**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat C juin 1982 Besançon [1] ∾

**EXERCICE 1**

**1.** Calculer la somme suivante pour $x$ réel et $p$ entier naturel

$$1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^p x^p.$$

**2.** Montrer que quels que soient les entiers naturels $x$ et $n$, l'entier $x^{2n+1} + 1$ est divisible par $x+1$.

**3.** En déduire que, quel que soit l'entier naturel $p$, $\left(2^{\left(2^p\right)}\right)^k + 1$ est divisible par $2^{\left(2^p\right)} + 1$ si l'entier $k$ est impair.

**4.** Démontrer qu'une condition nécessaire pour que $2^m + 1$ soit premier est que l'entier naturel $m$ soit une puissance de 2. On ne cherchera pas à étudier si cette condition est suffisante.

**EXERCICE 2**

P est le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
S est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'équation $y = x$, $s$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine passant par O et de vecteur directeur $\vec{\jmath}$.
$k$ étant un réel donné on considère l'application du plan dans lui-même associant au point $M$ de coordonnées $x$ et $y$ le point $M'$ de coordonnées $x'$ et $y'$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & kx \\ y' & = & x + ky. \end{array}\right.$$

Soit $f_k$ cette application.

**1.** Trouver l'ensemble des poins invariants par $f_k$.

**2.** Montrer que $f_0$ est la composée de deux applications simples à déterminer.

**3.** Trouver l'expression analytique de $f_{k'} \circ f_k$ pour deux réels $k$ et $k'$ quelconques. Donner la nature de la composée pour $k' = -k$.

**4.** Déterminer analytiquement l'application $f_k \circ s \circ f_k \circ \text{S}$. Reconnaître cette application et donner ses éléments caractéristiques, directement ou en utilisant les nombres complexes.

**PROBLÈME**

**Partie A**

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle t définie par :

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)^2}.$$

**1.** Étudier les variations de la fonction $f$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Dijon, Grenoble, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

2. Déterminer les réels $a$, $b$, $c$ tels que, quel que soit le réel $t$ appartenant au domaine de définition de $f$

$$f(t) = \frac{a}{(t+1)^2} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t}.$$

3. Montrer l'existence du réel

$$A(x, y) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour $x$ strictement positif et $x$ strictement inférieur à $y$.
Donner une interprétation géométrique de ce réel.

**Partie B**

Soit $g$ la fonction numérique de la variable réelle t définie par :

$$g(t) = -\frac{1}{t^2(1+t)}.$$

1. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & g(t) - f(t) \end{array}$$

admet des primitives. Les calculer.

2. En déduire

$$B(x,\ y) = \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t$$

pour $x$ strictement positif et $x$ strictement inférieur à $y$.

3. $x$ étant fixé, trouver la limite $F(x)$ de $A(x, y)$ quand $y \to +\infty$ puis la limite $G(x)$ de $B(x, y)$ quand $y \to +\infty$.

**Partie C**

On suppose $x$ réel positif strictement.

1. Étudier les variations de la fonction $F$.
En déduire que : quel que soit $x$ strictement positif, $0 < F(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction $G$. En déduire que quel que soit $x$ strictement positif, $G(x) < 0$.
3. Déduire des questions précédentes que : quel que soit $x$ strictement positif,

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$$

4. Puis que pour tout entier naturel non nul $n$,

$$1 < \frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

Et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$