Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Benin Étranger groupe II ∾
juin 1991

EXERCICE 1 **4 points**

1. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) & = & 1 \\ f(1) & = & 0 \end{array}\right.$$

a. Étudier la continuité de f en 0 et en 1.

b. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - 1}{x} \quad ; \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x)}{x - 1}.$$

c. Étudier les variations de f et dresser le tableau de ces variations.

d. Représenter f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

2. À l'aide de la question précédente, représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormal l'ensemble des points M de coordonnées $(x~;~y)$ tels que $\ln|x| \cdot \ln|y| = 1$.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit, dans le plan orienté, un triangle (A, B, C) équilatéral direct de centre O. On pose AB $= d$ $(d > 0)$.

1. a. Démontrer que l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}M} = \dfrac{1}{3}d^2$ est une droite que l'on déterminera avec précision.

b. Déterminer le réel k afin que l'ensemble (δ) des points du plan tels que $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{D}M} = k$ passe par le milieu du segment [BC].

c. Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $M\mathrm{A}^2 + M\mathrm{B}^2 + M\mathrm{C}^2 = 2d^2$ est un cercle que l'on déterminera avec précision.

d. Justifier que (Δ) est tangente à (Γ).

2. À tout point M du plan on associe le point M' défini par :

$$M' = S_{(\mathrm{AC})} \circ S_{(\mathrm{AO})}(M)$$

où $S_{(\mathrm{AO})}$ et $S_{(\mathrm{AC})}$ désignent les symétries orthogonales par rapport aux droites (AO) et (AC).

a. Démontrer que M' est l'image de M par une rotation r dont on donnera les éléments caractéristiques.

b. Quelle est l'image, par r, de la droite (BC) ?

c. Démontrer que $\mathrm{O}' = r(\mathrm{O})$ est un point de (Γ).

3. À tout point M de la droite (BC) on associe le point M'' intersection de la droite (AM') et de (δ). M' est le point défini en 2.
   a. Démontrer que M'' est l'image de M par une similitude s dont on précisera les éléments caractéristiques.
   b. Construire l'image (Γ'') de (Γ) par s.
4. Soit N un point de (Γ) distinct de A et de O′. La droite (NO′) coupe (Γ'') en Q.
   a. Démontrer que $(\widehat{(\text{A}N),\ (\text{A}Q)}) = \left(\widehat{(\text{OA}),\ (\text{AO}')}\right)$.
   b. Déterminer $s(N)$.

PROBLÈME **12 points**

Dans tout le problème le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Soit E l'ensemble des points M, du plan $\mathscr{P}$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que

$$x^2 - x - y^2 = 0.$$

1. Démontrer que E est une hyperbole équilatère dont on précisera le centre, les asymptotes et les sommets.
2. Dessiner E.
   Déterminer les foyers et les directrices de E et les placer sur le dessin.
3. Soit M un point de E d'abscisse strictement positive. On désigne par θ la mesure de l'angle $\left(\vec{\imath},\ \overrightarrow{\text{O}M}\right)$ appartenant à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   Exprimer OM en fonction de θ puis déterminer θ afin que l'on ait O$M = \sqrt{3}$.
4. Déterminer tous les points M de E dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ sont deux entiers relatifs.

Partie B

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(z) & = & \dfrac{1}{z} \quad \text{si } z \neq 0 \\ f(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

et l'on désigne par g l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe $g(M)$ d'affixe $f(z)$.

1. Démontrer que f est involutive.
2. Soit $z = x + \text{i}y$ $\quad(x\ ;\ y$ réels). Déterminer en fonction de x et de y la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la transformée de la courbe E par g. On désigne par E′ cette courbe.
4. Soit Δ la droite d'équation $y = tx$ où t désigne un paramètre réel. Démontrer que Δ coupe E′ en deux points dont l'un est O et l'autre M dont on donnera les coordonnées en fonction de t.

Partie C

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe définie paramétriquement dans le plan par :

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad y(t) = \frac{1-t^3}{1+t^2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t)\ ;\ y(t))$.

1. Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ puis $y(-t)$ et $y(t)$; que peut-on en déduire pour $(\mathscr{C})$?

2. Soit $(\mathscr{C}')$ la partie de la courbe $(\mathscr{C})$ correspondant à $t \geqslant 0$.

a. Étudier les fonctions $\begin{array}{llll} x : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & x(t) \end{array}$ et $\begin{array}{llll} y : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & y(t) \end{array}$

(fonction dérivée, signe de $x'(t)$ et $y'(t)$).

On démontrera en particulier que $y'(t)$ s'annule pour une valeur t_0 et on donnera les valeurs exactes puis approchées à 10^{-1} de $x(t_0)$ et $y(t_0)$.

b. Déterminer les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} x(t)$ et $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} y(t)$.

Que peut-on en déduire pour $(\mathscr{C})$?

c. Démontrer que $(\mathscr{C})$ possède en $M(0)$ une tangente dont on donnera une équation.

d. Donner l'équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point $M(1)$.

e. Résumer l'étude précédente par un tableau.

f. Tracer $(\mathscr{C}')$ puis $(\mathscr{C})$.