'une situation ouverte, qui nécessite réellement le côté « dynamique » d'un logiciel de géométrie et qui offre un intéressant lien avec l'architecture moyenâgeuse. Intéressant non ? Joli peut être ?

En bonus, un conseil de lecture est offert. Impossible de passer à côtés des *Piliers de la Terre* tant l'intrigue est prenante, les découvertes historiques nombreuses à l'époque charnière entre l'emploi du style roman puis du gothique et d'autres potentielles activités mathématiques présentes au fil des pages...

Quelques références :

- *Les piliers de la Terre*, Ken Follett, Éditions Stock, 1989
- *Histoire de géomètres et de géométrie*, Jean-Louis Brahem, Le Pommier, 2011
- *Les cathédrales gothiques dans les villes* – Les dossiers pédagogiques de la BNF
<http://classes.bnf.fr/villard/pres/index.htm>
- *Carnets de Villard de Honnecourt*, XIIIe siècle – Introduction et commentaires, Alain Erlande-Brandenburg, Régine Pernoud, Jean Gimpel et Roland Bechmann, Éditions Stock, 1986
- *Protagoras, Euthydème, Gorgias, Ménexène, Ménon, Cratyle*, Platon, Garnier Flammarion, 1967