Exercice n° 2

Enoncé

Tableau des scores d'une poule de championnat

On s'intéresse aux tableaux de scores obtenus à l'issue d'une poule d'un championnat sportif.
Dans une telle poule, chaque équipe rencontre chacune des autres ;

- ✠ en cas de match nul on attribue 1 point à chaque équipe ;
- ✠ sinon on attribue 3 points à l'équipe gagnante et 0 point à l'équipe perdante.

Par exemple, si une poule comporte 3 équipes nommées A, B et C, on aura 3 matchs : A contre B, A contre C, B contre C. Si A perd ses deux matchs et que B gagne contre C, A totalisera 0 point, B 6 points et C 3 points. Le tableau de la poule sera dans ce cas le suivant :

1er	B	6
2e	C	3
3e	A	0

Seule nous intéresse ici la troisième colonne ; nous la coderons $\boxed{630}$.
Attention, dans un tel code $\boxed{xyz}$, on aura toujours $x \geqslant y \geqslant z$.
Autre exemple : si les trois matchs donnent un résultat nul, le code obtenu sera $\boxed{222}$.

1. Dans cette question, la poule comporte 3 équipes. Combien de codes possibles obtient-on ? (on connaît déjà 630 et 222) Dans toute la suite, la poule comporte 4 équipes.
2. Si on sait qu'une équipe gagne tous ses matchs, combien de codes possibles peut-on obtenir ?
3. Si on sait que le premier du groupe a totalisé 4 points, combien de codes possibles peut-on obtenir ?

Eléments de solution

1. On obtient facilement 7 codes possibles : 630, 611, 440, 431, 421, 333 et 222.

2.a) En fait, le premier a 9 points. Le reste de la poule revient à effectuer

une mini-poule entre les 3 autres. On utilise dons les résultats de la première question et on obtient 7 codes possibles : 9630, 9611, 9440, 9431, 9421, 9333 et 9222.

b) Notons A le joueur classé premier avec 4 points, B, C et D les trois autres.

Il a nécessairement : une victoire (contre B par exemple)
un nul (avec C par exemple)
une défaire (contre D)

A ce stade, le score est : B : 0 ; C : 1 ; D : 3.
Il reste les trois matchs B–C, B–D et C–D à considérer.

D ne peut gagner aucun match (sinon il aurait au moins 6 points) et a au moins une défaite (car avec 2 nuls il totaliserait 5 points)

- ☐ ou il perd contre B et contre C :
  A ce stade : B : 3 ; C : 4 ; D : 3.
  Impossible car il reste à jouer B–C et B ou C va dépasser 4 points au final.
- ☐ ou il perd contre B et fait un nul contre C :
  A ce stade : B : 3 ; C : 2 ; D : 4.
  Le match B–C ne peut qu'être nul. On obtient : B : 4 ; C : 3 ; D : 4, et le code $\boxed{4443}$
- ☐ ou il perd contre C et fait nul contre B.
  A ce stade : B : 1 ; C : 4 ; D : 4.
  Le match B–C sera gagné par B. On obtient : B : 4 ; C : 4 ; D : 4 et le code $\boxed{4444}$.

Les deux seuls codes possibles commençant par 4 sont $\boxed{4443}$ et $\boxed{4444}$.

Complément : nombre de codes possibles avec quatre équipes

On peut raisonner comme en 2b et raisonner sur tous les scores possibles du vainqueur (9, 7, 6, 5, 4 ou 3) puis traiter chacun de ces six cas comme on l'a fait pour 9 et 4 en 2a et 2b.

Mieux, on appelle A le vainqueur. On considère alors deux temps :

bullet une mini-poule entre B, C et D qui donne les 7 codes possibles de la question 1 (on appelle B le premier, C le deuxième et D le troisième de cette mini-poule). Il suffit de rajouter un zéro devant chaque code pour avoir les scores de ABCD avant que A ne joue.
Par exemple 630 de la mini-poule donne 0630, 611 donne 0611.

bullet il reste à faire jouer à A ses trois matches ; on code le résultat de ces trois matches. Par exemple

si A gagne B et C perd contre D, on obtient 603.

si A gagne D et fait nul contre B et C, on obtient 5110.

Il n'y a plus qu'à ajouter chacun des 7 codes de la mini-poule à chacun des codes de matches de A pour obtenir les codes terminaux. On élimine ceux pour lesquels A ne serait pas vainqueur :
par exemple : 0630 + 6003 = 6630 est recevable
mais 0611+5110=5721 ne l'est pas (B serait vainqueur).
Cette méthode est beaucoup plus rapide et peut être effectuée dans un tableau[1]
On se convaincra vite que les colonnes 4310,4301, 4130, 4103 et 4013 ne donnent aucun résultat recevable.
De même toutes celles où A aurait deux points ou moins.
On obtient **40 solutions**

Ce résultat a été vérifié par deux autres méthodes :

- une méthode du type de celle décrite en question 2b et début de question 2c.
- une programmation des $729 = 3^6$ résultats possibles des 6 matches de poule qui ne donnent au final que ces 40 tableaux possibles.

	9000	7100	7010	7001	6300	6030	6003	5110	5101	5011	4013	3111
630	9630	7730	7640	7631		6660	6633					
611	9611	7711	7621	7612		6641	6614					
440	9440	7540	7450	7441			6443	5550	5541	5451		
431	9431	7531	7441	7432		6461	6434	5541	5532	5442	4444	
421	9421	7521	7431	7422		6451	6424	5531	5522	5432	4434	
333	9333	7433	7343	7334	6633	6363	6336	5443	5434	5344		
222	9222	7322	7232	7223	6522	6252	6225	5332	5323	5233		3333

	9000	7100	7010	7001	6300	6030	6003	5110	5101	5011	4013	3111
630	1	8	10	11		22						
611	2	9	12			23						
440	3	13					27	29	30			
431	4	14	16	18					31	35	38	
421	5	15	19	20		25	28	32	33	36	39	
333	6	17			24			34				
222	7	21			26			37				40

On imagine que A est le vainqueur, que les trois matches entre B, C et D ont lieu d'abord. Puis interviennent les 3 matches concernant A.
La colonne d'entrée donne les scores BCD de la mini-poule entre B,C et D, B étant le meilleur de cette mini-poule, C le second et D le troisième.
La ligne d'entrée donne les scores ABCD après les trois matches AB, AC, AD.
Seuls sont inscrits ceux pour lesquels A finira premier au total des six matches.
On additionne alors dans une case les nombres respectivement en entrée ligne et entrée colonne.
Les numéros des 40 solutions sont attribués par codes décroissants et correspondent aux résultats trouvés par l'informatique.

[1] l'auteur de cette correction a utilisé Excel, mais tout autre tableau de ce type est utilisable